INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO
"Félix Varela Morales"
Facultad de Educación Media Superior
Departamento de Ciencias Exactas

LA INTEGRACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS A PARTIR DE LAS RELACIONES CONCEPTUALES CLÁSICAS EN LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

AUTOR: MsC. Aldo Medardo Ruiz Pérez

Sancti Spíritus

2007

INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO
"Félix Varela Morales"
Facultad de Educación Media Superior
Departamento de Ciencias Exactas

LA INTEGRACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS A PARTIR DE LAS RELACIONES CONCEPTUALES CLÁSICAS EN LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

AUTOR: MsC. Aldo Medardo Ruiz Pérez

TUTOR: Dr C Otilio Bienvenido Mederos Anoceto

Sancti Spíritus

2007

Dedicatoria

A la memoria de mis padres,

quienes contribuyeron

decisivamente a mi educación.

A mi otra familia y

especialmente a mis hijas y

esposa que me han brindado

su apoyo

Agradecimientos

- Al Dr C Otilio Mederos Anoceto, mi tutor, por su ayuda, sus valiosas enseñanzas, orientaciones y sugerencias.
- Al Dr C Ramón Luis Herrera Rojas por la revisión de la redacción científica y las recomendaciones ofrecidas.
- Al Dr C Mario Armando Gómez Hernández por sus recomendaciones.
- A la MSc. Margarita Pérez Rodríguez por su apoyo y ayuda en los medios para la mecanografía e impresión.
- Al Dr C Reinaldo Cueto Marín por su contribución a que esta tesis se imprimiera.
- A mis compañeros y compañeras del Departamento de Ciencias Exactas que me animaron en todo momento.
- A la Sociedad de Matemática y Computación de Sancti Spíritus, especialmente su presidente MSc. Laudelino Solano Arias, por el apoyo brindado.
- A los investigadores del Centro de Estudios Pedagógicos del ISP Silverio Blanco Núñez, por sus consejos y sugerencias.
- A todos a los que participaron como expertos y demás personas que hicieron posible que esta tesis se terminara.

SÍNTESIS

En la tesis se expone un modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en la educación preuniversitaria, así como los fundamentos teóricos de este modelo y una evaluación basada en criterios de expertos y en un pre-experimento pedagógico.

En los fundamentos teóricos del modelo, se considera que cualquier concepto matemático posee un contenido, formado por una colección de propiedades que son satisfechas por todos los objetos o relaciones de una clase, denominada extensión del concepto.

Las relaciones conceptuales clásicas se establecen entre dos o más conceptos mediante las operaciones y relaciones conjuntistas entre sus extensiones.

La integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas se concibe como la determinación y representación de estas relaciones y eventualmente de relaciones entre el cardinal (números de elementos) de las extensiones de los conceptos involucrados y de otros que emergen en este proceso.

El contenido del modelo abarca lo referido a la planificación y a la dinámica de la integración conceptual abordada en la tesis. Esta dinámica trascurre en las etapas: 1) elaboración de técnicas que facilitan el proceso, 2) determinación y representación de relaciones conceptuales utilizando estas técnicas y 3) aplicación de conocimientos sobre las relaciones conceptuales determinadas, a la resolución de tareas.

En la tesis se describen estas etapas y se incluyen sus formas de implementación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la educación preuniversitaria.

También se expone un procedimiento para la planificación a largo plazo, cuya aplicación garantiza obtener colecciones de conceptos comparables respecto a un concepto importante, con el objetivo de su integración en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la evaluación del modelo por expertos resultaron criterios favorables acerca de su calidad. En su implementación en la práctica, con un grupo de estudiantes de décimo grado, se obtuvieron resultados a favor de su validez.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel medio en Cuba han estado sometidas a un proceso de transformaciones, estimulado por varios factores donde se incluyen: la aparición de nuevas necesidades sociales que requieren de una respuesta desde la escuela, el surgimiento de nuevas ideas para resolver viejos encargos a la educación escolarizada, el impacto del uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), la elevación del nivel académico de los profesionales de la educación y el incremento de su actividad investigativa, el rescate de las ideas más revolucionarias de la tradición pedagógica cubana y la influencia de tendencias pedagógicas internacionales, especialmente de las surgidas en la amplia actividad investigativa que se produce en el campo de la didáctica de la Matemática en busca de soluciones a los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje.

