INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO
"José de la Luz y Caballero"
Holguín

"PROCEDIMIENTO DIDÁCTICO PARA EL DISEÑO DE LA INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS EN DÉCIMO GRADO"

Tesis en opción al grado académico de Master en Didáctica de la Matemática

AUTOR: Lic. Aldo M. Ruiz Pérez

***TUTOR*: Dr.** Otilio Mederos Anoceto

Diciembre *2002*

Resumen

En la presente tesis se aborda un problema de mucha actualidad relacionado con la integración de conocimientos matemáticos en el preuniversitario, específicamente en décimo grado.

En la ejecución de la investigación se combinaron varios métodos tanto del nivel teórico como del nivel empírico del conocimiento científico. Se pudo constatar la existencia del problema en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los preuniversitarios de la provincia de Sancti Spíritus y corroborar que el mismo tiene un alcance internacional.

El análisis de las posibles causas del problema condujo a la elaboración de un procedimiento didáctico para diseñar la integración de conocimientos matemáticos, el cual puede ser utilizado por los profesores y profesoras de Matemática en el empeño de mejorar los resultados de su labor con respecto al aprendizaje de los alumnos y alumnas.

La propuesta se sustenta psicológicamente en los fundamentos de la Escuela del Enfoque Histórico-Cultural de Vygotsky; en el análisis del conocimiento matemático se utilizan algunos aportes importantes de teorías didácticas desarrolladas en Europa y en el orden teórico y práctico se emplean varios de los aportes de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática introducida en Cuba por asesores alemanes y desarrollada creativamente por profesores cubanos.

La aplicación del método de la consulta a expertos arrojó como resultado una opinión favorable a la validez de la solución propuesta al problema de investigación.

Índice

Introducción.

La concepción del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en el nivel medio en Cuba, atraviesa por una etapa de transformaciones que se materializan en la práctica educativa como producto de la combinación de varios factores, donde se incluyen desde la preparación y creencias de los profesores hasta las influencias de la familia de los educandos y del contexto social donde éstos desarrollan su vida.

En las transformaciones que se operan se hace énfasis en relaciones interdisciplinarias y se han diseñado los Programas Directores con el fin de concretar éstas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las distintas asignaturas. Con los mismos fines y desde el punto de vista de las estructuras de dirección, se han formado departamentos por áreas del conocimiento que agrupan profesores de distintas materias afines.

Entre los fines que persiguen estas nuevas ideas, desde el punto de vista cognitivo, está el logro de la integración de los conocimientos adquiridos por los alumnos como resultado del proceso de enseñanza aprendizaje y en especial, la integración de los conocimientos de distintas asignaturas.

Además de la preocupación por las relaciones interdisciplinarias, en la práctica educativa de estos tiempos en nuestro país, es común escuchar la preocupación por establecer vínculos integradores entre los conocimientos adquiridos en una misma asignatura, como una necesidad del proceso docente educativo. Estos vínculos conllevan a la recuperación de los saberes como proceso contrario del olvido.

Entre las razones que dan distintos pedagogos e investigadores para fundamentar la necesidad e importancia de la integración de los conocimientos matemáticos, y que comparte el autor de la presente tesis, se pueden mencionar las siguientes:

- La integración propicia el aseguramiento de los conocimientos adquiridos mediante la recuperación que se realiza de los mismos en varios momentos del proceso para relacionarlos con otros.
- La integración de los conocimientos contribuye a que se produzca un aprendizaje significativo basado en el establecimiento de relaciones entre los conocimientos que se asimilan y los adquiridos con anterioridad.
- La existencia de conocimientos integrados fortalece los recursos de los alumnos para resolver nuevos problemas.
- El conocimiento matemático tiene una naturaleza sistémica y no un carácter fragmentado.

La necesidad e importancia señaladas de la integración de los conocimientos matemáticos, válidas para cualquier nivel de la Enseñanza General, se acentúan en el preuniversitario. Hay dos razones, por lo menos, que explican este fenómeno: por una parte, el alumno ha adquirido un nivel de desarrollo psíquico que le permite establecer relaciones complejas entre los conocimientos adquiridos con anterioridad y entre éstos y los nuevos conocimientos, y por otra, a que en este nivel de enseñanza se impone que el alumno se prepare para enfrentar estudios universitarios que requieren un nivel de desarrollo del pensamiento que se caracteriza por la integración de los saberes que se tienen.

Un análisis del desempeño de una muestra de alumnos de décimo y onceno grados de algunos preuniversitarios de la provincia de Sancti Spíritus ante la resolución de algunas tareas que les fueron propuestas para medir el nivel de integración de sus conocimientos (García, 2001), pone al descubierto que los saberes adquiridos por los mismos tienen un elevado nivel de desintegración al observarse que en ellos predomina cierta rigidez que se expresa en una dependencia excesiva de la nomenclatura y en la no existencia de diferentes técnicas para resolver una misma tarea. También se pudo comprobar la imposibilidad de relacionar varios procedimientos estudiados para resolver un problema, de plantear diferentes situaciones que respondan a un modelo dado y de relacionar un concepto con otros conceptos afines.

Por otra parte, una encuesta (anexo 1) aplicada a una muestra de los profesores y profesoras de Matemática de estos mismos centros y de otros preuniversitarios, indica que la integración de los conocimientos no constituye una prioridad en la planificación de las unidades por parte de los (las) docentes y que sólo se presta interés a este proceso en las últimas clases. También se pudo constatar, que los profesores y profesoras no disponen de ningún procedimiento sistemático para el diseño de sistemas de tareas integradoras, por lo que elaboran las mismas guiados por su intuición y experiencia.

También se ha podido verificar en el análisis de los distintos documentos que utilizan los profesores y profesoras de Matemática de los preuniversitarios para la preparación de las clases, la ausencia de procedimientos didácticos encaminados a que se logre la integración de los conocimientos de los alumnos como una dimensión importante a la hora de dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura. Sólo se indica la intención (el qué), pero no la manera de materializarla (el cómo).

En una entrevista realizada a distintos profesores del preuniversitario (anexo 2), se pudo comprobar la falta de claridad teórica en cuanto al concepto de integración de conocimientos y sobre el cómo lograrla. Tal tendencia se manifiesta en que sólo pueden citar ejemplos muy puntuales sobre tareas docentes integradoras para ser propuestas en algunas clases, principalmente al finalizar una unidad, pero no son capaces de concebir tareas para una clase cualquiera.

Los hechos citados en el párrafo anterior también fueron constatados por Rebollar (2000, p.51), quien hace referencia a que en las condiciones en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel medio, la sistematización aparece al finalizar las unidades.

La búsqueda de información sobre las causas de este fenómeno, condujo al autor de la presente investigación a la revisión del diseño de las carreras donde se han formado y se forman profesores de Matemática en los Institutos Superiores Pedagógicos. Se pudo constatar que en la disciplina Metodología de la Enseñanza de la Matemática, cuando se estudia la función didáctica fijación, los alumnos se preparan en una de las formas que ésta adopta: la sistematización. En la preparación que se ofrece, que tiene un carácter general, se enfatiza en la sistematización de conceptos, teoremas y procedimientos con ejemplos muy puntuales, pero no se concreta cómo realizar esta forma de fijación en el preuniversitario en términos de propiciar variantes que puedan ser utilizadas en los distintos momentos del estudio de una unidad.

La búsqueda de información sobre las investigaciones realizadas en nuestro país y el extranjero acerca de la problemática citada, muestra la no existencia de procedimientos sistemáticos que le permitan al profesor o profesora de Matemática del preuniversitario, diseñar la integración de conocimientos con el objetivo de poderla concretar en el aprendizaje de los alumnos.

Todos los hechos descritos muestran que las insuficiencias que existen actualmente en la integración de los conocimientos matemáticos en el preuniversitario están muy relacionadas con la preparación de los (las) docentes para dirigir el proceso y específicamente para diseñarlo. Estas limitaciones tienen su origen, en principio, en la no existencia en la didáctica de la asignatura de los elementos metodológicos suficientes y sistematizados para diseñar la integración de conocimientos, lo cual se observa en los planes de formación de profesores.

Si se tiene en cuenta que las insuficiencias señaladas deben comenzar a resolverse por el décimo grado, queda planteado el siguiente

Problema científico:

¿Cómo contribuir a que se produzcan cambios favorables en los niveles de integración de los conocimientos matemáticos en los estudiantes de décimo grado?

El **objeto** de esta investigación es el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el décimo grado.

La naturaleza del problema de investigación y el desarrollo alcanzado por la Didáctica de la Matemática en Cuba y el extranjero apuntan hacia la necesidad de contribuir a darle solución al mismo por la vía de la creación de un procedimiento didáctico que permita a los profesores y profesoras, diseñar adecuadamente la integración de conocimientos. De esta manera se precisa que la investigación tiene como

Objetivo:

Elaboración y ejemplificación de un procedimiento didáctico para que el profesor o profesora de Matemática de décimo grado, pueda diseñar la integración de conocimientos matemáticos.

El **campo de acción** es la integración de conocimientos matemáticos mediante la ejecución de acciones didácticas por parte del profesor o profesora.

El proceso de resolución del problema de investigación por la vía analítica llevó

al planteamiento de los siguientes subproblemas a modo de **preguntas**

científicas:

1. ¿Qué entender por integración de conocimientos matemáticos y en qué aspectos teóricos se fundamenta?
2. ¿Por qué resulta necesaria y posible la integración de conocimientos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en el preuniversitario en las condiciones actuales?
3. ¿Cuáles son los principales aportes de distintas teorías y propuestas didácticas al diseño de la integración de los conocimientos matemáticos en el preuniversitario?

4. ¿Qué acciones didácticas deben ejecutarse por parte del profesor o profesora de Matemática de décimo grado para diseñar la integración de conocimientos matemáticos?
5. ¿Se confirma la validez del procedimiento didáctico elaborado y ejemplificado para producir cambios favorables en la integración de conocimientos matemáticos en décimo grado?

Para el desarrollo de la investigación se ejecutaron las siguientes **tareas científicas**:

1. Estudiar las fuentes de información para caracterizar los conceptos de conocimiento matemático e integración de conocimientos matemáticos.
2. Estudiar las fuentes de información para fundamentar la necesidad y posibilidad de la integración de conocimientos matemáticos en el proceso de enseñaza-aprendizaje de la Matemática en el décimo grado en las condiciones actuales, y los principales aportes de las teorías y propuestas didácticas a los procedimientos para su diseño.
3. Elaborar un procedimiento didáctico para diseñar la integración de conocimientos matemáticos por parte de los profesores y profesoras de Matemática que imparten la asignatura en el décimo grado.
4. Aplicar el procedimiento propuesto en una unidad del Programa de Matemática para el décimo grado.
5. Aplicar el método de expertos para evaluar la validez de la solución que se da al problema de investigación.

Para el desarrollo de la investigación se emplearon los **métodos** siguientes:

Del nivel teórico.

- Análisis-síntesis e inducción-deducción para el estudio de las fuentes de información, extraer de ellas regularidades y tendencias relacionadas con la integración de conocimientos matemáticos y para fundamentar el problema de investigación.

- Método de análisis histórico y lógico para analizar el comportamiento del problema de la investigación en las diferentes posiciones estudiadas y la evolución de las soluciones propuestas.
- Método de enfoque sistémico para estudiar la estructura del conocimiento matemático.

Del nivel empírico.

1. La encuesta para:
   - Conocer la opinión de distintos profesores sobre la relación entre los conceptos de sistematización e integración de conocimientos.
   - Buscar hechos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto.
2. El método de expertos para fundamentar la validez de la propuesta.
3. La entrevista para constatar la existencia del problema de investigación en el objeto.

Del nivel estadístico.

Métodos de la Estadística Descriptiva para realizar el procesamiento de la información recolectada con los instrumentos asociados a los distintos métodos.

La investigación **aporta**, desde el punto de vista **teórico,** un procedimiento didáctico para diseñar la integración de conocimientos matemáticos en el décimo grado.

Desde el punto de vista **práctico** la investigación aporta, a los profesores del décimo grado del preuniversitario, un ejemplo de la aplicación del procedimiento didáctico propuesto a una unidad del Programa, que puede ser utilizado en el proceso de enseñanza-aprendizaje del grado.

La tesis está conformada por introducción, dos capítulos, las conclusiones y recomendaciones , la bibliografía y varios anexos.

En el capítulo I titulado “La integración de conocimientos. Su necesidad y posibilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el décimo grado”, **se exponen los elementos teóricos esenciales en que se fundamenta la solución del problema de investigación.**

El capítulo II cuyo título es: “Estructura y realización de un **p**rocedimiento didáctico para el diseño de la integración de conocimientos matemáticos en el décimo grado”**, está dividido en tres epígrafes. En el primero se explican las acciones y operaciones del procedimiento, en el segundo se ejemplifican éstas en una unidad del Programa de décimo grado y en el tercero se exponen los resultados del método de expertos utilizado para la valoración de la propuesta.**

Capítulo I. La integración de conocimientos. Su necesidad y posibilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el décimo grado.

En el presente capítulo, que está dividido en cuatro epígrafes, se esbozan los elementos teóricos en que se fundamenta la solución que se le da al problema de investigación. En el primer epígrafe, se caracteriza el conocimiento matemático a partir de posiciones filosóficas materialistas teniendo en cuenta las características de la Matemática como ciencia, se establece una diferenciación entre las facetas individual e institucional del conocimiento, utilizando la teoría psicológica de Vygotsky, y se describe su estructura compleja mediante el concepto de función semiótica. En este epígrafe, también se fundamenta el papel de los conceptos para el análisis de los conocimientos matemáticos, se analiza la relación entre las nociones de contenido y conocimiento y se caracteriza la integración de conocimientos.

En el segundo epígrafe, se fundamenta la necesidad de la integración de conocimientos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario; en el tercero se analiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en décimo grado y en el cuarto se realiza un análisis de los principales aportes de varias teorías y propuestas didácticas a la integración de conocimientos matemáticos.

Caracterización del conocimiento matemático escolar y su integración en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.1.1. Caracterización del conocimiento matemático.

El conocimiento es, según la teoría del materialismo dialéctico (Rosental & Iudin, 1981), el proceso en virtud del cual la realidad se refleja y reproduce en el pensamiento humano. Pero este proceso en cada una de sus fases, en el tiempo, proporciona un resultado que puede interpretarse como el conocimiento visto en su faceta de producto. De esta manera el conocimiento es, como señala Rojo (p.1), un proceso y un producto.

El conocimiento como producto puede caracterizarse teniendo en cuenta su naturaleza, niveles y formas que adopta. Entre estas últimas se encuentran los conceptos, las preguntas, las descripciones, las explicaciones, las predicciones y las normas o reglas (Rojo, p.2).

No es posible dar una lista completa de todas las formas que adopta el conocimiento como producto, pues como proceso tiene un carácter complejo cuyos resultados pueden ser muy variados. En tal sentido señala Morin (cit. por Batanero, 1997, p.2):

> "La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas una nueva interrogante" .

El conocimiento matemático adopta las formas señaladas por Rojo, pero tiene sus especificidades muy ligadas al objeto de estudio de la Matemática como ciencia. Engels, en correspondencia con el nivel de desarrollo alcanzado en la segunda mitad del siglo XIX, lo formuló en 1877 en su obra Anti-Düring, como "las formas del espacio y las relaciones cuantitativas del mundo real" (Engels, p.52). También George (1996), ha señalado que la Matemática ha desarrollado un cuerpo de conocimientos relacionados con el número y el espacio utilizando un lenguaje universal.

Otros autores (Godino, 1996), utilizando ciertas hipótesis cognitivas e epistemológicas que tienen en cuenta las tendencias recientes en filosofía de la Matemática, han caracterizado esta ciencia con ciertos atributos que se ajustan a lo que debiera ser la Matemática escolar:

- La Matemática es una **actividad humana** que implica la solución de situaciones problemáticas. Es decir, es una actividad básicamente caracterizada por el saber hacer, en la que predomina el método sobre el contenido (Mederos, 2002). Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o grupos específicos que se implican en su estudio.
- La Matemática es un **lenguaje simbólico** en el que se expresan los problemas y las soluciones encontradas para los mismos. Los sistemas de símbolos matemáticos tienen una función comunicativa e instrumental.
- La Matemática es un **sistema conceptual** lógicamente organizado. Cuando un objeto es aceptado como parte del sistema puede ser manipulado como un todo para crear nuevos objetos.

Según los atributos anteriores, la Matemática tiene un triple carácter: actividad de resolución de problemas (socialmente compartida), lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Puede considerase que como cada uno de estos tres aspectos tiene un fin en sí, constituyen dimensiones[1] de la Matemática escolar.

Las formas que adopta el conocimiento matemático están muy relacionadas con estas tres dimensiones y tienen su presencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura en la escuela. Así, los llamados estilos de

[1] Se asume que una dimensión es una proyección de un objeto o atributo en una cierta dirección (Álvarez, 2002, p. 6).

enseñanza (García,1999, pp. 4-7), se diferencian entre sí porque han enfatizado más en ciertas dimensiones de la Matemática que en otras.

Las tendencias actuales en la Didáctica, tienden a privilegiar a la Matemática como una actividad de resolución de problemas socialmente compartida, sin descuidar el resto de los aspectos que le dan su tripe carácter, pues como expresan Godino y Batanero (1998, p. 3), el aspecto medular del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática no está en el dominio de la sintaxis del lenguaje matemático simbólico, sino en la naturaleza de los conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y problemas de cuya resolución provienen.

El estudio del proceso cognoscitivo (conocimiento como proceso) en los marcos de una institución escolar es una de las tareas de la didáctica. En este empeño no es posible considerar al conocimiento como un ente propio de la actividad de individuos aislados (conocimiento individual), sino como el resultado de la actividad humana de varios individuos que interactúan bajo la dirección de un (una) docente (conocimiento institucional) (Godino, 2001a, p.2). Como señala González (p. 27), Vigostsky descubrió en sus investigaciones, que la ley más importante del psiquismo humano refleja que todas las funciones psicointelectivas superiores aparecen dos veces en el curso del desarrollo del niño; la primera vez en las actividades sociales y la segunda en las individuales.

Hay que tener en cuenta que como la actividad matemática en una institución escolar transcurre en grupos de estudiantes que interactúan entre sí, los conocimientos que emergen en la misma no son sólo el resultado del pensamiento individual aislado de cada miembro de un grupo, sino también de la interacción de éstos. En la teoría psicológica de Vygotsky se han utilizado varios categorías para explicar este fenómeno en términos del desarrollo ante la resolución de problemas (1989).

Puesto que la actividad matemática en la escuela debe estar guiada por la resolución de problemas, las ideas de Vygotsky pueden ser utilizadas para fundamentar una diferenciación entre el conocimiento que puede adquirir el alumno por sí solo del que puede adquirir con la ayuda de alguien. La brecha entre ambos niveles se puede caracterizar por la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) introducida por Vygotsky como:

> "La distancia entre el nivel de desarrollo, lo que sabe, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo próximo, lo que puede llegar a saber, determinado a través de la resolución de unos problemas bajo la guía o mediación de un adulto o en colaboración con otro niño más capaz" (Vygotsky, 1989, p.297).

Godino (2001a, p.2), en su modelo semiótico-antropológico, ha enfatizado en la necesidad de establecer esta diferenciación y ha propuesto distinguir la “cognición individual” de la “cognición institucional”. Señala que la primera, es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras que la segunda es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos.

En vista de que la presente tesis trata sobre la integración de conocimientos matemáticos, es necesario asumir una tipología para las formas que adoptan éstos, teniendo en cuenta las tres dimensiones señaladas para la Matemática escolar.

El análisis bibliográfico realizado por el autor de esta investigación, ha permitido identificar algunas teorías didácticas en las cuales se hace un análisis profundo del conocimiento matemático sin obviar la importancia de cada una de las tres dimensiones de la Matemática escolar; por eso, para argumentar la tipología que se utilizará para los conocimientos matemáticos, se partirá del análisis de algunas de las obras más importantes de los representantes de estas teorías.

Como base para el análisis se utilizarán en este trabajo dos modelos didácticos que, de forma explícita, se refieren a los conocimientos matemáticos como entes que, por una parte, guían la actividad matemática y, por otra, emergen de ella. Se trata de los respectivos modelos propuestos por la Teoría Antropológica de la Didáctica de la Matemática (TAD) (Bosh, 2000; Fonseca y Gascón, 2000, 2002 a y b) y la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) (Godino, 1996, 2001 a y b; Godino y Batanero, 1994, 1998, Tauber 2000).