Los cambios actuales de concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel medio, se desarrollan en un contexto donde se aspira a que la escuela tenga una mayor influencia que la alcanzada en otras etapas del desarrollo educacional cubano, en la formación integral de los adolescentes y jóvenes.

Esta aspiración impone varias exigencias a alcanzar, entre las cuales está la idea de que todos los alumnos y alumnas que terminan los estudios correspondientes a un nivel o grado, los continúen en los niveles o grados subsiguientes hasta apropiarse de una elevada preparación cultural y técnica que reclama el quehacer laboral y social de la nación.

Una segunda exigencia resultante del papel que se espera de la escuela, es la unidad de la influencia educativa a ejercer por los distintos agentes sobre los educandos, la cual no se puede satisfacer al margen de la instrucción a recibir por ellos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las diferentes disciplinas, según indican los principios pedagógicos en que se sustenta la teoría y la práctica del magisterio cubano y especialmente el referido a la “unidad de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador” (Addine, González & Recarey, 2002: 90).

La unidad de influencia sobre los educandos mediante la instrucción no se puede lograr, si los conocimientos que conforman los contenidos de las distintas disciplinas, se aprenden desconectados unos de otros o si dentro de una misma disciplina no se promueve un aprendizaje basado en la determinación de relaciones, que requiere de la apropiación por parte del alumno de las técnicas que lo hacen posible y constituye la esencia de la integración de conocimientos disciplinares.

Entre las razones aportadas por distintos pedagogos e investigadores para fundamentar la necesidad e importancia de la integración de los conocimientos matemáticos, y que comparte el autor de la presente investigación, se pueden mencionar las siguientes:

- Propicia el aseguramiento de los conocimientos adquiridos mediante su recuperación en varios momentos del proceso para relacionarlos con otros (Cook & Mayer, 1983, citados por Beltrán, 1998: 41).
- Es la condición básica para que se produzca un aprendizaje significativo, donde la apropiación de los nuevos conocimientos resulta del establecimiento de relaciones entre los ya adquiridos (Pozo, 1998: 35; Sfard, citada por Villavicencio, 2004i: 6).
- Permite poner de manifiesto la naturaleza sistémica, en forma significativa, del conocimiento matemático (Guzmán & Navarro, 1993: 51).
- Además de contribuir a la construcción de nuevos conocimientos, propicia el desarrollo de estrategias que se pueden transferir a otras situaciones y contextos (National Council for Teacher of Mathematics [NCTM], 2000b).
- Fortalece los recursos de los alumnos para plantear y resolver problemas contextuales o cognitivos (NCTM, 2000b).

La necesidad e importancia señaladas de la integración de los conocimientos matemáticos, válidas para cualquier nivel escolar, se acentúan en la Educación Preuniversitaria. Hay, por lo menos, dos razones explicativas de este fenómeno: por una parte, el alumno ha alcanzado un desarrollo psíquico que le permite establecer relaciones complejas entre los conocimientos adquiridos con anterioridad y entre estos y los nuevos conocimientos (Gesell, 1968; Labarrere, 1995; Rodríguez & Bermúdez, 1996; MINED, 2005a), y por otra, en este nivel educativo se impone que el alumno se prepare para enfrentar estudios universitarios, cuyas condiciones previas incluyen el desarrollo de un pensamiento caracterizado por la integración de los saberes apropiados.

En una de las direcciones del quehacer metodológico derivado del sistema de transformaciones que se aplica en las concepciones del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria en Cuba; el cual da continuidad a la idea esencial aplicada en la Secundaria Básica (SB) a partir del curso escolar 2002-2003, basada en el "cambio en los métodos y estilos de trabajo"; se explicita la necesidad acerca de la sistematización continua de lo aprendido, de modo que " […] se integre el saber adquirido por los alumnos en distintas áreas de la Matemática […]" (Ministerio de Educación de Cuba [MINED], 2004a: 7; MINED, 2005a: 9).

Aunque la integración de conocimientos matemáticos puede basarse en relaciones de distintos tipos, al considerar el papel atribuido por varios psicólogos a los conceptos en el pensamiento (Vigotski; 1989a: 166; Rubinstein, 1977: 380; Talízina, 1988: 155) y sus funciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Mederos & González, 2000: 3; MINED, 2007), resulta que la determinación de relaciones entre conceptos y su representación (integración conceptual), debe ser un objeto de atención prioritaria. Al respecto Casas (2002: 76) ha señalado: "no hay verdadero conocimiento hasta que los conceptos no están puestos unos en relación con otros".

Un concepto es un conocimiento acerca de una clase de objetos o de relaciones entre objetos que se forma en un proceso complejo. A la colección de propiedades de los objetos de esta clase −que permiten diferenciarlos de otros e identificarlos− utilizada para definir el concepto, es su ***contenido***. La clase que agrupa todos los objetos con esas propiedades, se denomina ***extensión*** del concepto y el número de sus elementos es su ***cardinal***.

Si bien entre los conceptos matemáticos se pueden establecer relaciones de distintos tipos, son muy importantes las que se instituyen por medio de las relaciones y operaciones conjuntistas entre sus extensiones, las cuales −por su universalidad y para diferenciarlas de otras− han sido denominadas en esta tesis, ***relaciones conceptuales clásicas***.

La integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas −que se caracterizará con más amplitud en el cuerpo de este trabajo − es el proceso dirigido a la determinación y representación de estas relaciones entre dos o más conceptos y eventualmente, además, de relaciones entre el cardinal de las extensiones de nuevos conceptos que resultan de este proceso o entre el cardinal de las extensiones de esos nuevos conceptos y las de conceptos de partida.

La integración de conceptos está muy relacionada con otras de las direcciones del quehacer metodológico derivado de las transformaciones del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, la cual se refiere al logro de la comprensión conceptual del contenido (MINED, 2005a: 9), una exigencia a este proceso en todos los niveles educativos, que ha sido estudiada por investigadores de distintas tendencias y escuelas (Skemp, 1976; Glasersfeld, 1987; Sierpinska, 1990; Pirie & Kieren, 1990; Dubinsky, 1991, citados por Meel, 2003; Godino, 1996 y 2002d; Bosch, 2000; Romero, 2000; Meel, 2003; Gallardo, 2004) a partir de reconocer la justeza de la tesis que se expresa en frases como "la acumulación de conocimientos desconectados no permite una comprensión integrada y flexible ni facilita el aprendizaje de los alumnos" (Martinet, Raymond & Gauthier, 2004: 63).

En la nueva proyección de competencias, generales y específicas, y de líneas directrices referidas al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (MINED, 2007), que se ha concebido por la Comisión Nacional de Matemática del MINED, la integración de conceptos matemáticos está contenida en una competencia matemática específica denominada "operar con conceptos".

Los resultados obtenidos en pruebas aplicadas, en los cursos 2003-2004 y 2004-2005, a las unidades de una muestra aleatoria compuesta por estudiantes de todos los grados correspondientes a los preuniversitarios de la provincia Sancti Spíritus, en los marcos del proyecto de investigación Mapren-Pre (Ruiz y otros, 2005), indican que su nivel de integración conceptual, es bajo. En estas pruebas el porcentaje de respuestas correctas a los ítems utilizados para medir este proceso y sus resultados, no superó el 25% del número de respuestas a estos ítems.

Un análisis cualitativo de las respuestas erróneas, indica que, por un lado, en una parte significativa de los estudiantes, el nivel de dominio de los conceptos a integrar es muy bajo, y por otro, que en los casos donde se muestra más dominio, no conocen las relaciones conceptuales clásicas entre conceptos muy tratados en la escuela –como los relativos a los números– ni disponen de técnicas para determinarlas.