La TAD ha planteado un modelo de la actividad matemática en que se describe ésta y el conocimiento que de ella emerge en términos de organizaciones matemáticas:

> "Una organización matemática es una entidad compuesta por tipos de problemas o tareas problemáticas; tipos de técnicas que permiten resolver los tipos de problemas; tecnologías o discursos (logos) que describen y explican las técnicas; una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas y los tipos de técnicas constituyen el "saber-hacer" matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos

> conformarían el “saber” matemático propiamente dicho.” (Bosch, 2000, p. 2).

En la TAD los conceptos de tarea y técnica se utilizan como nociones primarias. Son tareas, por ejemplo, resolver una ecuación, calcular el resultado de una operación matemática, demostrar una proposición, construir una figura que cumpla ciertas condiciones, resolver un problema relacionado con la práctica, etc. Las técnicas se describen, al decir de Godino (p.8), como “maneras de realizar las tareas” y no tienen que ser necesariamente de naturaleza algorítmica o cuasi algorítmica, lo cual ocurre en casos poco frecuentes. De esta manera las técnicas de la TAD podrían interpretarse como procedimientos (algorítmicos, cuasi algorítmicos o heurísticos) para resolver las tareas, con énfasis, en el sentido de la cognición institucional y no de la cognición individual del sujeto que aprende.

Es importante señalar que los conceptos de tarea y técnica son relativos a una institución[2], en el seno de la cual pueden considerarse como tareas sólo aquellas para las cuales se dispone de algún tipo de técnica con su entorno tecnológico-teórico más o menos explícito, así por ejemplo, la identificación de números primos es una tarea en 6. grado de primaria para números “pequeños”, pero no lo es para números grandes.

La exigencia impuesta a las tareas, referida a que debe disponerse de algún tipo de técnica con su entorno tecnológico-teórico, indica que el modelo de la TAD implícitamente contempla la necesidad de la existencia de ciertos

[2] Una institución está constituida por todas las personas involucradas en un mismo tipo de tareas. Por ejemplo, todas las personas que en el seno de la sociedad están comprometidos en la resolución de nuevos problemas matemáticos forman la institución matemática. También cuando los alumnos de un aula se enfrascan en resolver un tipo de tarea constituyen una institución.

conocimientos en el alumno que puedan servir de guía a su actividad matemática de resolución de las tareas.

Pero a la vez en la TAD, se señala que partiendo de ciertas organizaciones matemáticas, se plantean cuestiones problemáticas[3] que no pueden resolverse en ellas y así en el proceso de estudio se va desarrollando un discurso tecnológico que permite "describir, interpretar, justificar, explicar y relacionar las antiguas técnicas matemáticas, así como producir técnicas nuevas" (Fonseca y Gascón, 2002 b, p.1). Bajo esta concepción emergen los nuevos conocimientos matemáticos.

Obsérvese que el concepto de organización (praxeología) matemática incluye aquellos saberes que emergen de las siguientes posibles combinaciones entre tipos de tareas y técnicas.

- Resolver tareas de un mismo tipo con una única técnica (e. g. resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables utilizando la técnica de eliminación).
- Resolver tareas de distintos tipos con la misma técnica (e. g. resolver sistemas de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones cuadráticos aplicando la técnica de sustitución).
- Resolver tareas de un mismo tipo con distintas técnicas (e. g. resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando la técnica de eliminación y la técnica de sustitución).
- Resolver tareas de distintos tipos utilizando para cada una distintas técnicas (e. g. resolver ecuaciones cuadráticas y factorizar polinomios utilizando para el primer tipo de tarea las técnicas del completamiento cuadrático y la fórmula del discriminante, y para el segundo tipo de tarea, las técnicas de la extracción del factor común y la Regla de Ruffini).

[3] Preguntas en el sentido que lo señala Rebollar (2000, p. 59).

En los dos primeros casos la organización matemática que se construye se designa con el calificativo de puntual para diferenciarla del resto. Así, el saber que emerge en estos casos también puede designarse como puntual porque se refiere a un único tipo de tareas o de técnica.

En cuanto a las limitaciones, hay que señalar en primer lugar, que el modelo de la actividad matemática que propone la TAD no hace énfasis en el aseguramiento del conocimiento que el alumno adquiere, lo cual es contemplado por la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM) que se ha venido utilizando en Cuba a partir del asesoramiento de especialistas alemanes. Como señala Jungk (1978, p.71):

> "El trabajo en la adquisición de nuevos conocimientos en la enseñanza de la matemática transcurre fundamentalmente en dos etapas: la fase de la búsqueda del conocimiento y la fase del aseguramiento del conocimiento. Ambas fases pueden mostrarse en el desarrollo histórico de determinados conocimientos matemáticos".

La TAD, que ha centrado su atención casi exclusivamente en la dimensión institucional del conocimiento matemático (Godino, 2001 a, p.8), no enfatiza en las implicaciones axiológicas del proceso cognoscitivo al no haber desarrollado constructos que tengan en cuenta lo individual, pues se postula como previa y determinante la caracterización de las praxeologías matemáticas y el estudio de las relaciones institucionales.

En la TAD la unidad elemental de análisis no es el concepto, sino la organización matemática. Pero en esta teoría no se ha precisado en qué parte de las organizaciones matemáticas quedan incluidos los conceptos, las proposiciones y las demostraciones mediante las cuales se logra justificar y explicar las técnicas. Por eso, como expresa Godino (p.8), el bloque tecnológico-teórico se debe descomponer explícitamente en entidades más elementales tales como conceptos-definición, proposiciones, argumentaciones.

Aunque el concepto de tarea que se utiliza en la TAD incluye los casos en que éstas tengan un contexto extramatemático (Fonseca y Gascón, p.2), en las aplicaciones prácticas del modelo de la TAD se han utilizado tareas de origen intramatemático (Gascón y Fonseca, 2000, 2002 a y 2002 b), lo cual puede conducir a la limitación de no utilizar tareas que contemplen contextos extramatemáticos que propicien un conocimiento vinculado con la realidad sociocultural en que viven los estudiantes limitando también las posibilidades del uso de la modelación de situaciones relacionadas con la práctica.

La TFS ha introducido tres nociones fundamentales para estudiar la cognición matemática (institucional e individual) y la evaluación de los conocimientos de los alumnos. Se trata de los conceptos de **práctica**, **objeto** y **significado**. Estas nociones han sido utilizadas para al análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los niveles medio (Godino, 2001b) y universitario en investigaciones del nivel de tesis doctorales.

En la TFS y también en la TAD, se considera que los problemas no deben aparecer aislados, sino como representantes de campos de problemas (Gascón, 1994, p. 49; Godino, 1996, p. 3). Un campo de problemas surge a partir de un problema inicial por la variación sistemática de las variables que intervienen en él, lo que indica que éste se puede ir ampliando en su proceso de estudio. Los problemas de un campo se agrupan y estudian en función de las técnicas matemáticas que se pueden utilizar para resolverlos (Gascón, 1994, p.49; Gascón y Fonseca, 2000).

En el marco de la TFS, se llama **práctica**[4] a toda ***actuación*** o ***manifestación*** (lingüística o no) realizada por alguien con el objetivo de ***resolver*** problemas matemáticos, ***comunicar*** a otros la solución, ***validar*** la solución y ***generalizarla*** a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p.10).

El concepto de práctica resulta bastante amplio debido al objetivo que se persigue y en él se sintetizan las características de la actividad de matematización[5]. En primer lugar, la resolución de un problema es un proceso complejo que implica varias acciones agrupadas en etapas, las cuales han sido modeladas por diversos autores como Polya, Schoenfeld, Müller, Jungk, De Guzmán, Mason-Burton-Stacey (Sigarreta, 2001).

El concepto de práctica incluye la comunicación, lo cual concuerda con enfoques psicológicos actuales de la personalidad, pues como señalan Rodríguez y Bermúdez (1996, p.8):

> "la personalidad no sólo existe por y a través de la actividad del sujeto, sino también por y través de su comunicación... actuar significa conocer y/o transformar los objetos de esa actuación, y, al mismo tiempo, implica la comunicación con aquellos sujetos que hicieron o hacen posible la relación objetal".

Como lo ha explicado Brenes (2000), la comunicación en la enseñanza de la Matemática resulta un proceso de gran complejidad e importancia. No es posible analizar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática sin comunicación profesor-alumno y alumno-alumno.

Aunque en la definición de práctica, se habla de generalizar la solución de un problema, debiera hablarse de la generalización del problema, pues primero hay que tener un problema para después encontrar su solución.

---

[4] Este concepto tiene grandes analogías con el concepto psicológico de actuación contextual introducido por Rodríguez y Bermúdez, y utilizado como criterio para la periodización del desarrollo psíquico (1996, p.9).

[5] Según García (1999, p.4), matematizar es organizar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras.

La generalización es una operación lógica que ha sido utilizada por Cruz (2002) para la formulación de nuevos problemas a partir de un problema dado. Su aplicación conlleva, en ocasiones, al uso de ciertas técnicas y requiere de varias acciones , por lo que resulta un proceso complejo como lo ha señalado Labarrere como conclusión de sus estudios (1995, p.70).

En cuanto a las formas que puede adoptar una práctica hay dos que necesitan de un comentario. La primera se refiere a que una práctica puede ser una actuación, es decir, una acción o secuencia de acciones; y la segunda a que una práctica puede ser una manifestación lingüística. Esta manifestación lingüística, que emerge en la actividad de resolver el problema, validar la solución, comunicar a otros la solución o generalizar el problema, pudiera incluir el enunciado de una o varias proposiciones matemáticas, la descripción de un procedimiento, el uso de una o varias representaciones simbólicas, la definición de un concepto, demostraciones, etc.

Lo anterior indica, que bajo la concepción de la TFS, en la actividad de resolución de problemas no sólo los sujetos aplican los conocimientos adquiridos, sino que también deben construir nuevos conocimientos.

Por otra parte, obsérvese que cuando una práctica la realiza una persona puede ser una acción o manifestación interiorizada del sujeto, es decir, las prácticas personales no tienen que ser fenómenos observables. Pero cuando estas prácticas se realizan en el seno de una institución donde necesariamente los sujetos interactúan entre sí, y varias de ellas son compartidas entre los miembros de la institución, tales prácticas tienen un carácter observable. Específicamente cuando la institución es un grupo-clase, los alumnos interactúan entre sí bajo la dirección del profesor y comparten socialmente ciertas prácticas.

La manera en que se ha definido la noción de práctica permite afirmar que generalmente no se trata de una sola, sino de varias que deben interrelacionarse. Por tanto, hay que hablar no de prácticas aisladas, sino de sistemas de prácticas[6] para resolver un problema, validar la solución, comunicar la solución a otros o generalizar el problema.

El hecho de que se hable en el concepto de práctica de la generalización de la solución del problema a otros contextos, permite afirmar que la TFS asume que los problemas que han de resolverse deben tener un contexto[7].

Además de las prácticas particulares frente a un problema concreto, interesan aquellas prácticas generalizadas (invariantes) que se pueden aplicar a todos los problemas de un cierto tipo, a las cuales se les llama **prácticas prototípicas**.

Como el proceso de resolución de un problema no es lineal, en éste hay actuaciones infructuosas que se abandonan y otras que tienen éxito. Una práctica se denomina **significativa** o con sentido (para una persona o institución), si ésta desempeña alguna función para conseguir el objetivo que la persona o institución se propone cuando la realiza. Por ejemplo, si alguien resolviendo un problema aplica una técnica que no lo conduce a la solución, esa acción no es una práctica significativa para quien resuelve el problema.

La TFS postula que los **objetos** matemáticos emergen de los sistemas de prácticas significativas asociadas a los campos de problemas. Los objetos institucionales emergen del sistema de prácticas significativas socialmente

[6] Cuando se trate de una sola práctica no tiene sentido hablar de sistema.

[7] Gascón (1994, p.41) ha definido el contexto de un problema como el sistema matemático o extramatemático a partir del cual surge. En la clasificación de R. Borasi (García, 1999, p.9) hay tipos de problemas que no tienen contexto.

compartidas en el seno de una institución, mientras que los personales emergen del sistema de prácticas significativas personales que un individuo realiza para resolver un campo de problemas. Son objetos institucionales, por ejemplo, los conceptos, las proposiciones, los procedimientos, los símbolos matemáticos, etc, pues estos objetos son el producto de sistemas de prácticas institucionales socialmente compartidas.

El **significado** de un objeto institucional (personal) es el sistema de prácticas significativas socialmente compartidas (sistema de prácticas prototípicas personales significativas) asociadas al campo de problemas de donde emerge el objeto en un momento dado. De acuerdo con esto, el significado personal no tiene que ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo.

Como el significado está concretado en un momento dado, éste puede variar con el tiempo. Debido a ello, en ciertas circunstancias, el significado pudiera reducirse a una sola práctica (significado elemental) o ser vacío. El significado personal depende además del individuo, mientras que el significado institucional depende de la institución. Este enfoque permite ver diferentes objetos donde otros ven uno solo. Así, por ejemplo, el concepto de triángulo rectángulo tiene diferentes significados en un grupo-clase de 6. grado que en uno de 10. grado. De igual manera para un pintor los triángulos tienen un significado que no es el mismo que pueden tener para un matemático.

Como explica Godino (2001 a, p. 12), “la actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales”, es decir, en la actividad matemática pura y aplicada interesan tanto los objetos como las relaciones entre ellos.

Con el objetivo de modelar el carácter relacional de la actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos, la TFS ha introducido una cuarta noción: el concepto de **función semiótica** (Godino, 2001 a, p.12; Godino y Batanero, 1998, p.7).

Una función semiótica hace corresponder a un objeto matemático (expresión, significante) el significado de este objeto en un momento dado (contenido) utilizando un código interpretativo. Estas correspondencias las establecen los sujetos individuales o las instituciones y pueden ser uniformes o multiformes en dependencia de si el significado (en un momento dado) está constituido por una sola práctica (significado elemental) o por varias (significado sistémico). Las primeras se llaman funciones **elementales** y las segundas **sistémicas**.

Con el fin de estudiar las funciones semióticas sistémicas y en correspondencia con el triple carácter de la Matemática, la TFS ha propuesto una tipología inicial para los objetos matemáticos que pueden ser elementos del contenido de una función semiótica (Godino, 2001 a, p.10; Godino 2001 b, p. 2). En esta tipología se reconocen los siguientes tipos de **objetos elementales**:

- Lenguaje (escrito, oral, gráfico).
- Situaciones-problemas.
- Acciones (operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas).
- Conceptos (definiciones).
- Propiedades (proposiciones).
- Argumentaciones-validaciones (justificaciones, validaciones).

Llegado este punto se necesita hacer algunas explicaciones relacionadas con varios de los objetos matemáticos anteriores.

El lenguaje (escrito, oral, gráfico, gestual) incluye todo tipo de representaciones materiales usadas en la actividad matemática tales como cadenas de letras, palabras, números, gráficos, diagramas e incluso objetos físicos.

El concepto de situación-problema se toma en la TFS como noción primitiva y juega el mismo papel que la tarea en la TAD. Se trata de un problema en el sentido amplio[8] que tiene un contexto.

El objeto argumentaciones-validaciones incluye las fundamentaciones[9], las argumentaciones[10] y las demostraciones matemáticas.

Con los elementos introducidos se pueden citar ejemplos de funciones semióticas.

- El símbolo a^3 (expresión) representa el producto a.a.a (contenido). En este caso se trata de una función semiótica que hace corresponder a un elemento lingüístico otro elemento de la misma naturaleza.
- En la definición de triángulo como polígono de tres lados, se le hace corresponder a este concepto (expresión) el de polígono de tres lados (contenido).
- Al concepto de triángulo rectángulo se le hace corresponder el Teorema de Pitágoras con su respectiva demostración. En este caso el concepto de triángulo rectángulo es la expresión y el contenido está compuesto por el Teorema de Pitágoras y su demostración.

En los dos primeros ejemplos el contenido de la función semiótica es un objeto elemental, mientras que el contenido de la tercera está constituido por una proposición matemática y su demostración. En los dos primeros casos se está

---

8 Véase García, 1999.

9 Acciones mentales dirigidas a dar a conocer nuestro criterio sobre un hecho o fenómeno" (Palacio, 2000, p.1) que se convierten en demostraciones de un solo paso (Müller, 1987).

10 Aquí argumentar se toma en el sentido en que lo señala Radford (1990, p.21).

en presencia de una función semiótica elemental y en el tercero de una función semiótica sistémica (Godino y Batanero, 1998, p.10).

Hay que destacar que en la función semiótica sistémica del tercer ejemplo, además de establecerse una correspondencia entre el concepto de triángulo rectángulo y el significado formado por el teorema de Pitágoras y su demostración, también hay una función semiótica elemental que asocia al Teorema de Pitágoras (proposición) su demostración (argumentación-validación). Esto ocurre en todas las funciones semióticas sistémicas, es decir, además de la correspondencia entre un objeto y un sistema de prácticas, también hay correspondencias semióticas entre las prácticas que conforman el sistema.

Con el concepto de función semiótica se pueden caracterizar los conocimientos que sobre un objeto tiene un sujeto. De esta manera, los conocimientos que un sujeto X (persona o institución) tiene sobre un objeto O se pueden describir como las funciones semióticas que X puede establecer donde O es expresión o contenido. Cada una de tales funciones semióticas constituye un conocimiento sobre el objeto O (Godino, 2001 a, p.12).

A partir de la forma en que se han conceptuados los conocimientos sobre un objeto, pueden clasificarse éstos en elementales o sistémicos, según se expresen con funciones semióticas elementales o sistémicas, respectivamente. Los conocimientos elementales sobre un objeto O, en dependencia, del objeto elemental que le asocie a O la función semiótica pueden ser lingüístico-notacionales, situacionales, procedimentales, conceptuales, proposicionales o argumentativo-validativos (Godino, 2001 a, pp.13-14).

1.1.2. **El papel de los conceptos en el análisis de los conocimientos matemáticos.**

Entre las dimensiones de la Matemática escolar se encuentra la de ser un sistema conceptual lógicamente organizado. Por eso los conceptos son entidades que pueden ser utilizadas para analizar la estructura del conocimiento matemático institucional e individual. Como consecuencia de tal acierto y debido a que en la presente investigación se necesitará de dicho análisis, es que se expondrán a continuación algunos puntos de vista relacionados con los conceptos que se tomarán como pautas teóricas a seguir.

La TFS asume que un concepto es un emergente (una idea) del sistema de prácticas significativas realizadas por alguien (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones problemáticas, tareas o disposiciones del entorno (Godino y Batanero, 1994, p.23).

En la idea anterior se expresa que los conceptos son un resultado de la actividad, pero estos autores no precisan la diferencia entre esta forma del pensamiento abstracto y otras que también son constitutivas del reflejo mediato de la realidad.

Los conceptos se forman como resultado de un proceso de abstracción-generalización a partir de un conjunto de objetos (materiales o ideales) que tienen una característica común como mínimo, al cual se le llama clase.

El proceso de abstracción (Mederos y Martínez, 2002, p.5) se caracteriza por:

- La determinación de un conjunto de rasgos abstractos comunes para los objetos de una clase inicial.
- La no consideración de rasgos particulares variables de los objetos de la clase inicial.

Por otra parte, el tránsito del encuentro de rasgos de un objeto individualizado a su determinación y separación en una clase inicial de objetos similares, y la utilización de una palabra para nombrar a todos los objetos que poseen esos rasgos comunes, y sólo esos objetos, que por lo general forman una clase más amplia que la inicial, se denomina proceso de generalización (Mederos y Martínez, 2002, p.5).

A esa clase que se forma como resultado de los procesos de abstracción y generalización se le llamará en lo adelante clase reflejada por el concepto.