Una situación similar a la anterior, también se ha apreciado en otras provincias del país, pues en la "estrategia para la enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en el curso

2006-2007" –elaborada por la Comisión Nacional de Matemática– se señala que una de las dificultades que presentan los alumnos, es la "falta de una comprensión conceptual" (MINED, 2006: 1).

Los resultados obtenidos en los alumnos con las pruebas aplicadas, se corresponden con los de una encuesta administrada a sus profesores (anexo 1), muchos de los cuales (más del 80%) manifiestan que casi nunca dan prioridad a la elaboración de tareas dirigidas a la determinación de relaciones conceptuales por parte de los alumnos y al análisis de la estructura del contenido, y un mayor número de ellos (90,4%) expresan, que los ejercicios integradores se planifican para las últimas clases de la unidad.

En una entrevista a 20 docentes que impartían Matemática en preuniversitarios de Sancti Spíritus en el curso escolar 2004-2005 (anexo 2), los cuales matricularon un diplomado sobre interdisciplinariedad, se comprobó que 15 (75 %) no conocían lo esencial de la integración conceptual, pues asociaban este proceso sólo a las relaciones interdisciplinarias o a las relaciones entre objetos de distintas áreas de la Matemática.

De los 20 docentes entrevistados, 16 de ellos (80 %) identificaron las tareas dirigidas a la recuperación con las enfocadas a la integración, mostrando pocos conocimientos sobre las características que estas últimas deben tener.

En general, los conocimientos de los docentes entrevistados, acerca de la planificación y dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje desde la clase, en función de que sus alumnos integren conceptos, eran limitados.

En las video-clases que el MINED ha puesto a disposición de todos los profesores y profesoras que imparten Matemática en los preuniversitarios del país, en la actividad de quien expone el contenido, no se observan con frecuencia acciones dirigidas a la integración de conceptos matemáticos y las encaminadas a la integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas, sólo se aprecian cuando se tratan los dominios numéricos. Una situación similar se observa en los libros de texto y en el software educativo Eureka.

En la guía que se utiliza en Cuba para la observación y evaluación de una clase basada en el uso del video o la televisión (MINED, 2004k), se incluyen dos indicadores (2 y 16) encaminados a identificar la actuación del docente que dirige la clase en el aula, en función de la integración de conocimientos. Tales indicadores se refieren a si el docente: "Propicia que el alumno establezca nexos entre lo viejo conocido y lo nuevo por conocer" (2) y si "vincula el contenido que se ofrece en el video con los objetivos previstos, teniendo en cuenta el carácter integrador y la interdisciplinariedad" (16). Los posibles valores que se les asocian a estos indicadores son "se observa", "no se observa" y "no se ajusta a esta clase".

En los resultados de las observaciones de clases, mediante el uso de la guía, en el curso 2004-2005 en los preuniversitarios de la provincia espirituana, se aprecia que la frecuencia relativa del valor "se observa" para el indicador 2, es bajo (43,1%); lo que ocurre también con el indicador 16 (31,4%).

Según se aprecia en la Estrategia de la Comisión Nacional, tal dificultad ha sido detectada en otras provincias del país, pues en ésta se expresa que "en las clases no siempre se propicia la comprensión conceptual" (MINED, 2006: 1).

La búsqueda de información, por el autor de esta tesis, sobre las causas de las insuficiencias en la preparación de los docentes para propiciar la integración de conceptos matemáticos, condujo a la revisión de los programas de las asignaturas correspondientes a la disciplina Matemática de la Educación Preuniversitaria (MINED, 2005a; MINED, 2005b; MINED, 2005c). Se pudo verificar la ausencia de orientaciones encaminadas a que se logre la integración conceptual por los alumnos. Sólo se indica la intención (el qué), pero no la manera de materializarla (el cómo).

La determinación de causas, también llevó a la revisión del diseño de carreras donde se han formado y se forman profesores de Matemática (MINED, 1990; MINED, 2003). Se pudo constatar, que aunque en las funciones didácticas y situaciones típicas que contempla la disciplina Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM), se presta atención a la integración conceptual mediante la determinación de relaciones conceptuales clásicas, los contenidos que al respecto se incluyen, no contienen elementos esenciales para facilitar este proceso, tales como los tipos de tareas docentes y las técnicas a utilizar.