Esta manera de concebir los conceptos permite evadir la teoría de la generalización empírica (Davídov, 1988, pp.113-114), según la cual los rasgos que identifican externamente a los objetos se igualan a los rasgos esenciales que han de utilizarse para la formación del concepto. Tal forma de interpretación conduce a prácticas docentes nefastas, en las que se presta poca atención a las situaciones a partir de las cuales emergen los conceptos y desde principio se hace énfasis en el trabajo con entidades abstractas. En este sentido, Mederos (2002) ha señalado que “La Enseñanza Matemática debe apoyarse más en la experiencia y en la manipulación de los objetos de donde surge para, mediante aproximaciones, llegar a su construcción formal” .

Los elementos de las clases que se reflejan por los conceptos matemáticos se forman a partir de otras clases que pueden denominarse universos. Así, el concepto de número natural primo es el reflejo de una clase cuyos elementos se obtienen a partir del universo de los números naturales; el concepto de rectas paralelas es el reflejo de una clase cuyos elementos son pares ordenados tomados del universo de las rectas; el concepto de ángulo inscrito en una circunferencia es el reflejo de una clase cuyos elementos son pares ordenados tomados de los universos de las circunferencias y de los ángulos, respectivamente.

Los conceptos que reflejan clases cuyos elementos son pares, tríos o en general n-uplos ordenados, los cuales se forman tomando elementos de uno o varios universos, corresponden a relaciones. Así los conceptos de rectas paralelas y de ángulo inscrito en una circunferencia corresponden a relaciones, mientras que el de número primo no tiene esta característica.

Los conceptos de rectas paralelas y de ángulo inscrito en una circunferencia, ambos de relaciones, se diferencian en que el primero refleja una clase de pares ordenados cuyos componentes pertenecen al mismo universo, mientras que en el segundo, que también refleja una clase de pares ordenados, los elementos de los pares de la clase pertenecen a distintos universos. Estos dos tipos de conceptos agregando los que no corresponden a relaciones, son los que aparecen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel medio[11] (Ruiz, 2002) (tabla 1, p.24).

Dos conceptos del tipo I que reflejan clases que se forman con objetos del mismo universo se llaman conceptos colaterales, si las clases que ellos reflejan tienen elementos comunes y elementos no comunes; y conceptos subordinados, si una de las clases es un subconjunto propio de la otra (Jungk, 1979, p.59).

[11] Se refiere a los conceptos que no son conceptos primarios.

Tabla 1		
Número de universos	**Número de componentes de los elementos de la clase que refleja el concepto**.	
	Una componente	Más de una componente
Un universo	La clase es una parte del universo (Concepto del tipo I)	La clase contiene como elementos a n-uplos ordenados de miembros del universo (Concepto del tipo II)
Varios universos	Caso imposible	La clase contiene como elementos a n-uplos ordenados de miembros de los universos. (Concepto del tipo III).

A los efectos de facilitar la comunicación en los marcos de esta tesis, se introducirá una relación entre dos conceptos para la cual las anteriores son casos particulares. Se dirá que dos conceptos están **emparentados** en cualquiera de los siguientes casos:

i) Existe (al menos) un universo común para la selección de alguna de las componentes de los elementos de las clases que reflejan ambos conceptos.

ii) No existe un universo común, pero la intersección entre dos universos de ambas clases es no vacía.

De acuerdo con lo anterior, los conceptos que intervienen en la relación de subordinación y de colateralidad están emparentados. Pero también están emparentados conceptos como los que forman los pares “punto medio de un segmento y segmentos iguales”, “potencia de un número real positivo y razón entre dos segmentos”, “divisor de un número natural y razón entre dos segmentos”.

Los conceptos tienen en el pensamiento lógico doble función. La primera consiste en ser un medio para la comprensión de los juicios (proposiciones), la segunda se refiere a que expresan la suma de conocimientos de una ciencia. El concepto como resultado es una idea compleja, es la suma de un conjunto de juicios e inferencias anteriores que determinan tanto los elementos esenciales del objeto como las propiedades de éste (Mederos y González, 2000, p. 3).

En la manera en que varios psicólogos y didactas han descrito los conceptos o el proceso de su asimilación se observa la intención de destacar la segunda función de éstos. Así Talízina (1988, p.155) hace mención a tres etapas para la asimilación de los conceptos, definiendo la tercera como la etapa de la "la deducción de las consecuencias". Sobre la necesidad de la misma plantea:

> "El concepto no puede considerarse formado íntegramente si el sujeto que lo domina no puede cumplir la acción de la deducción de las consecuencias que presupone la asimilación de todo el sistema de propiedades sustanciales de los objetos de la clase dada, y no sólo de las suficientes para reconocer estos objetos".

El punto de vista anterior puede ser interpretado, para el caso de los conceptos matemáticos escolares, en que el estudio de muchos teoremas tiene como objetivo cumplir con esta tercera etapa. Por ejemplo, el estudio de los Teorema de las Transversales y de Pitágoras, puede enmarcarse en la tercera etapa del estudio de los conceptos de "segmentos proporcionales" y de "triángulo rectángulo", respectivamente.

Rubinstein (1977, p. 380) destaca también la función totalizadora del concepto cuando afirma:

> "El contenido específico del pensamiento es el concepto. Es el conocimiento mediato y general del objeto. Se forma por el hecho de captar las vinculaciones y relaciones más o menos esenciales y objetivas del objeto".

En este mismo sentido, Vergnaud (cit. por Godino y Batanero, 1994, p.23) considera que un concepto es una terna cuya primera componente es el conjunto de situaciones que lo hacen significativo. La segunda y tercera componentes de la terna son el significado y el significante del concepto. Llama la atención, en este caso, el hecho de que también determinadas situaciones sean parte del concepto.

A todo concepto matemático están asociados un nombre, la extensión y el contenido.

El nombre de un concepto es la palabra o combinación de palabras que lo designan. Por ejemplo, la clase de todos los objetos que sirven para medir el tiempo se refleja mentalmente como el concepto que tiene el nombre de “reloj”.

En general se cumple que para cada concepto existe un nombre, pero el mismo nombre puede designar a varios conceptos en ramas diferentes y en una misma rama de una ciencia.

En el caso específico de la Matemática, junto con el nombre de un concepto, se utiliza generalmente un símbolo para designarlo o denotarlo. Así se pasa del lenguaje de los conceptos al lenguaje de los símbolos.

La ***extensión*** de un concepto obtenido como reflejo de una clase E, es la clase E. Así, por ejemplo, la extensión del concepto “número natural par” es el conjunto de todos los números naturales divisibles por 2, es decir, el conjunto {0;2;4;…}, y la extensión del concepto “adición en N”, es el conjunto de todos los tríos (a, b, c) de números naturales tales que c = a + b.

El ***contenido*** de un concepto está muy relacionado con las características o atributos que permiten diferenciar los miembros de su extensión de los objetos que no le pertenecen.

Un conjunto de características comunes a todos los elementos de la extensión de un concepto que permitan, **tomándolas todas a la vez**, distinguirlos de los miembros de otras clases e identificarlos, se llamará en lo adelante un *sistema de características esenciales* (necesarias y suficientes) o un *sistema esencial* de la clase que refleja el concepto[12].

Aunque existen distintos puntos de vista para conceptuar el contenido de un concepto (Ballester y otros, 1992, p. 282; Jungk, 1978, p.58), en este trabajo se asumirá que el contenido de un concepto es el **conjunto de todos los**

[12] A cada una de las características que conforman un sistema esencial le llama Guétmanova (p. 58) un indicio sustancial.

sistemas esenciales de la clase reflejada por él. La razón fundamental de esta concepción es enfatizar en la función totalizadora del concepto, pues así el contenido constituye una especie de punto de acumulación de información en torno a dicho concepto.

De acuerdo con la definición adoptada para el contenido, nunca se puede afirmar que éste se conoce totalmente, lo que concuerda con la teoría materialista-dialéctica del conocimiento, según la cual la esencia de los objetos se conoce sólo de forma aproximada, pues es un proceso infinito que se profundiza. También tal idea se corresponde con una tendencia de la psicología cognitiva que ha tomado auge (Godino y Batanero, 1994, p.4), según la cual con un sistema esencial de la clase que refleja el concepto, éste no debe quedar determinado completamente.

Para definir un concepto se busca un primer sistema esencial de la clase que él refleja, al cual llama Bunge **núcleo intensional** (cit. por Godino y Batanero, 1994, p. 22). Tal núcleo constituye una definición de trabajo del concepto y cualquier otro sistema esencial que se busque es una caracterización del mismo, que refleja una profundización de su conocimiento, lo que se puede enmarcar en la tercera etapa precisada por Talízina.

La función totalizadora de los conceptos matemáticos permite utilizarlos como unidades para el análisis[13] a priori del conocimiento institucional que se pretende enseñar en la escuela y de los conocimientos personales que adquiere el alumno como resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje (análisis a posteriori).

Debido a que los conceptos aparecen como un elemento de la tipología de objetos elementales utilizada para el estudio de las funciones semióticas, y que hay elementos de esta tipología que incluyen el nombre y notación de los conceptos y los elementos de su extensión (lenguaje), las proposiciones y argumentaciones-validaciones donde están involucrados, las situaciones de donde emergen (situaciones-problemas), los procedimientos que les están relacionados (acciones), entonces falta por incluir a los sistemas de propiedades que pueden utilizarse como núcleos intensionales.

[13] Descomposición del conocimiento institucional en elementos que faciliten su estudio.

En consecuencia de lo anterior, el análisis del conocimiento institucional (a priori), que se ejemplificará en el epígrafe 2.2, conlleva básicamente a identificar o precisar los elementos lingüísticos, situacionales, actuativos, intensionales, proposicionales y argumentativo-validativos que aparecen asociados a cada concepto que se pretende enseñar.

1.1.3. Relación entre las nociones de conocimiento y de contenido como categoría didáctica.

Las dimensiones institucional y personal del conocimiento introducidas por la TFS permiten establecer una diferenciación entre contenido (como categoría didáctica) y conocimiento, y a la vez relacionar estos conceptos. La categoría de contenido se describe por Coll (cit. por del Carmen, p.74) como “el conjunto de formas culturales y de saberes seleccionados para formar parte de las distintas áreas curriculares en función de los objetivos generales de área”. Estos contenidos pueden ser hechos discretos, conceptos, principios, procedimientos, valores, normas lo que indica que la categoría contenido se refiere, como afirma Díaz-Barriga (p.112), a lo que se va a enseñar.

Por tanto, el contenido incluye la dimensión institucional del conocimiento, pero no se identifica con ella, pues en el contenido se contempla también la cuestión axiológica que no forma parte del conocimiento. En una tipología descrita por Del Carmen (p. 112), se habla de tres tipos de contenidos: conceptuales, procedimentales y actitudinales. Los últimos incluyen a los valores, normas y actitudes.

La diferenciación planteada por la TFS entre las dimensiones individual e institucional del conocimiento y la dialéctica de la relación entre ambas (Godino,2001 a, p. 2) en el proceso docente-educativo, permiten afirmar que los contenidos de tipo axiológico deben aparecer como resultado de la acción pedagógica planificada del docente a partir del aprovechamiento de las potencialidades que brinda la actividad matemática que realiza el alumno en la institución cuando asimila y fija el conocimiento.

Los contenidos de tipo axiológico no forman parte del conocimiento, sino que surgen a partir de éste como resultado de la aplicación de los métodos que utiliza el (la) docente en la dirección del proceso docente-educativo. Por eso, a lo que en muchos programas docentes se le llama contenidos, debiera llamársele conocimientos institucionales. Los contenidos de tipo axiológico deben explicitarse en otras secciones del programa como los objetivos y las orientaciones metodológicas o dedicar un acápite a este fin.

1.1.4. Caracterización del concepto de integración de conocimientos matemáticos.

La revisión bibliográfica realizada por el autor de la presente investigación confirma que la noción de integración se utiliza en la didáctica de la Matemática y en general en las ciencias pedagógicas de modo informal o con un sentido intuitivo o pre-teórico.

El concepto de integración en las matemáticas, muy relacionado con el de suma, está claro para los especialistas en la materia, pues existe una definición científica del mismo aceptada como satisfactoria. No sucede algo similar con el concepto del mismo nombre que se utiliza en la didáctica, pues ya en este campo hablar de suma resulta bastante impreciso, razón por la cual hay que partir del significado que tiene en nuestro idioma la palabra integración para lograr una caracterización satisfactoria del concepto que ella designa.

En la Enciclopedia Encarta 2000 se precisa que la integración es la acción o el efecto de integrar, es el proceso de ***unificación*** de varias entidades, la coordinación de las actividades de varios órganos. En esta misma fuente se señala, que integrar es “hacer entrar”, es incorporarse a un grupo para formar parte de él.

Algunas regularidades que se pueden derivar de estas descripciones son:

- La integración además de un resultado, es un proceso.
- En la integración la obtención del resultado exige que determinados elementos pasen a formar parte de un “conjunto” en el que inicialmente no se conocía que estaban incluidos. Aquí se aprecia la necesidad de la búsqueda de relaciones entre los elementos que el “conjunto” contenía y los nuevos a incluir desde el punto de vista de quien realiza la acción.
- En el proceso de integración se ponen de manifiesto relaciones entre los objetos ya existentes, es decir, se trata de unir objetos que ya existen.

Por otra parte, en el diccionario enciclopédico Grijalbo (1998) se señala que integrar es ***unir*** las partes que constituyen un todo y que la integración es la acción o el efecto de integrar.

La unión de partes para formar un todo implica que cada una es un complemento de las otras o el complemento de la unión de algunas de ellas, lo cual indica que la integración tiene como fin la complementación, respecto al todo, de los objetos que se integran.

Teniendo en cuenta las acepciones que reservan los diccionarios de nuestra lengua, el propio significado que tiene la palabra integración en la Matemática y la manera en que se ha conceptuado la noción de conocimiento en 1.1.1, es preciso postular que en la integración de conocimientos matemáticos (sin tener en cuenta el componente subjetivo) están implicados los elementos siguientes:

- Un objeto que hace la función de punto de acumulación de conocimientos al cual se le llamará en lo adelante **interobjeto** (O_I).

- Un conjunto de conocimientos de determinado tipo cuya relación debe ponerse de manifiesto en torno al interobjeto (C_1, C_2, ..., C_n).
- Un conjunto de referencia al cual pertenecen tanto el interobjeto como los conocimientos que han de relacionarse (S).

En la Fig. 1 se expresa gráficamente (de forma simplificada) la idea anterior para n=4. Los puntos en el gráfico representan otros conocimientos existentes en el conjunto de referencia S, que más que conjunto es un sistema en el sentido en que lo conceptúa Morin (cit. por Batanero, p.3), pues contiene un conjunto de elementos (composición), tiene su entorno (otros conjuntos de referencia que interactúan con él) y posee una estructura (conjunto de relaciones internas y externas de los conocimientos del sistema).

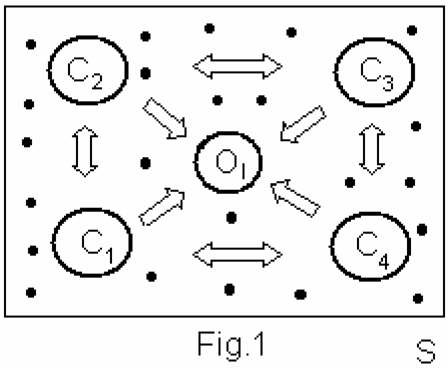


Fig.1

El sistema S puede tener un carácter individual o institucional, según se refiera a la cognición individual o institucional, respectivamente.

Si a la lista anterior se le agregan los componentes personales del proceso docente- educativo, aparecen otros cuatro elementos implicados en la integración de conocimientos:

- Un agente discente: el alumno o alumna (A).
- Un agente docente: el profesor o profesora (P).
- Un elemento que expresa la intención del docente en relación con el discente que, en este caso, se concreta en el tipo o tipos de

conocimientos donde se pondrá el énfasis para que el alumno realice la integración (TC).

- Un elemento donde se concreta el medio que utilizará el profesor para involucrar al alumno en el proceso de integración: la tarea docente (T).

La tarea se ha planteado como el medio, debido a la necesidad de que la integración esté guiada por un sistema de acciones que se subordinan a la tarea, pues como señala Talízina (p. 150): “Basándonos en la comprensión de la psiquis como actividad, llegamos inevitablemente a la conclusión de que cualquier imagen- sea percepción, representación o concepto- debe estar relacionada con un determinado sistema de acciones”.

Desde el punto de vista de la Pedagogía, Álvarez de Sayas señala (1998, p.32) que “el proceso docente-educativo se desarrolla por etapas o eslabones dentro del tema. En cada uno de ellos debemos desarrollar tareas que permitan ir venciendo dichos eslabones. El logro de los objetivos operativos de las tareas nos irá acercando al cumplimiento de los distintos eslabones”.

El hecho de que se ponga el énfasis en un tipo particular de conocimiento no indica que en la integración no participen conocimientos de otros tipos. Así, por ejemplo, si se quieren integrar conocimientos procedimentales, el énfasis está en los procedimientos, aunque en los mismos estén implicados el resto de los tipos de conocimientos.

El resultado cognitivo de la integración es un nuevo conocimiento que tiene un carácter sistémico, pero también durante este proceso los alumnos fortalecen sus valores y actitudes frente a la resolución de la tarea que se utiliza como medio, cuestión que ha sido abordada por Sigarreta (2001) en su tesis y que también está presente explícitamente en el diseño curricular de la escuela media de países como España (CAG, 1993).

Con todos los elementos esbozados es posible definir la **integración de conocimientos matemáticos** como un proceso necesario[14] dirigido por el (la) docente utilizando como medio una tarea y ejecutado por los alumnos y alumnas, y que está orientado a la **complementación** de los conocimientos individuales o institucionales de uno o varios tipos mediante la puesta de manifiesto de relaciones existentes entre los mismos en torno a un elemento aglutinador llamado interobjeto. El resultado de este proceso se concreta en un nuevo conocimiento de tipo sistémico y en el fortalecimiento de los valores y actitudes emergentes de la actividad de resolución de la tarea.

En vista de que la integración de conocimientos es un proceso dirigido por el profesor y ejecutado por los alumnos, no puede darse al margen del proceso de enseñanza-aprendizaje, o sea, que forma parte de él.

Otra consecuencia que se deriva de la definición de integración de conocimientos es el carácter subjetivo (su carácter individual) de este proceso al ser ejecutado por los alumnos, pues aunque los conocimientos sistémicos existen objetivamente (en el marco institucional), ello no implica que en su faceta individual se pongan de manifiesto todas las relaciones que existen en la faceta institucional. Cuando Edith Moraes (2001), haciendo mención a la función de el (la) docente, afirma que “la integración de saberes pre-existe a la acción didáctica”, se refiere a la dimensión institucional de los conocimientos y no a la individual.

[14] En el epígrafe 1.3 se fundamentará la necesidad de este proceso.

Hay que señalar que la manera en que se ha definido la integración, la resolución de una tarea juega el papel de medio para conseguir ese fin.

Según la definición de integración que se acaba de exponer, el interobjeto puede ser cualquier objeto elemental de los que forman la tipología expuesta en 1.1.1, por ejemplo, puede ser un concepto, un procedimiento, una proposición, etc. De igual manera, deja abierta la selección del tipo o tipos de conocimientos que se deben integrar. De esta forma se pueden integrar conocimientos conceptuales, procedimentales, proposicionales, situacionales, argumentativo-validativos, etc.

En la definición también queda abierta la posibilidad de que los conocimientos que se integran provengan de distintas áreas de la Matemática o de la misma área.

Con la definición dada de la integración de conocimientos se pueden cumplir con las distintas funciones de los conceptos explicadas en el epígrafe 1.1 y especialmente con la función de expresar los conocimientos acumulados.

La definición dada no se contradice con otras descripciones que han ofrecido algunos autores como Valencia (1990, p. 19) en los marcos de un curso de Geometría Analítica quien señala que “Integrar un conocimiento significa, en este caso, relacionarlo con otros conocimientos, buscando semejanzas y diferencias, tratando de incluirlo en estructuras más generales”.

De la misma manera se pronuncia Edith Moraes (2001), que se concentra en el marco estrecho de los conceptos, cuando afirma que “Entonces, relacionar, establecer nexos, organizar jerárquicamente conceptos a lo interno de cada disciplina e interdisciplinariamente es integrar conocimientos”.

El modelo de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991) sobre el aprendizaje de la Geometría que concibe cinco fases para cada uno de los niveles de razonamiento, incluye una que se refiere a la integración de los conocimientos adquiridos por los alumnos entendida como "acumulación de las cosas que ya conoce" (p.55), lo cual concuerda con la definición que se ha dado para este proceso en la presente tesis.

La tabla 2 refleja las posibilidades que pudieran existir, en principio, para la integración de conocimientos cuando el interobjeto es uno de los objetos elementales y se hace énfasis en la integración de conocimientos elementales de un solo tipo[15]. Esta tabla de hecho refleja, distintos tipos de funciones semióticas sistémicas que se pueden formar tomando como contenido cada uno de los objetos matemáticos elementales.

Esta tabla y otras que se pudieran confeccionar considerando combinaciones para el interobjeto o para los tipos de conocimientos en que se quiere hacer el énfasis, como se podrá apreciar en el epígrafe 1.4, tienen una función metodológica similar a la tabla periódica para los elementos químicos.

[15] Los números en las celdas permitirán poder referirse a las mismas en otros momentos de la exposición.

Tabla 2

O_I / TC	Lenguaje	Situación	Concepto	Proposición	Procedim.	Argumen.- validación
Conoc. Lingüístico-notac.	1	2	3	4	5	6
Conoc. Situac.	7	8	9	10	11	12
Conoc. concep.	13	14	15	16	17	18
Conoc. propos.	19	20	21	22	23	24
Conoc. procedim.	25	26	27	28	29	30
Con. argum.- validativos	31	32	33	34	35	36

Necesidad de la integración de los conocimientos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el preuniversitario.

La necesidad de la integración de conocimientos ha sido analizada por autores de distintas líneas de pensamiento en Didáctica de la Matemática; podría decirse que es uno de los temas, junto a la resolución de problemas, en que hay consenso de su pertinencia en el proceso de enseñaza-aprendizaje de la Matemática.

En la MEM la integración de conocimientos no se ha abordado explícitamente. Sin embargo, se plantea que el trabajo en la adquisición de nuevos conocimientos en la enseñanza, transcurre fundamentalmente en dos fases que se complementan: la búsqueda del conocimiento y el aseguramiento del conocimiento (Jungk, p.71).

En la fase de aseguramiento del conocimiento se incluye la función didáctica fijación que adopta distintas formas, una de las cuales es la sistematización.

Ballester (1999, p.25) explica que:

> "la sistematización ... se comprende como una forma de la fijación cuyo objetivo fundamental es estructurar un sistema de conocimientos **mediante** comparación de las características que destacan lo **esencial** del saber adquirido por los alumnos y de lo que pueden realizar con él. Su realización está estrechamente vinculada al análisis de propiedades comunes y diferentes, y al establecimiento de nexos entre los conocimientos, que eventualmente pudieran parecer aislados, hasta organizarlos en un sistema".

La descripción anterior no puede considerarse una definición del concepto sistematización[16]; porque la fijación es, a la vez descrita, utilizando este último (Ballester y otros, p.128) .

También Jungk (p. 117) se refiere a las características que resaltan la importancia y necesidad de la sistematización cuando señala:

> "En esta forma de fijación se trata de comparar y destacar el poder y el saber adquiridos. En esto se analizan propiedades comunes y diferentes y se hacen visibles las relaciones entre los diferentes componentes del saber, que puede comprenderse mejor. Se construye todo un sistema de conocimientos".

Es fácil observar que la sistematización planteada por la MEM, al hacer referencia al establecimiento de relaciones entre los saberes adquiridos y a la obtención de un conocimiento sistémico, tiene puntos de contacto con la integración de conocimientos definida en el epígrafe 1.1 de esta tesis. Tal apreciación también la comparten todos los profesores de Matemática y Ciencias Pedagógicas de varias universidades que fueron encuestados por el

[16] En una revisión hecha por Orellana (2002) en una muestra amplia de la literatura pedagógica no se encontró una definición de este concepto.

autor de este trabajo (anexo 3) para conocer sus opiniones acerca de la relación entre los conceptos de integración y sistematización.

Hay que señalar también, que no es posible identificar la sistematización y la integración de conocimientos, pues mientras en la primera se persigue como objetivo fundamental estructurar un sistema de conocimientos, en la segunda se persigue como objetivo la complementación de los conocimientos adquiridos. En la primera se declara como medio la comparación, en la segunda la tarea docente. En la primera no se habla de un elemento aglutinador, en la segunda se declara la existencia de tal elemento.

En cuanto a la importancia y necesidad de la sistematización en el preuniversitario señalan Ballester y otros (p.141):

> "La sistematización toma gran significación en el preuniversitario, donde se perfeccionan y profundizan los conocimientos sobre conceptos matemáticos importantes tales como número, y función, se sistematizan las propiedades geométricas estudiadas. En este ciclo la nueva materia se desarrolla estrechamente relacionada con toda la materia de los grados anteriores".

En la década del 80 por iniciativa del NCTM[17] de los Estados Unidos de Norteamérica fueron desarrollados los llamados Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática que se publicaron por primera vez en 1989. En su elaboración se materializó el esfuerzo de cuatro grupos de trabajo durante tres años. Posteriormente se han elaborado varias versiones de los mismos que se han difundido y publicado ampliamente por el mundo.

En estos documentos se ha señalado que "Un estándar es una afirmación-declaración que puede ser utilizada para juzgar la calidad de un currículo

[17] National Council of Teachers of Mathematics.

matemático[18] o de métodos de evaluación. Así, los estándares son declaraciones de principio sobre qué tiene valor y qué no lo tiene" (NCTM, 1989, p. 2).

Los Estándares han tenido un gran impacto en la Matemática Educativa de muchos países del mundo y en general hay una opinión favorable sobre su contenido.

Hay uno de los Estándares que se refiere a las **conexiones.** En los documentos emitidos por el NCTM no se define este término, pero en ellos se indica que el estándar hace énfasis en la importancia de las conexiones entre los temas matemáticos y entre éstos y otras disciplinas y se precisa que:

> "Las conexiones son un tema central de los Principios y Estándares para la Matemática Escolar. Los estudiantes desarrollan un entendiendo mucho más rico de la Matemática y sus aplicaciones cuando ellos pueden ver los mismos fenómenos desde perspectivas matemáticas múltiples[19]" .

En estos planteamientos se percibe la importancia y necesidad que se le atribuye a las conexiones. En un análisis de los Estándares del 2000 (NCTM, 2000) se pueden leer aseveraciones como las siguientes, que se refieren a la necesidad e importancia de las conexiones intramatemáticas:

- "La comprensión por los estudiantes de las conexiones entre las ideas matemáticas facilita su habilidad para formular y deductivamente verificar conjeturas en el estudio de los temas".
- La instrucción matemática que se dirige a las redes de ideas matemáticas y no solamente a los nodos de las redes en forma aislada, servirá para instilar en los estudiantes una comprensión y apreciación del poder y la "belleza" de las matemáticas".

---

[18] Aquí se entiende por currículo un "plan operativo para la enseñanza en el cual se describe detalladamente lo que tienen que saber los alumnos, como pueden lograrse las metas curriculares, que tienen que hacer los maestros para ayudar a los estudiantes a desarrollar su conocimiento matemático y el contexto en el cual ocurre el proceso de enseñanza-aprendizaje" (Wenzelburger, 1990 b, p. 67).

[19] La traducción corresponde al autor de la presente tesis.

- “El desarrollo de la matemática como un todo integrado también sirve para aumentar el potencial para la retención y la transferencia de ideas matemáticas”.
- Los problemas importantes o interesantes no vienen con etiquetas como "la geometría," "el álgebra," o "la probabilidad”.

Un análisis de tales planteamientos nos lleva a afirmar que las conexiones intramatemáticas se refieren a la integración de los conocimientos tal y como se ha definido este concepto en el epígrafe 1.2.

Sin duda, en el aprendizaje de la Matemática deben predominar los significados por encima de los hechos aislados. En los principios del aprendizaje significativo[20] subyace la idea del establecimiento de relaciones entre los conocimientos que se asimilan y los adquiridos con anterioridad (Pérez, p.85,1994;Del Carmen, p.66, 1999). Pozo señala al respecto que “no basta sólo con reproducir información nueva, también hay que asimilarla o **integrarla** en nuestros conocimientos anteriores. Sólo así comprendemos y sólo así adquirimos nuevos significados o conceptos” (1992, p.35).

Con relación la necesidad de la integración de los conceptos explica Coll (1992, p.23):

> “Una característica fundamental de los conceptos científicos es que están relacionados con otros conceptos, de forma que su significado proviene en gran medida de su relación con esos otros conceptos”...”Para aprender un concepto es necesario,..., establecer relaciones significativas con otros conceptos. Cuanto más entretejida esté la red de conceptos que posee una persona en un área determinada, mayor será su capacidad para establecer relaciones significativas y por tanto para comprender los hechos propios de esa área”.

Varios investigadores han señalado que una de las causas del aprendizaje mecanicista de la Matemática es la falta de integración de los conocimientos

[20] La idea central de este tipo de aprendizaje la ofrece Pozo (1992, p. 35) cuando dice: “se trata de un proceso en el que lo que aprendemos es el producto de la información nueva interpretada a la luz de lo que ya sabemos”.

que el alumno posee. A partir de un análisis de los resultados de distintos estudios señala Wenzelburger (1990 a, p. 48):

> "Por un lado, los contenidos matemáticos que se enseñan están divididos en tópicos y subtópicos los cuales se practican por separado. Otro factor es que no se toma en cuenta la relación que existe entre ideas ya conocidas y conceptos nuevos".

En el mismo sentido afirma Del Carmen (1999, p.18) que "Cuando los distintos contenidos son presentados por separado, sin poner énfasis en sus relaciones, se corre el riesgo de favorecer una visión fragmentada de los contenidos y de su enseñanza".

El propio investigador suizo Jean Piaget dio gran importancia al establecimiento de relaciones para el desarrollo del pensamiento al definir la lógica de éste como el sistema de relaciones que le permiten al sujeto coordinar sus puntos de vista entre sí y con los puntos de vista de los demás (p. 58).

Varios representantes de la TAD (Fonseca y Gascón, 2002 a, p. 4, Bosch, 2000, p.3) han enfatizado en la necesidad de la integración de los conocimientos sobre la base de la construcción de organizaciones matemáticas locales, regionales y globales a partir de praxeologías puntuales (PP). Gascón y Fonseca explican que **la razón de ser** de las organizaciones matemáticas locales es "poder dar respuesta satisfactoria a un conjunto de *cuestiones problemáticas* que no se podían resolver completamente en ninguna de las PP de partida" (2000, p. 1). Es decir, la necesidad de integrar conocimientos surge como una respuesta a la resolución de cuestiones problemáticas que no se pueden abordar con el conocimiento fragmentado.

Algunos investigadores de la TAD se han preocupado por la integración de los conocimientos en el preuniversitario. Así, en un estudio realizado por Fonseca y Gascón (2002 a), con el fin de contribuir a suavizar o disminuir las dificultades que se encuentran los alumnos para "pasar de estudiar matemáticas en la Secundaria[21] a estudiar matemáticas en la Universidad", obtuvieron como principal conclusión que constituye una "necesidad ineludible" la reconstrucción de organizaciones matemáticas locales que permitan flexibilizar e integrar las organizaciones matemáticas que se estudian en la Secundaria (p. 11); lo que indica que en este nivel de enseñanza resulta imprescindible la integración de los conocimientos para que los alumnos que egresan de él estén en condiciones de enfrentar los estudios universitarios en muchas carreras.

Como se observa, distintos investigadores e instituciones han planteado la necesidad de la integración de conocimientos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, algunos de forma general y otros en el caso particular de la Matemática. El autor de la presente investigación concuerda con estos criterios y precisa de la necesidad de concretarlos en cada una de las clases que se imparten, para lo cual hay que hacer un análisis de las características del objeto de esta investigación: el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el décimo grado.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el décimo grado en Cuba.

Varios autores (Godino, 2001b, p. 4; Peltier, 1993, p. 5) han señalado que en el proceso de enseñanza-aprendizaje como sistema didáctico se pueden identificar tres elementos fundamentales:

- El contenido a enseñar (O).

[21] En España la Secundaria incluye lo que en Cuba llamamos preuniversitario.

- Los alumnos y alumnas (X) que se proponen estudiar O.
- El (la) docente (Y) que dirige y ayuda al estudio de O por parte de X.

Se pretenden describir en el presente epígrafe estos elementos fundamentales del sistema didáctico para el décimo grado y relacionarlos con la necesidad y posibilidad de la integración de conocimientos.

1.3.1. El contenido a enseñar.

El contenido a enseñar en el preuniversitario a partir del curso 01- 02 ha sufrido algunas transformaciones con relación a cursos anteriores, debido a los cambios curriculares operados en la Secundaria Básica (SB). Esto ha traído como consecuencia que en la actualidad existan nuevos programas docentes para ese nivel de enseñanza y que se tengan que utilizar libros que fueron hechos para la SB en el desarrollo de algunos temas. También hay contenidos que no aparecen en los textos actuales (de la SB o el “pre”) o que aparecen tratados con un enfoque diferente al que se pretende utilizar, y hay que desarrollarlos utilizando otra bibliografía.

La estructura del Programa de la asignatura Matemática para el décimo grado (anexo 6), está compuesta por: introducción, plan temático, sistema de conocimientos por unidades y precisiones metodológicas.

En las tres primeras unidades del programa, además de los contenidos del grado, están presentes la mayoría de los conocimientos geométricos, aritméticos y algebraicos tratados en grados precedentes. Esto indica que en este grado los alumnos deben apropiarse de conocimientos sistémicos mediante un proceso de integración, lo cual ha sido señalado en las pautas metodológicas que aparecen en la introducción del Programa.

En el Programa no se hace énfasis en el componente axiológico del contenido, el cual no aparece explícitamente, que es de hecho una de sus limitaciones. En él sólo aparecen los otros componentes que conforman lo que se ha llamado en 1.1.3 conocimiento institucional.

1.3.2. Los alumnos y alumnas del décimo grado.

Los alumnos y alumnas que ingresan al preuniversitario en Cuba, lo hacen con una edad entre los 14 ó 15 años, es decir, que en su desarrollo psíquico se encuentran en una etapa en que la adolescencia comienza a dar paso a la juventud.

Aunque como señala Gesell (1968, p.44), "no hay dos individuos que experimentan la misma situación de la misma manera", sí hay ciertas regularidades comunes para todos los individuos de desarrollo normal de una determinada edad.

Los sujetos que ingresan al preuniversitario en Cuba (MINED, 1989, pp. 1-5) se caracterizan por:

- En ambos sexos hay aumento del peso corporal y los varones tienden hacia el completamiento de su desarrollo sexual.
- En la actividad intelectual predomina el razonamiento y el pensamiento independiente y creador.
- Tienden a emitir juicios sobre las cosas, realizar apreciaciones de carácter polémico y defender con pasión sus puntos de vista.
- Con respecto a edades anteriores, existe una mayor estabilización de los motivos, intereses y puntos de vista propios que empiezan a determinar la conducta y actividad en el medio social.
- Se busca en la comunicación con los compañeros fundamentalmente la relación personal, íntima y de amistad hacia los que se siente confianza y

a los que les unen afinidad de interés y criterios sobre diferentes cuestiones.

- Necesitan ayuda y comprensión, pero también buscan autonomía y decisión propia.

En distintas investigaciones psicológicas realizadas en Cuba (Labarrere y otros, 1995; Rodríguez y Bermúdez; 1996) se ha comprobado que los escolares cubanos cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años se caracterizan por:

- Trazarse expectativas a largo alcance, en ocasiones por encima de sus posibilidades reales.
- Los contextos de más relevancia significativa son la familia, el estudio y la pareja, en ese orden.
- Bajo nivel de dominio de la habilidad para resumir textos debido a dificultades con la determinación de lo esencial.
- El carácter fragmentado de los juicios elaborados.
- Bajo nivel de dominio de la generalización en el plano teórico y en general del pensamiento teórico.
- Poseen las condiciones de madurez para desarrollar la función metacognitiva de la personalidad, pero esta función se encuentra en un estadio de desarrollo muy bajo.

Como se señaló en la Introducción de esta tesis, el carácter fragmentado de los juicios de los escolares de estas edades también ha sido detectado por García (2001), en su trabajo de diploma.

1.3.3. Los profesores y profesoras del preuniversitario.

El claustro de profesores de los preuniversitario de la provincia Sancti Spíritus es en la actualidad bastante heterogéneo. En algunos centros predomina la estabilidad de docentes de experiencia, pero en otros esta fuerza fluctúa de un curso a otro, lo que ha traído como consecuencia que en algunos casos se ubiquen en estos planteles recién graduados de la carrera Matemática-Computación formados en el ISP de la provincia.

También en algunos preuniversitarios imparten docencia estudiantes de los últimos años de la carrera mencionada, en cumplimiento de su práctica docente.

A partir de los resultados de las visitas a los preuniversitarios, del trabajo de la Comisión Provincial y Comisiones Municipales de Matemática, de los intercambios con metodólogos del área de Ciencias Exactas y de la revisión de los Planes de Estudio y de Superación, y otros documentos; el autor de esta investigación han podido determinar un conjunto de debilidades y fortalezas que caracterizan la preparación o desempeño de una parte del claustro de profesores y profesoras de Matemática del nivel preuniversitario en la provincia de Sancti Spíritus.

Debilidades.

- Poca experiencia en el trabajo en el nivel de enseñanza.
- Baja utilización de métodos propios del trabajo científico para resolver los problemas relacionados con la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Baja participación en cursos de superación y de postgrado.
- Formación en Didáctica de la Matemática centrada en un solo enfoque.
- Bajo nivel de actualización en su formación didáctica.
- Demasiado apego al libro de texto en la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Prestan poca atención al diseño de la integración de conocimientos en el proceso que dirigen.

Fortalezas.

- Interés y motivación por elevar los resultados del trabajo en el proceso docente-educativo.
- Habilidades comunicativas para trabajar en grupo.
- Expectativas por conocer las transformaciones de los niveles de enseñanza precedentes.
- Interés por el dominio del contenido que imparten.

Estas fortalezas y otras que están presentes en otros elementos que influyen en el proceso docente-educativo del preuniversitario en las condiciones actuales en nuestro país, propician factores a favor de eliminar paulatinamente las debilidades señaladas.

Las debilidades de la preparación y desempeño de los profesores, y las insuficiencias y deficiencias de otros factores que influyen en la dinámica y resultados del proceso docente-educativo en el preuniversitario, han dado lugar a que en evaluaciones recientes sobre su estado (MINED, 2002 b, p. 1), se haya señalado que el décimo grado "no constituye una etapa de nivelación y preparación para enfrentar los retos que constituye para el estudiante la enseñanza media superior".

En las adecuaciones del Programa de la asignatura Matemática para el décimo grado se han concebido algunos lineamientos metodológicos encaminados a resolver algunas de las dificultades actuales del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura. Éstos constituyen una continuación de los planteados para el trabajo en la SB.

En relación con la integración de conocimientos en los lineamientos se plantea:

> "Sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, como son los procedimientos lógicos y

heurísticos, tratando de que se dominen los conceptos y la lógica que subyace a los algoritmos que se estudian y se integre el saber de los alumnos procedente de distintas áreas de la Matemática e incluso de otras asignaturas".

También se puede verificar que en varias de las partes del programa se enfatiza en la necesidad de la sistematización e integración de los conocimientos y se insiste en que, bajo la concepción de un concepto amplio de problema, se utilicen éstos como medio para lograr tal fin.

Principales aportes de la Didáctica de la Matemática al diseño de la integración de los conocimientos matemáticos.

En el presente epígrafe se realizará un análisis de los principales aportes a la integración de conocimientos de la MEM, la TAD y los Estándares Curriculares y de Evaluación del NCTM de los Estados Unidos.

Como se ha afirmado en el epígrafe 1.2, la sistematización planteada por la MEM tiene entre sus intenciones lograr la integración de conocimientos. Ballester y otros (p.141) señalan que es posible sistematizar conceptos, teoremas y procedimientos, es decir, que realizan el énfasis en los conocimientos conceptuales, proposicionales y procedimentales, lo que indica que se concentran en las filas de la tabla 2 donde aparecen las celdas 13, 19 y 25 (filas 3, 4 y 5, respectivamente).

Aunque en la MEM no se hace referencia al concepto de interobjeto ni a otro que realice la misma función, en las propuestas de sistematización que se exponen en los libros y artículos consultados (Ballester, 1999; Ballester y otros, 1992), es posible identificar este elemento si se utiliza como referencia la definición de integración que se da en el epígrafe 1.1 de la presente tesis.

Para la sistematización de conceptos se propone (Ballester y otros, pp. 141-142) el establecimiento de relaciones entre los mismos, tomando como referencia también un concepto. Esta propuesta se corresponde con la celda 15 de la tabla 2.

En el texto mencionado (Ballester y otros, pp.142-145) se esboza la sistematización de teoremas, la cual incluye las siguientes variantes:

- Comparación de los teoremas que expresan algo sobre un concepto (p. 142). Esta propuesta se enmarca en la celda 21 de la tabla 2.
- Comparación de propiedades de una función dada por una expresión en términos de las operaciones en dependencia del universo al que pertenezcan sus elementos (p.143). En este caso la propuesta se corresponde con la celda 4.
- Contraposición de teoremas en torno a dos conceptos colaterales (p.144). En este caso el interobjeto es la combinación de dos objetos elementales del mismo tipo. Esta variante no está en la tabla 2, pues se enmarca en los casos en que el interobjeto se forma por la combinación de dos tipos de objetos elementales.
- Ordenamiento de los teoremas según la secuencia lógica en que deben tratarse. Aquí el interobjeto es una argumentación-validación y por tanto la variante se corresponde con la celda 24.

En cuanto a la sistematización de procedimientos Ballester y otros (1992) plantean las siguientes variantes:

- Obtención de un procedimiento general mediante el análisis de casos particulares (pp.145-146). Aquí el procedimiento general hace la función de interobjeto y esta variante se corresponde con la celda 29.
- Comparación de procedimientos atendiendo a determinadas propiedades (p.146). Esta variante se corresponde con la celda 28.

Todas las variantes de sistematización analizadas pueden ser utilizadas también para la integración de conocimientos.

Relacionados con la sistematización varios profesores e investigadores del occidente del país dirigidos por el Dr. Sergio Ballester, han trabajado en propuestas basadas en el uso de los llamados “ejercicios de nuevo tipo”. En un artículo publicado por Ballester (1999) se pueden apreciar que con estos ejercicios se puede lograr una integración de los conocimientos. Los ejemplos aportados se corresponden con las celdas 3, 19 y 22 de la tabla 2.

En el anexo 4 se expone la tabla 2 con las celdas que han sido incluidas en las propuestas de la MEM.

A partir del análisis de distintos artículos publicados por investigadores de la TAD (Fonseca y Gascón, 2000, 2002 a, 2002 b) se observa que la integración de organizaciones matemáticas puntuales se centra en el trabajo con las técnicas matemáticas a partir del planteamiento de tareas problemáticas, por lo que se puede afirmar, tomando como referencia la definición de integración de conocimientos dada en el epígrafe 1.1.4, que en esta teoría se toman como interobjeto a las tareas y se hace énfasis en las técnicas, independientemente de que en el proceso intervengan otros tipos de elementos que conforman las praxeologías puntuales.

Por tanto, desde la interpretación del autor de este trabajo, en la TAD las propuestas de integración se centran en la celda 26 de la tabla 2, lo que no quiere decir, que no se integren otros tipos de conocimientos, pues en las organizaciones matemáticas ellos están presentes. La celda 26 significa que se enfatiza en la integración de lo procedimental en torno a lo situacional.

Las propuestas de integración de conocimientos que aportan los Estándares Curriculares y de Evaluación del NCTM pueden identificarse a partir de la directriz de las conexiones. En un análisis de los Estándares para los grados 9-12 y de otros documentos elaborados para su aplicación (NCTM, 2000; Bartman, 2000) fue posible identificar las siguientes ideas:

- Reconocimiento de representaciones equivalentes de un mismo concepto. Esta variante se corresponde con la celda 15 de la tabla 2.
- Resolución de un problema con distintos procedimientos, es decir, integrar procedimientos en torno a un problema. Esta variante se corresponde con la celda 26.
- Introducción de los nuevos conceptos como generalizaciones de los ya existentes. Se trata de integrar conceptos en torno a un concepto. Esta variante se corresponde con la celda 15.

  El elemento, referido a la generalización, tiene gran importancia, pues el aprendizaje de la Matemática exige la realización de constantes generalizaciones en el sentido en que lo conceptúa Davídov (1981, p.13) y confirmada por Mederos (2002) en el estudio de varios conceptos.

- Modelación de una situación de un área de la Matemática utilizando un concepto de otra área de la Matemática. En este caso se trata de la integración de conceptos utilizando como interobjeto una situación. Esta variante se corresponde con la celda 14.

En el anexo 5 se expone la tabla 2 con las celdas que han sido incluidas en las propuestas que se exponen en los documentos relacionales con los Estándares del NCTM que han sido analizados.

El análisis realizado en este epígrafe permite algunas conclusiones:

- La definición de integración de conocimientos dada en el epígrafe 1.1.4 junto con la tabla 2 han resultado instrumentos adecuados para el análisis de las propuestas de integración de conocimientos de tres tendencias didácticas. Dos de ellas ponen el énfasis en distintos tipos de conocimientos y consideran diferentes tipos de conocimientos para el interobjeto.
- En los trabajos consultados de la MEM es donde más propuestas se han podido identificar. No obstante, si se hace una comparación de las tablas de los anexos 4 y 5, se puede observar que quedan celdas en blanco, para las cuales no se realizan propuestas.

En las fuentes consultadas no se pudieron identificar procedimientos que den fe de cómo insertar estas propuestas en el preuniversitario. En el capítulo II se propone una solución a esta problemática.

Conclusiones del capítulo.

- Las nociones de práctica, objeto, significado y función semiótica, introducidas por la TFS, son útiles para describir la estructura compleja del conocimiento matemático y poderlo descomponer en unidades útiles para su análisis. En esta descomposición tienen los conceptos una función singular debido a su cualidad de expresar los conocimientos acumulados.
- El análisis teórico realizado ha permitido definir la integración de conocimientos como un elemento de gran necesidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Esta definición y otros elementos teóricos desarrollados por el autor de esta tesis, han resultado herramientas muy útiles para analizar los principales aportes de distintas teorías y propuestas didácticas a la integración de conocimientos.
- El estudio de los elementos fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario, ha permitido identificar hechos que demuestran que la integración de conocimientos matemáticos en el décimo grado tiene varias limitaciones, pero que existe la posibilidad de resolverlas a partir del trabajo científico.

Capítulo II. Estructura y realización de un procedimiento didáctico para el diseño de la integración de conocimientos matemáticos en el décimo grado.

En el presente capítulo se expone una solución del problema científico planteado en la introducción de esta tesis. La solución consiste en un procedimiento didáctico para diseñar la integración de conocimientos.

La integración de conocimientos que se trata, se centra en el trabajo con interobjetos que son conceptos o que se obtienen a partir de éstos mediante un análisis, en que están implicados los objetos elementales explicados en la p.19. Esto se ha hecho debido a que los conceptos tienen una función totalizadora dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, lo cual se ha señalado en el epígrafe 1.1.

En el presente capítulo también se ilustra el procedimiento con una unidad del programa de décimo grado y se analizan los resultados de los criterios de expertos sobre la validez de la propuesta.

El nombre del concepto procedimiento didáctico está formado por dos palabras que describen su esencia. El término procedimiento se está utilizando en el sentido que lo conceptúa Del Carmen cuando dice (p. 111): “un procedimiento es un conjunto de acciones ordenadas, dirigidas a la consecución de una meta”.

Según Álvarez de Sayas (p. 8) la Didáctica tiene por objeto de estudio el proceso docente-educativo, o sea, el “proceso educativo escolar que del modo más sistémico se dirige a la formación social de las nuevas generaciones y en él, el estudiante se instruye, capacita y educa”, es decir, forma sus conocimientos, su pensamiento y sus sentimientos.

El calificativo didáctico tiene la intención de significar que se trata de un procedimiento para ser aplicado en el proceso docente-educativo de una asignatura, y que a pesar de estar dirigido a la integración de conocimientos, lo que indica que se hace énfasis en las dimensiones instructiva y de capacitación, en el sentido que las conceptúa Álvarez de Sayas (1998, p.7), también tiene su implicación en la dimensión educativa.

Tal procedimiento ha de formar parte de la estrategia didáctica que elabora cada docente para conducir a sus alumnos a los resultados deseados, pues como apunta Rangel (2002 a, p.44), ésta tiene como objeto la dirección del movimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje y “constituye un elemento esencial para lograr que, como resultado del proceso, ocurra con mayor frecuencia la variante o nivel deseado entre las existentes” .

De acuerdo con lo anterior, la investigación se propone enriquecer las estrategias didácticas que se puedan elaborar en cada preuniversitario sin hacer cambios sustanciales en la organización y selección de los contenidos. Se trata de influir en los procedimientos para planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.1. **Acciones y operaciones para diseñar la integración de conocimientos matemáticos.**

Como la integración de conocimientos es un proceso que se da dentro del sistema didáctico, para explicar su desarrollo se puede utilizar la categoría de eslabón o etapa con la misma concepción que lo ha hecho Álvarez de Sayas (1998, p.12) para el proceso docente-educativo. De esta manera los eslabones del proceso de integración de conocimientos son el **diseño**, la **ejecución** y la **evaluación**.

El procedimiento didáctico que se expondrá en el presente epígrafe, y se ejemplificará en el siguiente, está dirigido al diseño del proceso de integración.

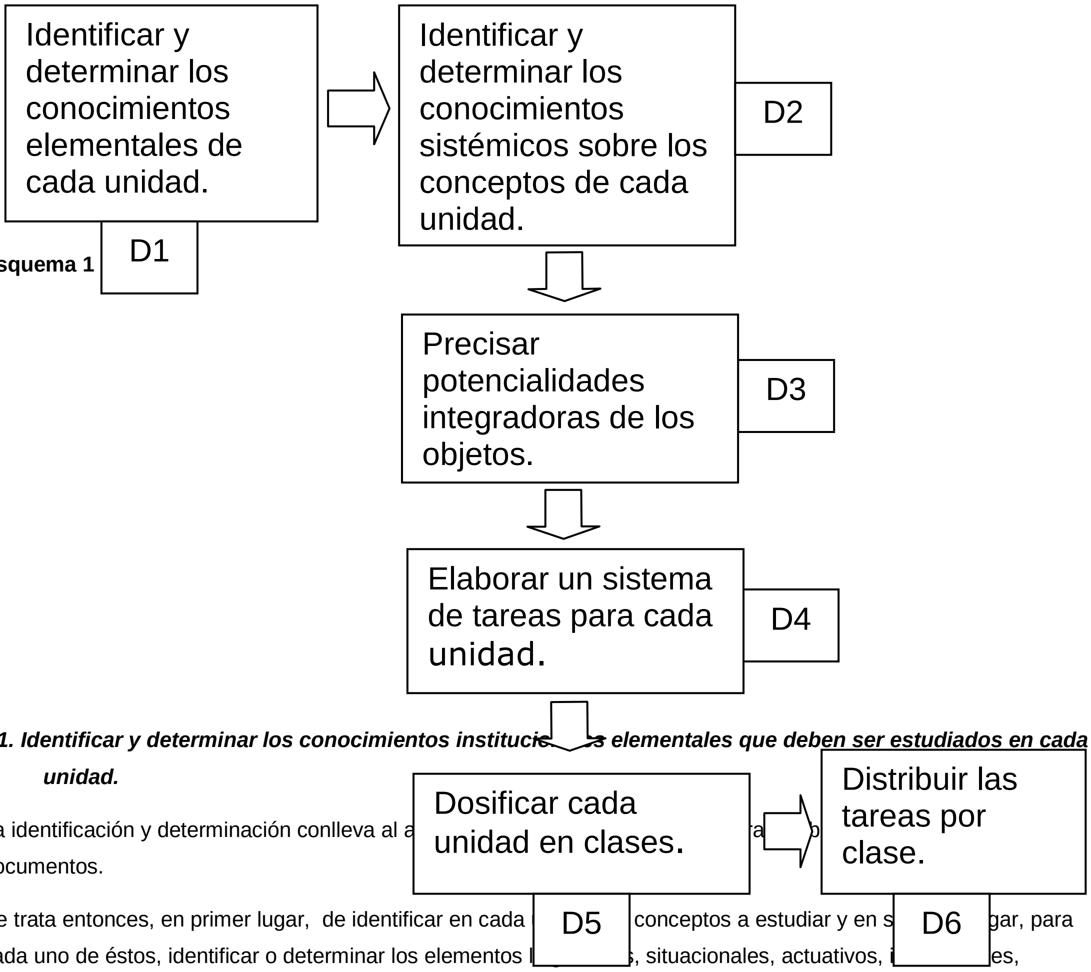
Como los programas de los preuniversitarios están divididos en temas o unidades, las acciones del procedimiento deben ejecutarse por unidades.

Las dos primeras acciones están dirigidas al **objeto** del proceso de integración que se quiere llevar a cabo, el que está constituido por los conocimientos matemáticos, los cuales, en su faceta institucional-elemental, aparecen en el programa de la asignatura, libro de texto y otros documentos metodológicos que se utilizan. Por tanto, las dos primeras acciones del procedimiento consisten en la determinación y precisión de los conocimientos elementales y sistémicos de las unidades.

La tercera está dirigida a precisar las potencialidades que ofrecen los objetos matemáticos de cada unidad para la integración de conocimientos, la cuarta dirigida al diseño de un sistema de tareas para el logro de la integración de conocimientos, la quinta destinada a la dosificación de los contenidos del programa en clases y la sexta enfocada a la distribución de las tareas.

Las acciones anteriores se identificarán con los símbolos D1, D2, D3, D4, D5 y D6. Las operaciones que las componen se denotarán de la misma manera agregando un número de orden.

De esta manera las acciones relacionadas con el diseño pueden representarse como aparece en el esquema 1.



Esquema 1

D1. Identificar y determinar los conocimientos instituci… elementales que deben ser estudiados en cada unidad.

La identificación y determinación conlleva al a… documentos.

Se trata entonces, en primer lugar, de identificar en cada … conceptos a estudiar y en s… gar, para cada uno de éstos, identificar o determinar los elementos l… situacionales, actuativos, i… es, proposicionales y argumentativo-validativos y conformar lo que se aspira sea una parte del significado institucional de cada unidad. Este proceso puede realizarse mediante las operaciones siguientes:

D1.1. Identificar los conceptos que se van a estudiar en la unidad.

En cada unidad del programa docente para un grado en el nivel preuniversitario (y también en el resto de los niveles de enseñanza) aparecen uno o varios conceptos que deben ser estudiados. Hay veces que en el programa no se detallan todos y por eso también hay que revisar otras fuentes de información como es, por ejemplo, el libro de texto.

D1.2. Precisar en cuáles casos el estudio de los conceptos de la unidad se inició con anterioridad y en cuáles no.

Esta operación consiste en revisar los programas, libros de texto y documentos metodológicos de los grados precedentes y del grado, para precisar en cuáles casos el estudio de los conceptos de la unidad se inició en otras unidades precedentes (de grados anteriores o del mismo grado) y en cuáles no. Para hacer referencia en lo adelante a ambos tipos de conceptos se utilizarán los calificativos “nuevos” y “de estudio iniciado”, respectivamente.

D1.3. Determinar los conocimientos institucionales elementales anteriores a la unidad sobre los conceptos de estudio iniciado.

Este análisis requiere de la revisión y el estudio de los programas, libros de texto y documentos metodológicos de los grados anteriores y del grado. Como resultado de este proceso hay que determinar los elementos lingüísticos, situacionales, actuativos, intensionales, proposicionales y argumentativo-validativos que intervienen en las funciones semióticas elementales en las que el concepto aparece como expresión o contenido.

D1.4. Determinar los conocimientos institucionales elementales que se agregan en la unidad a los conceptos de estudio iniciado.

Como resultado de la operación D1.3 deben quedar precisados, con el análisis de las unidades precedentes, los conocimientos institucionales elementales sobre los conceptos (de la unidad) de estudio iniciado. El hecho de que se incluyan estos conceptos en la unidad, implica que se amplía su significado, es decir, que se agregan nuevas funciones semióticas (conocimientos) donde ellos aparecen como expresión o contenido.

Esta operación consiste en precisar esos nuevos conocimientos elementales presentes en la unidad sobre tales conceptos.

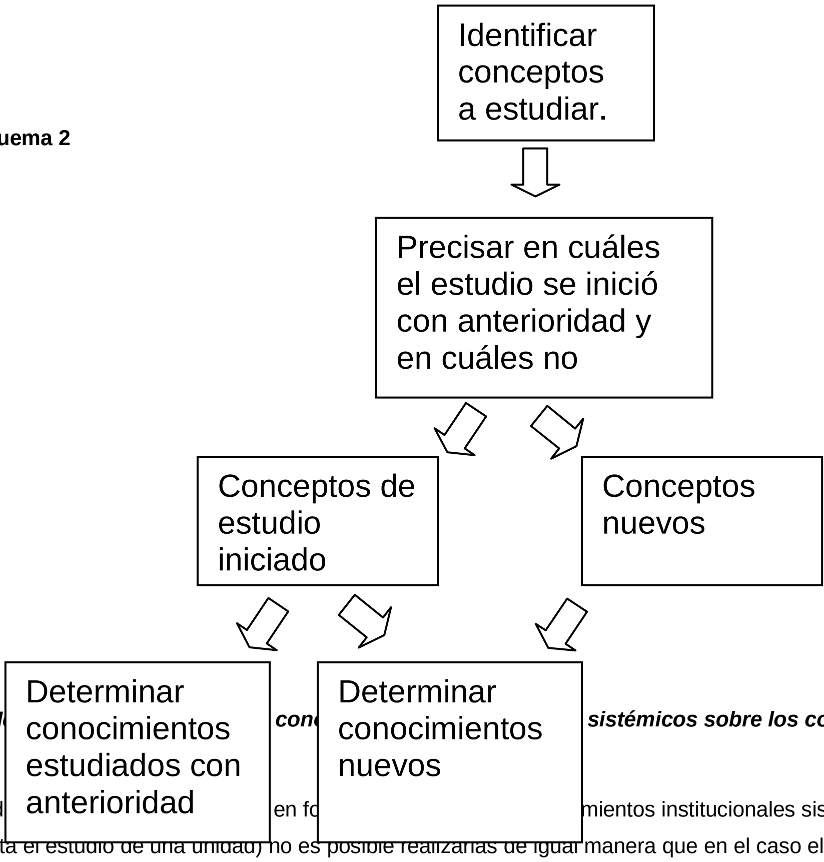
D1.5. Determinar los conocimientos institucionales elementales sobre los conceptos nuevos.

Esta operación se realiza de igual manera que D1.3, con la diferencia de que sólo hay que revisar el programa, el libro de texto y otros documentos del grado.

Las operaciones de la acción D1 se resumen en el esquema 2.

Con las operaciones D1.1-D1.5 quedan determinados los significados institucionales elementales de los conceptos que se estudiarán en la unidad. El siguiente paso ha de ser la determinación de un significado institucional sistémico que se concretará en las operaciones de la acción D2.

Esquema 2



D2. I… con… sistémicos sobre los conceptos que se

La id… en fo… mientos institucionales sistémicos sobre un concepto (hasta el estudio de una unidad) no es posible realizarlas de igual manera que en el caso elemental, pues el número de todas las funciones semióticas que se pueden establecer donde el concepto aparezca como expresión o contenido es generalmente grande.

Ésta es la razón por lo que en muchos diseños curriculares para el nivel medio, como lo es el caso del preuniversitario en Cuba, sólo se dan orientaciones generales al respecto y las particularidades se las dejan a la iniciativa del profesor o profesora. Pero también es cierto, que tal estilo de proceder puede ser una de las causas por las que los niveles de integración de conocimientos que se logran en el preuniversitario son bajos y con una distribución que se acentúa sólo al finalizar el estudio de cada unidad, pues como se ha comentado en otras partes de este trabajo, los (las) docentes no disponen de herramientas que les puedan servir de guía para lograr encausar su labor en este sentido.

Las siguientes operaciones que componen la acción D2, están destinadas a contribuir a llenar el vacío antes señalado a partir del trabajo con cada uno de los conceptos de la unidad.

D2.1. Determinar los universos de donde provienen las componentes de los elementos de la clase que refleja el concepto.

La determinación de los universos implica realizar un análisis de la definición del concepto, pues en ésta se identifica un núcleo intensional, que está dado por una o varias formas proposicionales[22], las cuales contienen una o más variables libres sobre los universos de donde provienen las componentes que conforman los elementos de la clase que refleja el concepto.

D2.2. Determinar los conceptos emparentados con el concepto objeto de análisis.

Esta operación requiere que el (la) docente tenga información sobre los conceptos que han sido tratados en unidades precedentes (en el mismo grado o grados anteriores). Para eso puede confeccionar una lista por áreas, de manera que en ella estén presentes los conceptos geométricos, algebraicos y aritméticos estudiados.

[22] Las formas proposicionales tienen, según Müller (1984, p.1), dos características básicas: contienen por lo menos una variable libre y cuando se sustituyen todas las variables libres por elementos de los universos se obtienen proposiciones.

La confección de la lista puede comenzar por determinar algunos conceptos iniciales a partir de los cuales se puedan obtener otros. Estos otros, pueden encontrarse buscando conceptos subordinados a los iniciales, conceptos de relación donde los iniciales intervengan o generalizaciones de los iniciales. Así por ejemplo, si se comienza el análisis con los conceptos de triángulo y de ecuación, pueden obtenerse otros conceptos como: triángulo rectángulo, triángulo isósceles, triángulo escaleno, mediana de un triángulo, lado de un triángulo, vértice de un triángulo, polígono, ecuación lineal, ecuación cuadrática, etc.

Después de obtenida la lista, se le aplica a los conceptos que la forman la operación D2.1 para obtener los universos de la clase que refleja cada uno y por último se analiza si están emparentados con el concepto objeto de análisis. Así se obtiene la lista de los conceptos exigidos en la operación.

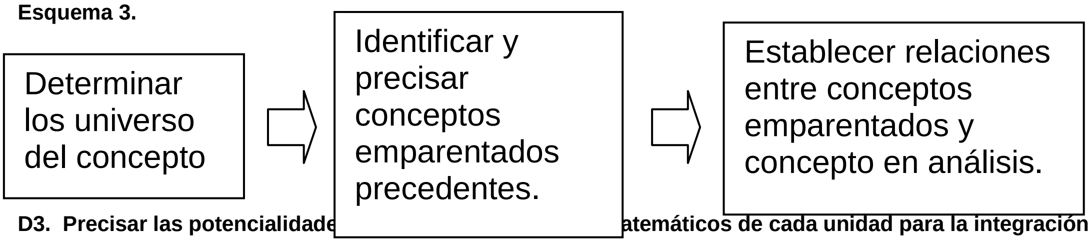
D2.3. Establecer relaciones entre el concepto objeto de análisis y los conceptos emparentados con él.

Como las relaciones que pueden existir entre los conceptos obtenidos como resultado de la operación D2.2 y el concepto objeto de análisis no son evidentes, el primer paso para conocerlas es el planteamiento de ciertas preguntas asociadas a la formulación de situaciones. La respuesta a tales preguntas permite ampliar el significado del concepto objeto de análisis y del resto de los conceptos.

El proceso de solución de las situaciones planteadas lleva inevitablemente, también, a establecer relaciones entre los conocimientos sobre el concepto objeto de análisis y sobre el resto de los conceptos.

El esquema 3 muestra un resumen de las operaciones que componen la acción D2.

Esquema 3.



D3. Precisar las potencialidade … atemáticos de cada unidad para la integración de conocimientos y señalar vías para lograrlo.

Según se ha expuesto en la sección 1.1.2 del epígrafe 1, los objetos matemáticos de cada unidad se determinan en dos etapas. En la primera se identifican los conceptos que se estudian en la misma (D1.1) y en la segunda, se determinan los objetos elementales asociados a cada concepto (D1.3, D1.4 y D1.5).

De acuerdo con la definición de integración de conocimientos dada en 1.1.4, es posible expresar que las potencialidades que tiene un objeto O para la integración de conocimientos, vienen dadas por el conjunto de tareas cuya resolución implica las dos acciones siguientes:

1) Encontrar (al menos) dos conocimientos relacionados con O.

2) Construir un conocimiento que los relacione.

Por ejemplo, entre las tareas que expresan las potencialidades integradoras del concepto de razón entre dos segmentos está la siguiente:

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30°. Calcular la razón entre el cateto que se opone a este ángulo y la hipotenusa.

Para resolver esta tarea hay que utilizar al menos los conocimientos siguientes:

- Definición de razón.
- Procedimiento para calcular la razón.
- La propiedad que expresa que en un triángulo con tales características, el cateto que se opone al ángulo de 30° tiene la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Como resultado de resolver la tarea, el alumno construye un nuevo conocimiento que se expresa en la proposición: en todo triángulo rectángulo con un ángulo de 30°, la razón entre el cateto que se opone a este ángulo y la hipotenusa es $\frac{1}{2}$.

La tarea anterior prepara el camino para el estudio de las razones trigonométricas, en el triángulo rectángulo, de manera que tiene una función integradora no sólo con relación a los conceptos estudiados, sino también con los que se estudiarán posteriormente.

Las vías para el logro de la integración se expresarán en descripciones generales sobre los tipos de tareas que puede proponer el (la) docente.

Teniendo en cuenta que las acciones D1 y D2 deben haberse ejecutado para todas las unidades del Programa, la acción D3 implica el trabajo con los objetos asociados a cada concepto de acuerdo con las operaciones siguientes:

D3.1. Determinar conocimientos sobre el concepto, que se puedan integrar utilizando a éste como interobjeto y señalar vías para la integración.

Este análisis se realiza teniendo en cuenta la tabla 2 y otras posibles combinaciones que se puedan realizar para los conocimientos que se han de integrar. Se deben utilizar los resultados de las operaciones D1.3, D1.4, D1.5 y D2.3.

Dos vías importantes para la integración de procedimientos son la resolución de una tarea utilizando distintos procedimientos o la resolución de una tarea y la comprobación del resultado. Esta segunda vía ofrece en varias ocasiones, la oportunidad de integrar dos procedimientos en que uno es el inverso del otro. Así por ejemplo, se puede comprobar la factorización con la multiplicación; la resta con la suma, etc.

D3.2 Determinar conocimientos que se puedan integrar tomando como interobjeto alguno de los objetos elementales asociados al concepto y señalar vías para la integración.

El hecho de que se utilicen los conceptos como unidades de análisis para el estudio de la integración, no implica que éstos sean los únicos interobjetos con los cuales se trabaja. Esta operación trata básicamente de utilizar como interobjetos a los objetos elementales asociados a un concepto.

Para realizar el trabajo se pueden confeccionar tablas de dos columnas, en las que se expongan los tipos de conocimientos a integrar y las vías para lograr la integración.

Para confeccionar las tablas se pueden plantear preguntas como las siguientes:

1. ¿Qué otros objetos se denotan con un símbolo que tiene la misma forma que el utilizado para el concepto[23]?

2. ¿Qué otros objetos se nombran de la misma forma que el concepto[24]?

3. ¿Qué otros conceptos tienen algunas de las propiedades del concepto objeto de análisis?

Algunas posibilidades de trabajar aparecen en el anexo 13.

D4. Elaborar un sistema de tareas docentes encaminadas a que los alumnos integren conocimientos matemáticos.

Existen en Cuba varios investigadores (Arteaga, 2000; Garcés, 2000) que se han dedicado a la elaboración de sistemas de tareas con distintos fines. Así Arteaga (2000, p. 61) plantea que "un sistema de tareas es un conjunto de tareas interrelacionadas entre sí, cuyo funcionamiento permite el logro de determinados objetivos, en un contexto determinado".

El objetivo de las tareas que se deben elaborar como resultado de esta acción es la integración de conocimientos. Por eso, deben estar en función de concretar las vías que se han determinado como resultado de la acción D3, por lo que para cada una de éstas hay que elaborar por lo menos una tarea.

Las tareas a elaborar se pueden dividir en dos grupos:

- Tareas donde el interobjeto es uno de los conceptos de la unidad.
- Tareas donde el interobjeto es uno de los objetos asociados a los conceptos de la unidad.

En estas tareas se utilizan los conocimientos obtenidos como resultado del proceso seguido para responder las preguntas planteadas al aplicar la operación D2.3. También en las tareas del primer grupo se pueden incluir varias de estas interrogantes.

Existen distintas tipologías de tareas, pero a los efectos del fin que se persigue en este caso, se puede utilizar la tipología referida por Labarrere (1987, pp. 23-24), en la cual las tareas se diferencian, según la exigencia, en tareas de determinación, tareas de construcción y tareas de demostración.

Las tareas de ambos grupos deben tener en cuenta el desarrollo alcanzado por los alumnos y alumnas en las esferas cognitiva y afectiva, los objetivos de la unidad, las características del contenido, características del contexto, forma de organizar el grupo-clase para realizarlas, etc.

D5. Realizar una distribución de los contenidos a enseñar en cada unidad por clases (dosificación del contenido).

Esta acción se ha incluido en el procedimiento, para expresar que debe realizarse después de las acciones D1-D4, pues no debe ejecutarse primero la distribución de los contenidos por clases y después elaborar las tareas, sino que debe procederse a la inversa.

D6. Distribuir las tareas elaboradas por clases.

---

[23] Hay símbolos que denotan varios conceptos, a veces por abuso de la notación. Por ejemplo, el símbolo $\overline{AB}$ denota un segmento (figura), la longitud de un segmento (magnitud) y la medida de la longitud del segmento respecto a una unidad (número real positivo).

[24] En la Matemática escolar esto suele suceder. Por ejemplo, la bisectriz de un ángulo y de un triángulo se nombran de igual manera y son objetos diferentes, el nombre "seno" se utiliza para una razón entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo y para designar una función.

Después de haber hecho la dosificación del contenido por clases se distribuyen las tareas elaboradas. Esta distribución, entre otros aspectos, debe precisar:

- Tareas que se van a resolver por todos los alumnos en cada clase.
- Tareas que se van a resolver fuera de la clase.
- Tareas que se van a proponer a los alumnos de más bajo rendimiento o de alto rendimiento.
- Tareas que se van a resolver en trabajo grupal.

2.2. **Realización del procedimiento en la unidad de semejanza de figuras planas.**

En este epígrafe se ejemplificará el procedimiento explicado en el epígrafe 2.1 con la unidad del programa de décimo grado “Relaciones de igualdad y semejanza entre figuras geométricas” y específicamente se utilizará la subunidad 3.3 que trata sobre las razones entre longitudes y la semejanza de triángulos.

D1. Identificar y precisar los conocimientos institucionales elementales que deben ser estudiados en cada unidad.

Para realizar esta acción se ejecutarán las operaciones que le son propias.

D1.1. Identificar los conceptos que se van a estudiar en la subunidad.

Una revisión del programa y los textos que se recomienda utilizar para el desarrollo del contenido (Muñoz y otros, 1991; Paz, 1968) permite identificar los conceptos siguientes:

- Razón entre dos segmentos.
- Segmentos proporcionales.
- Cuarto proporcional de tres segmentos dados.
- Tercero proporcional de dos segmentos.
- Medio proporcional de dos segmentos.
- Figuras geométricas semejantes.
- Razón de semejanza.
- Triángulos semejantes.
- Perímetro de un triángulo.
- Área de un triángulo.

D1.2. Precisar en cuáles casos el estudio de los conceptos de la subunidad se inició con anterioridad y en cuáles no.

En la tabla 3 aparecen los resultados de esta operación para los conceptos de estudio iniciado y se precisan, adicionalmente, los grados donde esto ocurrió. Los conceptos nuevos son los que no aparecen en la lista, es decir, los conceptos de cuarto proporcional de tres segmentos, tercero y medio proporcional de dos segmentos y de triángulos semejantes.

Tabla 3

Concepto	Grados donde fue formado o aplicado
Razón entre dos segmentos.	8. grado.
Segmentos proporcionales.	8. grado.
Figuras geométricas semejantes.	8. grado.
Razón de semejanza.	9. grado.
Perímetro de un triángulo.	5.-9. grados.
Área de un triángulo.	5.-9. grados.

D1.3. Determinar los conocimientos institucionales elementales anteriores a la subunidad sobre los conceptos de estudio iniciado.

Aquí se hará la ejemplificación con el concepto de razón. Para el resto se procede de igual forma.

Conocimientos institucionales elementales sobre el concepto de razón hasta 9. grado.

1) Elementos lingüísticos.

La razón entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se denota por $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$. En este símbolo hay que tener en cuenta el orden en que se colocan los segmentos, pues si se trata de la razón entre $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$, hay que invertirlo.

También el concepto en cuestión se nombra razón entre dos longitudes y se denota de la misma manera.

2) Elementos situacionales.

Las tareas de cuya resolución emerge el concepto de razón entre dos segmentos, tienen poca precisión en los documentos escolares de la SB, que es donde se estudia por primera vez.

Los alumnos conocen como resolver una tarea que consiste en calcular la distancia real entre dos lugares de Cuba teniendo en un mapa su localización y conociendo la escala.

El concepto de razón emerge de una tarea inversa a la anterior: se conoce la distancia verdadera entre dos lugares de Cuba y se tiene su localización en un mapa, pero se desconoce la escala que se utilizó para construir el mapa. ¿Cómo calcularla?

3) Elementos actuativos.

Las tareas descritas, después de haber identificado las longitudes con las que se debe calcular, se resuelven aplicando el siguiente procedimiento:

- Elegir una unidad de longitud para expresar las longitudes con las que se va a calcular.
- Expresar cada longitud como múltiplo de la unidad elegida.
- Calcular el cociente entre las medidas de cada longitud respecto a la unidad elegida.

4) Elementos intensionales.

Para el concepto de razón entre dos segmentos hasta 9. grado sólo se ha utilizado el sistema esencial que aparece en la definición que se da:

“Llamamos razón entre dos segmentos[25] a la razón entre los números que expresan sus medidas en la misma unidad de longitud”.

5) Elementos proposicionales.

- La razón entre dos segmentos es un número real positivo.
- La razón entre dos segmentos no depende de la unidad que se utilice para expresar las longitudes de los segmentos.

6)Elementos argumentativo-validativos.

No se argumentan las siguientes propiedades que se utilizan:

- Dada una longitud y una unidad, siempre es posible encontrar un número positivo que permita expresar la longitud como múltiplo de la unidad.
- La existencia de la razón entre dos segmentos.
- La razón entre dos segmentos es un número positivo.
- El carácter invariante de la razón cuando se cambia la unidad para expresar las longitudes de los segmentos.

---

[25] Realmente la razón es entre la longitudes de los segmentos, pero por un abuso del lenguaje se usa esta terminología.

D1.4. Determinar los conocimientos institucionales elementales que se agregan en la subunidad a los conceptos de estudio iniciado.

Un análisis del programa y de los libros de texto a utilizar en el grado para esta subunidad permite precisar los nuevos elementos que se agregan a los conceptos de estudio iniciado. Aquí sólo se expondrán los referidos al concepto de razón.

Para el concepto de razón no aparecen elementos lingüísticos-notacionales nuevos y las situaciones que se resuelven utilizando este concepto están poco precisas en los documentos escolares. Sin embargo, un análisis del enfoque que se quiere que tenga el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, deja abierta la posibilidad de plantear situaciones vinculadas con otras asignaturas como la Física[26].

Para el concepto de razón no se estudian elementos proposicionales nuevos, pero sí se argumentan dos de sus propiedades: la invarianza con el cambio de unidad para expresar las longitudes de los segmentos y la referida a que es un número positivo.

D1.5. Determinar los conocimientos institucionales elementales sobre los conceptos nuevos.

De los conceptos cuyo estudio se concibe en la unidad, aparecen por primera vez los siguientes:

- Cuarto proporcional de tres segmentos dados.
- Tercero proporcional de dos segmentos.
- Medio proporcional de dos segmentos.
- Triángulos semejantes.

La determinación de los conocimientos institucionales nuevos para estos conceptos se realiza de igual manera que se hizo con el concepto de razón en la ejemplificación de la operación D1.3 de este epígrafe.

D2. ***Identificar y determinar los conocimientos institucionales sistémicos sobre los conceptos que se estudiarán en la subunidad.***

Las operaciones correspondientes a esta acción hay que aplicarlas a cada uno de los conceptos de la subunidad. Aquí se realizará sólo para el concepto de razón a manera de ejemplo.

D2.1. Determinar los universos de donde provienen las componentes de los elementos de la clase que refleja el concepto.

Para el concepto de razón en el libro de texto (Muñoz, 1991, p. 5) se da la siguiente definición:

> "Llamamos razón entre dos segmentos a la razón entre los números que expresan sus medidas en la misma unidad de longitud".

Para el análisis que se está realizando es conveniente escribir la definición anterior de una manera más formal con el fin de poder identificar los universos buscados. Podría reformularse en la forma siguiente:

"Un número real positivo k se llama razón entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; se escribe k = $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ si, y sólo si, k es la razón entre las medidas de las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respecto a la misma unidad, o sea, existen un segmento $\overline{UV}$ y números reales positivos x, y tales que $\overline{AB}$ =x $\overline{UV}$, $\overline{CD}$ = y $\overline{UV}$, $k = \frac{x}{y}$.

[26] Véase la situación enunciada en Ar7.

El núcleo intensional en la definición anterior es la forma proposicional “existen un segmento $\overline{UV}$ y números reales positivos x, y tales que: $\overline{AB}$ = x $\overline{UV}$, $\overline{CD}$ = y $\overline{UV}$, $k = \frac{x}{y}$ ”, en la cual las variables libres son $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y k. Las dos primeras pertenecen al universo de los segmentos y la tercera al universo de los números reales positivos.

El análisis realizado permite observar que el concepto refleja una clase del tipo III cuyos elementos son ternas ordenadas formadas por dos segmentos y un número real positivo, lo que indica que el concepto de razón es del tipo III.

D2.2. Determinar los conceptos emparentados con el concepto objeto de análisis.

En el anexo 7 aparece una lista de gran parte de los conceptos tratados con anterioridad a la subunidad que se está analizando. A partir de esta lista se obtuvo otra, con los conceptos que están emparentados con el concepto de razón.

Conceptos geométricos.

Segmentos paralelos, igualdad de segmentos, punto medio de un segmento, medida de una longitud respecto a una unidad, suma de longitudes, diferencia de longitudes, producto de un número positivo por una longitud, mediatriz de un segmento, distancia de un punto a una recta, lado de un polígono, diagonal de un polígono, altura, mediana, bisectriz y línea media de un triángulo, paralela media de un trapecio, lados opuestos de un cuadrilátero, radio, cuerda y diámetro de una circunferencia, apotema de un polígono regular y segmentos correspondientes por un movimiento, arista de un prisma, altura de un cilindro, altura de un cono, generatriz de un cono, y radio y diámetro de una esfera.

Conceptos algebraicos.

Valor de un término, grado de un polinomio, solución de una ecuación de una variable (lineal, cuadrática, fraccionaria) y cero de una función.

Conceptos aritméticos.

Fracción, número entero, operaciones con números naturales, enteros, fraccionarios, racionales, irracionales y reales, tanto por ciento, tanto por mil, razón numérica, proporción numérica, magnitudes directamente o inversamente proporcionales y potencias (de base natural, entera, fraccionaria y racional) y exponente natural, entero, fraccionario y racional.

D2.3. Establecer relaciones entre el concepto objeto de análisis y los conceptos emparentados con él.

Las componentes de los elementos de la extensión del concepto de razón provienen de dos universos. Si tenemos en cuenta los conceptos encontrados en D2.2 que "están emparentados" con él, de acuerdo con cada universo, pueden obtenerse inicialmente tres conjuntos de interrogantes cuya respuesta implica, por una parte, ampliar el significado institucional del concepto de razón, y por otra, ampliar el significado institucional de los demás conceptos.

Interrogantes relacionadas con conceptos geométricos[27].

G1. Si dos segmentos son paralelos, ¿cuál es su razón?

G2. Si dos segmentos son iguales, ¿cuál es su razón?

G3. El punto medio de un segmento lo divide en dos segmentos, ¿cuál es la razón entre estos dos segmentos y entre uno de ellos y el segmento dado?

G4. Si el número real m es la medida de la longitud de un segmento respecto a otro tomado como unidad, ¿cuál es la razón entre estos dos segmentos?

G5. Si k es la razón entre dos segmentos, ¿cuál es la medida de la longitud del primero respecto a la longitud del segundo y cuál es la medida de la longitud del segundo tomando la longitud del primero como unidad?

G6. Si m es la medida de la longitud de un segmento respecto a la longitud de otro, ¿cuál es la razón entre el primer segmento y el segundo y la razón entre el segundo y el primero?

G7. Si la razón entre dos segmentos es k, ¿cuál es la suma de las longitudes de los dos segmentos?

G8. Si la razón entre dos segmentos es k, ¿Para qué valores de k existe la diferencia del primero menos el segundo y del segundo menos el primero?

G9. Si la razón entre dos segmentos es k, ¿cuál es el producto de la longitud del primer segmento por k y cuál es el producto de la longitud del segundo segmento por k?

G10. La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ lo corta en un punto P, ¿cuál es la razón entre $\overline{AB}$ y cada uno de los segmentos que determina el punto P con los extremos de $\overline{AB}$?. ¿Cuál es la razón entre los dos segmentos que determina el punto P con los extremos de $\overline{AB}$?

[27] No se han analizado los conceptos referidos a la Geometría del espacio.

G11. Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son representantes de la distancia de los puntos A y C a una recta y k es la razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, ¿qué valores debe tomar k para que:

a)Los puntos A y C equidisten de la recta.

b)El punto A esté más alejado de la recta que C.

c) El punto C esté más alejado de la recta que A?

G12. ¿Cuál es la razón entre los lados de: un triángulo equilátero, un rombo, un cuadrado y un polígono regular?

G13. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30°, ¿cuál es la razón entre cada par de lados de este triángulo?

G14. Los ángulos bases de un triángulo rectángulo isósceles tienen una amplitud de 45°, ¿cuál es la razón entre cada par de lados de este triángulo?

G15. Dados tres segmentos, ¿encontrar una condición suficiente y necesaria en términos de una razón para que con ellos se pueda construir un triángulo?

G16. ¿Cuál es la razón entre las diagonales de: un trapecio, un trapecio isósceles, un paralelogramo, un rectángulo, un rombo, un trapezoide simétrico y un polígono regular?

G17. ¿Cuál es la razón entre un lado de un cuadrado y cualquiera de sus diagonales?

G18. ¿Cuál es la razón entre cada par de alturas de un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 30°?

G19. ¿Cuál es la razón entre las alturas relativas a los lados laterales de un triángulo isósceles?

G20. ¿Cuál es la razón entre cada par de alturas de un triángulo equilátero?.

G21. ¿Cuál es la razón entre las medianas relativas a los lados laterales de un triángulo isósceles y entre cada par de medianas de un triángulo equilátero?

G22. ¿Cuál es la razón entre las bisectrices relativas a los ángulos bases de un triángulo isósceles y entre cada par de bisectrices de un triángulo equilátero?

G23. ¿Cuál es la razón entre la mediana y la altura relativas a la base de un triángulo isósceles?

G24. ¿Cuál es la razón de la línea media de un triángulo y el tercer lado?.

G25. Las medianas de un triángulo se cortan en un punto, ¿cuál es la razón entre los dos segmentos que determina ese punto en una mediana?

G26. ¿Cuál es la razón entre la paralela media de un trapecio que tiene sólo dos lados paralelos y su base menor (su base mayor)?.

G27. ¿Cuál es la razón entre los lados opuestos de un paralelogramo y entre los lados no paralelos de un trapecio isósceles?

G28. ¿Cuál es la razón entre dos radios cualesquiera de una circunferencia y entre un radio y un diámetro?

G29. ¿Cuál es la razón entre dos apotemas cualesquiera de un polígono regular?

G30. ¿Cuál es la razón entre dos segmentos correspondientes por un movimiento?

Interrogantes relacionadas con conceptos algebraicos.

En el concepto de razón, a dos segmentos se le asigna un número real positivo como cociente de dos números reales positivos que expresan las medidas de las longitudes de estos segmentos utilizando una misma unidad. En caso de que algunos de estos valores sea desconocido se representa por una variable y entra a jugar un papel el Álgebra. Las siguientes situaciones generales son un ejemplo de ello.

Al1. Las medidas de las longitudes de dos segmentos vienen expresadas por el valor de los términos T_1 y T_2, respectivamente, para una interpretación de sus variables. Calcular la razón entre estos segmentos.

Al2. Se conoce que la razón entre dos segmentos es el grado de un polinomio P dado y que las medidas de sus longitudes se desconocen, pero se pueden expresar por dos expresiones algebraicas de una variable. Determinar las medidas de las longitudes de los segmentos.

Al3. La razón entre dos segmentos es la solución positiva de una ecuación (lineal, cuadrática, fraccionaria) y la medida de la longitud de uno de ellos es el cero de una función lineal. Determinar la medida de la longitud del otro.

Interrogantes relacionadas con conceptos aritméticos.

En vista de que para calcular la razón entre dos segmentos hay que dividir las medidas de las longitudes de ambos respecto a una misma unidad, este concepto tiene relación con los conceptos aritméticos. Algunas interrogantes que pueden surgir al respecto se expresan en las siguientes situaciones.

Ar1. ¿Qué condición deben cumplir las medidas de las longitudes de dos segmentos para que la razón entre el primero y el segundo sea una fracción?

Ar2. ¿Qué relación debe existir entre dos segmentos para que su razón sea 1?.

Ar3. ¿Qué condición deben cumplir las medidas de las longitudes de dos segmentos para que la razón entre el primero y el segundo sea un número entero?

Ar4. ¿Qué condición deben cumplir las medidas de las longitudes de dos segmentos para que la razón entre el primero y el segundo sea un número irracional?

Ar5. Si k es la razón entre dos segmentos dados, ¿qué tanto por ciento (tanto por mil) es k de la longitud del primer segmento respecto al segundo y de la longitud del segundo respecto al primero?

Ar6. Si k es la razón entre dos segmentos, ¿cuál es la razón numérica de las medidas de sus longitudes?

Ar7. Se han registrado, cada 10 minutos, las distancias recorridas por un móvil durante una hora, ¿cuál debe ser el valor de la razón entre dos distancias tomadas en instantes consecutivos para que se pueda conjeturar que el móvil realiza un movimiento rectilíneo uniforme?

Ar8. Si las medidas de las longitudes de dos segmentos son dos potencias de igual base (de igual exponente), ¿cuál es el valor de la razón entre estos dos segmentos?

Las respuestas a estas preguntas y otras que se puedan formular también constituyen conocimientos relativos a la subunidad que se está analizando.

D3. Precisar las potencialidades que ofrecen los objetos matemáticos de la subunidad para la integración de conocimientos y señalar vías para lograrlo.

Este análisis hay que hacerlo con cada uno de los 10 conceptos determinados como resultado de la operación D1.1 en la subunidad. Aquí sólo se hará con el concepto de razón, que se ha utilizado también en acciones anteriores.

D3.1. Determinar conocimientos sobre el concepto, que se puedan integrar utilizando a éste como interobjeto y señalar vías para la integración.

Tomando el concepto de razón como interobjeto se pueden integrar distintos tipos de conocimientos como se señala en la tabla 4 a manera de ejemplo.

Tabla 4.

Conocimientos a integrar	**Vías para lograr la integración.**
Situacionales	Proponer una tarea o situación que se pueda resolver utilizando el concepto de razón y pedir el planteamiento de otras que tengan relación con la inicial. Así se puede comenzar

	a generar un campo de problemas.
Procedimentales	▪ Pedir que se resuelva una tarea relacionada con el concepto de razón utilizando distintos procedimientos. ▪ Pedir que se resuelva una tarea y se compruebe el resultado. ▪ Pedir que se estimen características de la solución de una tarea y después se resuelva.
Proposicionales.	▪ Pedir la búsqueda de proposiciones en que el concepto de razón aparezca en la premisa o ésta se pueda expresar con el concepto de razón. ▪ Pedir la búsqueda de proposiciones en que el concepto de razón aparezca en la tesis o ésta se pueda expresar con el concepto de razón. ▪ Pedir la búsqueda de proposiciones en que el concepto de razón aparezca en la premisa y la tesis o que la premisa y la tesis se puedan expresar utilizando el concepto de razón.
Conceptuales	▪ Pedir la búsqueda de uno o varios conceptos que tengan una propiedad común que pueda expresarse con el concepto de razón. ▪ Pedir la búsqueda de uno o varios conceptos que se diferencien en una propiedad que se pueda expresar utilizando el concepto de razón.

En esta tabla no se han incluido los conocimientos sobre el concepto de razón que se obtienen respondiendo las interrogantes planteadas en D2.3.

D3.2 Determinar conocimientos que se puedan integrar tomando como interobjeto alguno de los objetos elementales asociados al concepto y señalar vías para la integración.

Aplicando las ideas expuestas en la explicación de la operación D3.2, se obtienen los resultados siguientes relacionados con algunos de los objetos asociados al concepto de razón (tablas 5 y 6). Para el resto de los objetos se puede proceder de igual forma.

Tabla 5

Interobjeto: Símbolo para el concepto.

Conocimientos a integrar	**Vías para lograr la integración.**
Conceptuales	Pedir la búsqueda de conceptos que se denoten con un símbolo que tenga la misma forma que el utilizado para el concepto de razón, analizar si existe algún abuso de la notación y comparar estos conceptos.

Tabla 6

Interobjeto: Proposición (La razón entre dos segmentos es un número real positivo).

Conocimientos a integrar	**Vías para lograr la integración.**
Conceptuales	Pedir la búsqueda de otros conceptos que expresen la relación entre dos objetos mediante un número real positivo.
Lingüísticos-notacionales	Pedir la escritura de la proposición de distintas formas.
Argumentativo-validativos	Pedir la argumentación de la proposición utilizando distintas vías.

D4. Elaborar un sistema de tareas docentes encaminadas a que los alumnos integren conocimientos matemáticos.

La ejemplificación de esta acción se realizará utilizando el concepto de razón y los objetos elementales asociados al mismo. El trabajo se puede realizar utilizando una tabla donde se escriban las vías y las tareas asociadas a cada vía (anexos 14 y 15).

2.3. Valoración de los criterios de los expertos sobre la propuesta.

En el presente epígrafe se describen los resultados de la aplicación del método de expertos, utilizado para obtener criterios valorativos sobre la validez del procedimiento didáctico explicado y ejemplificado anteriormente, como una solución al problema de investigación.

Para la aplicación del método se ha utilizado el siguiente procedimiento, ideado a partir de un artículo de Campistrous y Rizo (1999 b):

1) Selección de los expertos.
2) Determinación de un grupo de indicadores para medir la pertinencia del procedimiento propuesto para la solución del problema de investigación.
3) Confección de una escala para medir los indicadores.

4) Confección de una encuesta para acopiar los criterios de los expertos.

5) Procesamiento estadístico de la información acopiada.

6) Análisis de los resultados.

Ahora se describe la aplicación del procedimiento anterior.

1) Selección de los expertos.

Para seleccionar los expertos se tomó como población a un conjunto formado por profesores de Matemática con experiencia en el preuniversitario, profesores de MEM del ISP de la provincia de Sancti Spíritus y profesores de Matemática de este centro con experiencia en la docencia o en la dirección metodológica del preuniversitario. De esta manera se conformó un conjunto de 15 sujetos.

Los miembros de la población seleccionada se caracterizan por ser personas creativas, con buena capacidad de análisis, espíritu crítico y autocrítico, y con disposición real de colaborar en el trabajo.

Para seleccionar los miembros de la población que pudieran dar una mayor objetividad a la valoración de la propuesta (expertos), se utilizó un procedimiento que descansa en la autovaloración de éstos (Campistrous y Rizo, 1998, p.19), el cual se puede resumir en los siguientes pasos:

- Determinación del coeficiente de competencia de cada miembro de la población escogida (k_c).
- Determinación del coeficiente de argumentación de cada sujeto (k_a).
- Cálculo del coeficiente de cada sujeto (k).
- Valoración de los resultados.

Determinación del coeficiente de competencia de cada miembro de la población escogida.

El coeficiente de competencia de los sujetos se determina por medio de su propia valoración. Para obtenerlo, se le pide a cada uno que valore su competencia sobre el tema en una escala de 0 a 10 en un instrumento que se le aplica (anexo 8).

Determinación del coeficiente de argumentación.

Este coeficiente se calcula también a partir de la propia valoración de cada sujeto. Para su determinación se le pide (anexo 8) que indique el grado de influencia (alto, bajo, medio) que tiene en sus criterios cada uno de los elementos siguientes: análisis teóricos realizados por él mismo, su experiencia, los trabajos de autores nacionales, los trabajos de autores extranjeros, su conocimiento del estado del problema en el extranjero y su intuición.

A las categorías alto, bajo y medio dadas por cada sujeto a los elementos anteriores, se les asignan números según se especifica en el anexo 9, se suman estos números y se obtiene como resultado el coeficiente de argumentación del sujeto.

Cálculo del coeficiente de cada sujeto.

El coeficiente de cada sujeto se calcula como la media aritmética de los coeficientes de competencia y de argumentación.

En el anexo 10 aparece, de manera resumida, la información obtenida como resultado de aplicar el procedimiento explicado a los sujetos de la población seleccionada.

Valoración de los resultados de la selección de los expertos.

Se puede observar que el menor valor del coeficiente k es 0,6 por lo que se decidió utilizar como expertos a todos los miembros de la población.

Estos profesores y profesoras tienen una experiencia promedio en la docencia de 21,2 años con una desviación estándar de 6,2; los que trabajan en preuniversitario tienen una experiencia promedio en este nivel de enseñanza de 13,7 años con una desviación estándar de 4,7. El 66,3 % de los encuestados cursa maestría y el 6,7 % tiene el grado académico de Máster.

Los profesores y profesoras de MEM del ISP encuestados, tienen por lo menos 10 años de experiencia en la asignatura. El resto de los docentes encuestados de este centro, han tenido alguna experiencia en la docencia del preuniversitario y varios de ellos se han desempeña como metodólogos, han atendido o atienden la asignatura Matemática en el equipo multidisciplinario.

2) Determinación de un sistema de indicadores para medir la pertinencia del procedimiento propuesto para la solución del problema de investigación.

Se considera que la variable independiente en esta investigación es el procedimiento didáctico elaborado y la variable dependiente la integración de conocimientos matemáticos.

El análisis bibliográfico realizado, seguido de consultas informales a distintos profesores y finalmente de la consulta a expertos, utilizando el método propuesto por Campistrous y Rizo (1998), ha permitido establecer dimensiones e indicadores muy útiles o imprescindibles para medir la variable dependiente según muestra la tabla del anexo 16.

Teniendo en cuenta estos indicadores, se formularon otros para medir la pertinencia del procedimiento didáctico elaborado con respecto a la solución del problema de investigación.

I_1: Ordenamiento de las acciones y operaciones del procedimiento en correspondencia con el fin que se persigue.

I_2: Utilidad para la descomposición del conocimiento matemático en unidades.

I_3: Utilidad para poner de manifiesto relaciones entre distintos conocimientos por medio de un objeto.

I_4: Utilidad para la determinación de las potencialidades integradoras de los distintos objetos matemáticos.

I_5: Utilidad para el diseño de sistemas de tareas cuya solución implica poner de manifiesto relaciones entre distintos conocimientos en diferentes momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje.

I_6: Proposición de acciones para que las tareas integradoras se puedan insertar en el proceso de enseñanza-aprendizaje en correspondencia con el nivel de desarrollo alcanzado por los alumnos y alumnas.

I_7: Claridad y precisión del lenguaje utilizado.

3) Confección de una escala para medir los indicadores.

Para la medición de los indicadores se utilizó una escala ordinal de cinco categorías como se indica a continuación:

1	2	3	4	5
Inadecuado (I)	Poco adecuado (P.A)	Adecuado (A)	Bastante Adecuado (B.A)	Muy adecuado (M.A)

4) Confección de una encuesta para acopiar los criterios de los expertos.

Para valorar cada uno de los indicadores, se utilizó el escalamiento tipo Likert (Hernández, 1991), que consiste en un conjunto de ítems presentados en forma de afirmaciones o juicios ante los cuales se pide la reacción de los sujetos a los que se les administra (anexo 11). Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de indicadores y el conjunto de ítems.

5) Procesamiento estadístico de la información acopiada.

Para el procesamiento estadístico de los datos se utilizó el modelo de Torgerson (Campistrous y Rizo, 1998, p.13), utilizando como medio la hoja Excel soportada en Windows.

La aplicación de este modelo se realizó según el procedimiento siguiente:

- Se construyó una tabla de doble entrada para registrar las respuestas de cada experto a cada ítem (tabla 1, anexo 12).
- Se construyó una tabla de frecuencias absolutas tomando a los indicadores como variables y a las categorías de la escala como sus valores (tabla 2, anexo 12).
- Se construyó una tabla de frecuencias acumuladas absolutas a partir de la tabla del paso anterior (tabla 3, anexo 12).
- Se construyó una tabla de frecuencias acumuladas relativas a partir de la tabla construida en el paso anterior (tabla 4, anexo 12).

  Cada frecuencia acumulada relativa que aparece en una celda de esta tabla se toma como la probabilidad de que el indicador tome el valor de la categoría correspondiente a esa celda o de categorías inferiores y se considera que los indicadores son variables distribuidas normalmente con varianza 1 y media 0.
- Se diseñó una tabla (tabla 5, anexo 12) que contiene:
  1) El valor de la distribución normal estándar inversa para cada una de las probabilidades de la tabla construida en el paso anterior, (sin tener en cuenta la columna correspondiente a la categoría 5).
  2) Las sumas de los valores anteriores por filas y columnas.
  3) La media aritmética de los valores por filas y columnas.

     Los promedios de las columnas representan los valores de los límites superiores de las categorías (excepto la última), llamados puntos de corte.

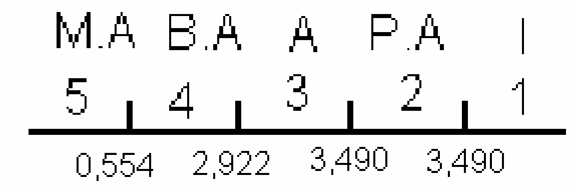
4) El promedio general (N), es decir, el promedio de los promedios de filas.

5) La diferencias entre el promedio general y el promedio de cada fila. Cada uno representa en valor de escala del indicador correspondiente.

6) **Análisis de los resultados de la aplicación del modelo.**

Para analizar los resultados de la aplicación del modelo se ejecutaron dos acciones:

- Se construyó un gráfico lineal con los puntos de corte.



- Se analizó la pertenencia de los valores de escala a cada intervalo de valores de categoría. El resultado de este análisis permitió extraer como conclusión que los indicadores I_1, I_2, I_3, I_4 e I_6 están comprendidos en la categoría de muy adecuado, mientras que los indicadores I_5 e I_7 corresponden a la categoría de bastante adecuado.

Lo anterior significa que los expertos valoran como muy adecuado el ordenamiento de las acciones y operaciones del procedimiento, y su utilidad para la descomposición del conocimiento en unidades, poner de manifiesto relaciones entre distintos conocimientos y determinar las potencialidades integradoras de los distintos objetos matemáticos.

Por otra parte, se valora como bastante adecuado la utilidad del procedimiento para el diseño de sistemas de tareas y la claridad y precisión del lenguaje utilizado.

De acuerdo con estas valoraciones, se puede observar que los dos indicadores relacionados con la utilidad del procedimiento para la determinación de un elemento aglutinador de conocimientos, son evaluados como muy adecuados. También se puede apreciar que los indicadores relativos a la utilidad del procedimiento para la manifestación de relaciones entre los distintos conocimientos, son evaluados con la categoría de muy adecuado y bastante adecuado.

Por tanto, la aplicación del método de la consulta a expertos confirma que los mismos consideran que el procedimiento propuesto es válido como solución del problema de investigación.

Conclusiones del capítulo.

- Con el procedimiento metodológico desarrollado es posible diseñar la integración conocimientos matemáticos, lo cual presupone la elaboración de tareas para que los alumnos y alumnas las resuelvan en las distintas clases que componen una unidad.
- La aplicación del método de expertos indica que los profesores consultados están a favor de la validez del procedimiento didáctico elaborado para producir cambios favorables en la integración de conocimientos en el décimo grado.

Conclusiones.

Como resultado del proceso de investigación llevado a cabo se ha podido comprobar el carácter complejo de la integración de conocimientos matemáticos, dado por la propia naturaleza de estos últimos cuyos fundamentos han sido objeto de análisis de filósofos, psicólogos y didactas.

La necesidad de la integración de conocimientos matemáticos en el proceso de enseñaza-aprendizaje, ha sido subrayada por varios autores de distintas líneas de pensamiento, quienes han fundamentado con hechos que no es posible lograr aprendizajes significativos sin la integración de saberes.

Las herramientas teóricas desarrolladas por el autor de esta tesis han permitido identificar los aportes de distintas teorías y propuestas didácticas a la integración de conocimientos, lo que indica su utilidad para analizar la manifestación del problema de investigación y las contribuciones que se puedan aportar a su solución.

La integración de conocimientos es un proceso que se puede descomponer en las etapas de diseño, ejecución y evaluación. En el nivel preuniversitario los profesores desarrollan estas tres etapas guiados por la experiencia y la intuición, pero no disponen de vías para ejecutarlas de manera científica. Las mayores dificultades de este fenómeno se observan en el diseño, las que traen como consecuencias grandes limitaciones en el resto de las etapas. Por eso la solución del problema está en lograr un diseño adecuado a las necesidades del proceso.

El procedimiento didáctico elaborado y ejemplificado en la investigación está dirigido a lograr el diseño que reclama el problema planteado.

La aplicación del método de expertos ha permitido poner de manifiesto que los criterios de los sujetos consultados son favorables a que la solución propuesta al problema de investigación es válida, debido a su influencia en importantes indicadores que sintetizan el logro de resultados superiores en los niveles de integración de conocimientos.

Recomendaciones.

La aplicación en el preuniversitario del procedimiento elaborado, no puede ser un proceso espontáneo, si se quiere resolver el problema señalado en la investigación. Por eso, se recomienda que en el seno de la Comisión Provincial de Matemática se propongan variantes para aplicar el procedimiento en las escuelas. Una alternativa pudiera ser, organizar sesiones en grupos de profesores y profesoras donde se distribuya el trabajo por unidades y se discutan colectivamente los resultados.

También se recomienda que los resultados de la presente investigación se utilicen en la formación de profesores en el pregrado y en la superación de postgrado.

Por otra parte, el procedimiento elaborado no depende del contenido. Cabe preguntarse si es aplicable en otros grados o niveles de enseñanza, lo cual queda como una problemática abierta a la investigación.

De igual manera, el procedimiento se ha elaborado sólo para el diseño, sería recomendable trabajar en su completamiento para las etapas de ejecución y evaluación de la integración de conocimientos.

Bibliografía.

1. Álvarez de Zayas, Carlos (1995): Metodología de la Investigación Científica. La Habana. Biblioteca Digital.

2. -------------------------------(1998): Pedagogía Como Ciencia (Epistemología de la Educación). Versión en soporte magnético.

3. Álvarez Pérez, Martha y otros (2002): Acercamientos a la interdisciplinariedad en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

4. Arteaga Valdés, Eloy (2000): El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Conrado Benítez García". Cienfuegos.

5. ---------------------- (2001):Las tareas de contenido y las tareas formales para el diagnóstico en la asignatura Matemática. ISP "Conrado Benítez García". Cienfuegos. Cuba.

6. ---------------------- (2001): El diseño de los sistemas de tareas creativas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en el proceso de enseñanza –aprendizaje de la Matemática. ISP "Conrado Benítez García". Cienfuegos. Cuba.

7. Ballester Pedroso, Sergio (1999): "Los ejercicios de Nuevo Tipo", en Revista Educación No. 97. Editorial Pueblo y Educación. Cuba, pp.25-30.

8. Ballester Pedroso, Sergio y otros (1992): Metodología de la Enseñanza de la Matemática, Tomo I. La Habana, Editorial Pueblo y Educación.

9. Ballester Pedroso, Sergio y otros (2002): El Transcurso de las Líneas Directrices en los Programas de Matemática y la Planificación de la Enseñanza. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

10. Bartman, Robert E. (2000): Assessment Annotations for the Curriculum Frameworks. Mathemathics, recuperable en Internet.

11. Batanero, Carmen (1997): "Cuestiones Metodológicas en la Evaluación de los Conocimientos Matemáticos de los Alumnos y de su Evolución", en Revista Quadrante, Vol. 6, No. 2, pp. 25-43. (recuperable en http://www.sectormatematica.cl/articulo.htm).

12. Bosch Casabó, Marianna (2000): "Un punto de vista antropológico: La evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática", recuperable en http://www.ugr.es/local/seiem/IV_simposio.htm

13. Brenes Papayorgo, Magda (2000): "La importancia de la comunicación educativa y el lenguaje verbal en la enseñanza de la matemática", recuperable en http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm.

14. Campistrous Pérez, Luis (1993): Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje. La Habana. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

15. Campistrous Pérez, Luis y Celia Rizo Cabrera (2002): Didáctica y Solución de Problemas. Soporte OREALC-UNESCO. La Habana.

16. ——————————————————————————— (2001): "Sobre las hipótesis y las preguntas científicas en los trabajos de investigación", en Revista Desafía Escolar, año 5, segunda Edición Especial, p. 3-7.

17. ——————————————————————————— (1999 a): "Indicadores e investigación educativa (primera parte)". ICCP. La Habana. Recuperable en http://www.cuba.cu/publicaciones/documentos/pedagogicas/pedagog2/campis.htm

18. ——————————————————————————— (1999 b): "Indicadores e investigación educativa (segunda parte)". ICCP. La Habana. Recuperable en http://www.cuba.cu/publicaciones/documentos/pedagogicas/pedagog3/campi3.htm

19. ———————————————————————————(1998): "Indicadores e investigación educativa. ICCP. La Habana.

20. Carmen, Luis Del (1999): El análisis y secuenciación de los contenidos educativos. Barcelona. Editorial HORSORI.

21. Cerezal Mezquita, Julio y Jorge Fiallo Rodríguez (2001): "Los métodos teóricos en la Investigación Pedagógica", en Revista Desafía Escolar, año 5, segunda Edición Especial, p. 22-33.

22. Coll, César y otros (1992): Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes. Editorial Santillana. España.

23. Comunidad Autónoma de Galicia (CAG) (1993):Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas. Extracto del Decreto 78/1993, recuperable en Internet.

24. Cruz Ramírez, Miguel (2002): Estrategia Metacognitiva en la Formulación de Problemas para la Enseñanza de la Matemática. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.

25. Davídov, Vasili (1988): La enseñanza Escolar y el Desarrollo Psíquico. Moscú. Editorial Mir.

26. -------------------- (1981): Tipos de generalización en la enseñanza. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

27. Díaz-Barriga Arceo, Frida (1990): Metodología de Diseño Curricular para la Educación Superior. México. Editorial Trillas.

28. Engels, Federico (1970): Anti-During. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

29. Fernández Cano, Antonio (s.f): Métodos para Evaluar la Investigación en Psicopedagogía. México. Proyecto Editorial Psicología.

30. Fonseca, Cecilio y Joseph Gascón (2002 a): "Las Organizaciones Matemáticas en el paso de Secundaria a la Universidad. Análisis de los resultados de una Prueba de Matemáticas", recuperable en Internet. España.

31. -- (2000): "Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. IV Simposio de la SEIEM. Huelva. España. (recuperable en Internet).

32. --(2002b): "Organización Matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria". Universidad de Vigo. Barcelona. España.

33. Fraguela Collar, Andrés (1985): Tendencias del Desarrollo de la Matemática en la Actualidad, en Boletín de la SCM, No. 4. La

Habana.

34. Garcés Cecilio, Wilber (2000): El sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la Formación de Profesores de Matemática-Computación. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.

35. García Batista, Gilberto y otros (2002): Compendio de Pedagogía. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

36. García Cruz, Juan Emilio (1999): La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. España (recuperable en Internet).

37. García Osorio, Yasmiry (2001): La integración de conocimientos de Geometría Plana en décimo grado en torno a los conceptos. Trabajo de Diploma. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.

38. Gascón, Josep y Fonseca, Cecilio (2000): "Reconstrucción de una organización matemática alrededor del estudio de la representación gráfica de funciones elementales". España. (recuperable en Internet).

39. Gascón, Josep (1994): "El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas", en Revista Educación Matemática, vol. 6, Nº 3. México, Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 37-51.

40. George Gheverghese, Joseph (1996): La Cresta del Pavo Real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid. Ediciones Pirámide.

41. Gesell, Arnold (1968): El Adolescente de 10 a 16 años. La Habana. Edición Revolucionaria.

42. Gutiérrez, Ángel y Adela Jaime (1991): "El Modelo de razonamiento de Van Hiele como Marco teórico para el Aprendizaje Comprensivo de la Geometría: Un Ejemplo los Giros" en, Revista Educación Matemática, vol. 3, Nº 2. México, Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 49-65.

43. Gil Pérez, Daniel y Miguel de Guzmán Ozámiz (1993): Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. España. Biblioteca Digital.

44. Godino, Juan D. (2001 a): "Confrontación de Herramientas Teóricas para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas", recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/doctorado/confrontacion.pdf

45. ----------------- (2001 b): "Análisis Semiótico y Didáctico de Procesos de Instrucción Matemática", recuperable en http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm.

46. ----------------- (1996): "Significado y comprensión de los conceptos matemáticos", en L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.). Proceedings of the 20 th PME Conference (Vol. 2, pp. 417 – 424). Universidad de Valencia (recuperable en http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm).

47. Godino, Juan D. y Batanero M., Carmen (1998): "Funciones Semióticas en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas", recuperable en http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm.

48. --- (1994): "Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos", en Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, No 3: 325-355 (http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm).

49. González Guajardo, Hernán (1993): "Un Criterio para Clasificar Habilidades Matemáticas", en Revista Educación Matemática, vol.5, Nº 1. México, Grupo Editorial Iberoamérica, p. 46-56.

50. González Rangel, Miguel A. (2002): Una Propuesta para contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la

resolución de problemas de demostración y de cálculo en el nivel medio. Tesis presentada en opción al Grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana.

51. González Valdés, América (1995): PRYCREA. Pensamiento reflexivo y creatividad. La Habana. Editorial Academia.

52. Grijalbo (1998): Diccionario enciclopédico. Tomo 3. Barcelona. España.

53. Guétmanova, Alexandra y otros (1991): Lógica en forma simple sobre lo complejo. Moscú. Editorial Progreso.

54. Hernández Fernández, Herminia (1998): "La Huella de la Matemática en el Pensamiento". Ministerio de Educación Superior. La Habana. Cuba.

55. Hernández, R., C. Fernández y P. Baptista, (1991). Metodología de la Investigación. McGraw-Hill Interamericana de México, S.A. de C.V. México.

56. Jungk, Werner (1978): Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

57. ----------------- (1979): Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1. . La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

58. Kline, Morris (1989): "El fracaso de la Matemática Moderna" (reseña de M.D. González y Guillermina Waldegg), ", en Revista Educación Matemática, vol.1, Nº 1. México, Grupo Editorial Iberoamérica, p.28-32.

59. Labarrere Sarduy, Alberto y otros (1995): El Adolescente Cubano: Una Aproximación al Estudio de su Personalidad. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

60. Labarrere Sarduy, Alberto (1987): Bases Psicopedagógicas de la solución de problemas Matemáticos en la Escuela Primaria. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

61. López Fernández, Ana Gloria (1998): El Aprendizaje Significativo de la

Matemática en el Nivel Medio Básico. Tesis en opción al título de Máster en Didáctica de la Matemática. ISPEJV. La Habana.

62. Malikov, T.S. (sf): “Los componentes lógicos e Intuitivos en las definiciones de los conceptos matemáticos” en, Revista La Matemática en la Escuela, pp. 44-48. Moscú.

63. Mancera Martínez, Eduardo (1991, diciembre): “La Matemática de la Educación Básica: El Enfoque de la Modernización Educativa”, en Revista Educación Matemática, vol.3, Nº 3. México, Grupo Editorial Iberoamérica, p.10-30.

64. ------------------------------ (1992. agosto): “Significados y Significantes Relativos a las Fracciones”, en Revista Educación Matemática, vol.4, Nº 2. México, Grupo Editorial Iberoamérica, p.30-54.

65. Mederos Anoceto, Otilio (2002): “La formación, desarrollo y generalización de conceptos en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática”. Conferencia impartida en el evento RELME 2002.

66. Mederos Anoceto, Otilio y Blanca E. González Rodríguez (2000): “Procedimiento para el estudio de los conceptos”. Flujo ascendente de información. UCLV. Santa Clara. Cuba.

67. Mederos Anoceto, Otilio y Aldo Ruiz Pérez (2002): La Operación Clasificación de Conceptos y su Aplicación al Estudio de los Cuadriláteros Convexos. Memorias del evento internacional RELME 2002. La Habana. Cuba.

68. Mederos, Anoceto Otilio y José E. Martínez (2002): “La resolución de problemas como un medio para el desarrollo, la formación y la generalización del concepto de media geométrica”. UCLV. Santa Clara. Cuba.

69. Microsoft Corporation (2000): Enciclopedia Encarta.

70. MINED (1990): Licenciatura en Educación Carrera Matemática-Computación. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

71. --------- (2002 a): Programas y Precisiones de la Asignatura Matemática en las Secundarias Básicas Seleccionadas. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

72. ------- (1989): Programa de Matemática Décimo Grado. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

73. -------- (2001): Adecuación de los programas de la asignatura Matemática. Décimo, onceno y duodécimo grados. La Habana.

74. -------- (2002 b): Indicaciones para el Trabajo en los Preuniversitarios en el Curso 2002-2003. La Habana.

75. Ministerio de Educación Superior (1991). Resolución 269: Reglamento para el Trabajo Docente y Metodológico en la Educación Superior. La Habana.

76. Moraes, Edith (2001): Las redes conceptuales en la integración de conocimientos, recuperable en http://www.anep.edu.ug/gerenciagrl/areas_inte/areas_pdf/2001/libroareas_2001.pdf

77. Moreno Bayardo, María Guadalupe (1999): “La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. El blanco y el negro de algunas estrategias didácticas”. México. Recuperable en http://www.jalisco.gob.mx/srias/educacion/consulta/educar/dirrseed.htm

78. Muñoz Baños, Félix y otros (1991): Matemática Noveno Grado. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

79. Müller, Horst (1987): Sobre el Desarrollo de Capacidades en la Resolución de Ejercicios de Fundamentación y Demostración en la Enseñanza de la Matemática. La Habana. Impresiones Ligeras.

80. ----------- (1984): Inferencias y demostraciones en la enseñanza de la Matemática. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

81. NCTM (1989): “Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática”, en S.A.E.M Thales. España.

82. --------- (2000): Principles and Estandards por School Mathematics recuperable en http://standards.nctm.org/index.htm

83. Orellana Pérez, Ela (2000): La Sistematización como Principio Didáctico. ISP “Silverio Blanco Núñez”. Sancti Spíritus. Presentado para su publicación en la Revista Pedagogía y Sociedad.

84. Orobio Ocoro, Héctor y Mariana Ortiz Legarda (1997): Educación Matemática y Desarrollo del Sujeto. Colombia. Cooperativa Editorial Magisterio.

85. Palacio Peña, Joaquín (2002): Contextualización de problemas matemáticos. ISP “José de la Luz y Caballero”. Holguín. Cuba. En proceso de publicación.

86. ------------------------ (2000): La Fundamentación Matemática desde la Edad Temprana. Manzanillo. Cuba. Memorias del Evento Internacional Compumat 2000.

87. Paz Sordía, Antonio (1968): Geometría. Matemática Tercer Curso. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

88. Peltier, Marie-Lise (1993): "Una Visión General de la Didáctica de las Matemáticas en Francia" en Revista Educación Matemática, vol. 5, Nº 2. México, Grupo Editorial Iberoamérica, p.4-10.

89. Pérez Pérez, Ramón (1994): El curriculum y sus componentes. Barcelona, España. Editorial Oikos-Tau.

90. Pérez Rodríguez, Gastón e Irma Nocedo León (1983): Metodología de la Investigación Pedagógica y Psicológica. La Habana. Editorial Pueblo y Educación

91. Piaget, Jean (1974): Seis estudios de psicología. Buenos Aires. Argentina. Ediciones Corregidor.

92. Radford, Luis (1990): "Organización Lógica de Enunciados en una Demostración", en Revista Educación Matemática, vol. 2, Nº 1. México, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 21-29.

93. Rangel Gómez, Yuri L. (2002 a): Dirección del Aprendizaje y Desarrollo Profesional. Sancti Spíritus. Cuba. Editorial Luminarias.

94. ------------------------------ (2002 b): "Una tríada dialéctica para la dirección del aprendizaje: principios, leyes y estrategia didáctica", en Revista Pedagogía y Sociedad No.5. Sancti Spíritus. Cuba.

95. Rebollar Morote, Alfredo (2000): Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba.

96. Rizo Cabrera, Celia y otros (1990): Matemática 5. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

97. Rizo Cabrera, Celia y otros (1990): Matemática 6. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

98. Rodríguez Rebustillo, Marisela y Rogelio Bermúdez Sarguera (1996): La personalidad del adolescente. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

99. Rojo, Miguel (2002): Acerca del conocimiento. UH-CELAEE. Cuba.

100. Rosental, M. y P. Iudin (1981): Diccionario Filosófico. La Habana. Editora Política.

101. Rubinstein (1977): Principios de Psicología General. La habana. Editorial Pueblo y Educación.

102. Ruiz Pérez, Aldo (2002): “La etapa de la formación de un concepto matemático en el proceso pedagógico” , presentado para su publicación en la Revista Pedagogía y Sociedad. Sancti Spíritus, Cuba.

103. Santaló, Luis A. (1998): “La enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario de 12 a 16 años de Edad”. Argentina. Centros de Apoyo a la Educación Matemática.

104. Santos Trigo, Luz Manuel (1994): "La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas", en Cuadernos de Investigación, Nº 28, año VII. México.

105. ---------------------------- (1992): "Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfel: Una Propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas", en Revista Educación Matemática, vol. 4, Nº 2. México, Grupo Editorial Iberoamérica, p. 16-24.

106. Shardakov, M.N. (1978): El Desarrollo del Pensamiento del Escolar. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

107. Sigarreta Almira, José María (2001): Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP “José de la Luz y Caballero”. Holguín.

108. Starke-Türke (1974): Fundamentos teóricos de la enseñanza de la geometría. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

109. Talízina, Nina F. (1988): Psicología de la Enseñanza. Moscú. Editorial Progreso.

110. Taylor, S. J. Y R, Bagdon (1998): Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona. Editorial PIADOS.

111. Tauber, Liliana Mabel (2000): “La Construcción del Significado de la Distribución Normal a Partir de Actividades de Análisis de Datos”. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe. Argentina, recuperable en http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm

112. Torres Fernández, Paúl (2000): La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos. ISPEJV. Impresión ligera.

113. -------------------------(2001): “¿Qué hipótesis sugieren tres años de investigaciones sobre Educación Matemática en La Habana?”. Congreso Pedagogía 2001.

114. ----------------------- (sf): La instrucción Heurística de la Matemática Escolar. La Habana. ISPEJV.

115. Torres Fernández, Paúl y otros (1998): “Estudio diagnóstico de las causas de los bajos resultados de los egresados de los preuniversitarios habaneros en la prueba de ingreso de Matemática a la Educación Superior”. Ciudad de la Habana. ISPEJV.

116. Vygotsky, L. S. (1981): Pensamiento y Lenguaje. La Habana. Edición Revolucionaria.

117. --------------- (1989): Obras completas. Tomo V. La habana. Editorial Pueblo y Educación.

118. Wenzelburger, Elfriede (1990 a). “¿Cómo enseñar hoy la Matemática para Mañana?, en Revista Educación Matemática, vol.2, Nº 2. México, Grupo Editorial Iberoamérica, p.14-21.

119. ------------------------------ (1990 b): Curriculum and Evaluation Standars for School Mathemathics National Council for Teacher of Mathematics 1988. Reseña bibliográfica, en Revista Educación Matemática, vol.2, Nº 1. México, Grupo Editorial Iberoamérica, pp.67-71.