En la búsqueda de información sobre investigaciones realizadas en nuestro país y el extranjero acerca de la problemática citada (Buzón & Silverio, 1986; Fauconnier & Turner, 1998; S. Ballester, 1999; Fonseca & Gascón, 2000; Arnaiz, 2005a; Arnaiz, 2005b; Casas, 2002; Brinkmann, 2001; Brinkmann, 2002; Brinkmann, 2003a; Brinkmann, 2003b; Brinkmann, 2005; Turner, 2005), no se han identificado propuestas dirigidas a la integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas, que puedan ser aplicadas a la planificación y dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria cubana en correspondencia con las exigencias actuales.

Trabajos realizados en el extranjero, referidos al tema, han aportado algunas técnicas como los mapas conceptuales, mapas mentales y redes asociativas pathfinder (Ruiz, Algarabel, Dasí & Bitarque, 1998; Brinkmann, 2002; Casas; 2002), pero en ninguna de ellas se considera lo específico de los conceptos matemáticos ni las particularidades de la Educación Preuniversitaria.

Si se tiene en cuenta la contradicción existente entre la necesidad de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas y su estado actual, que se aprecia en la correlación entre las dificultades manifestadas por los y las estudiantes, la baja preparación de los y las docentes para resolverlas y las insuficiencias del currículo de los planes de formación de profesores, las cuales tienen como una causa común la necesidad de desarrollar la didáctica para dar respuesta a esta demanda, puede afirmarse la existencia del siguiente:

Problema científico:

¿Cómo contribuir a que los alumnos y alumnas de la Educación Preuniversitaria, integren conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática?

El problema se da en el **objeto** “proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria” y se centra en el **campo de estudio** “integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas”.

El autor asume, siguiendo a Valle (2007: 11), que un modelo didáctico es una “representación de aquellas características esenciales del proceso de enseñanza–aprendizaje o de alguno de sus componentes con el fin de lograr los objetivos previstos.”

El nivel de desarrollo de la didáctica general y la didáctica de la Matemática en relación con la integración conceptual y los aportes de la metodología de la investigación, acerca de la relación entre el problema y el resultado científico (Omelianovsky y otros, 1985: 339; Ll. Ballester, 1999; Armas, Lorences & Perdomo, 2003; Marimón, 2004; Fuentes, Matos & Cruz, 2004), indican que una solución del problema científico que ha originado este trabajo ha de ser un modelo didáctico, pues exige representar la esencia de un proceso inmanente al de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Por esta razón se fija el siguiente ***objetivo***:

Elaborar un modelo didáctico cuya implementación contribuya a que los alumnos y alumnas de la Educación Preuniversitaria integren conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Como solución anticipada del problema de investigación se plantea la ***hipótesis*****:**

La implementación, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, de un modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, en que se conciba la elaboración de técnicas facilitadoras de la determinación y representación de estas relaciones, la aplicación de estas técnicas en correspondencia con las necesidades del desarrollo conceptual y la aplicación de los conocimientos resultantes en la resolución de tareas, y se articule con las concepciones esenciales de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM), referidas a la planificación y dinámica de este proceso, contribuye a que los alumnos y alumnas integren conceptos matemáticos a partir de estas relaciones.

Para el desarrollo de la investigación se ejecutaron las ***tareas científicas*** siguientes:

1. Realización de un análisis crítico de contribuciones de las ciencias a los fundamentos de la investigación, que comprenda los conceptos matemáticos, la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas y las concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria en su relación con esta integración.

2. Diagnóstico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en los alumnos y alumnas de preuniversitario y su conexión con la contribución de las video-clases, de otros medios didácticos y la preparación de los docentes para dirigirla en relación a las orientaciones metodológicas de los programas de la disciplina Matemática y a los planes de formación de profesores.

3. Estructuración de un modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

4. Evaluación por expertos del modelo didáctico concebido.

5. Evaluación de los efectos de la implementación del modelo en el la práctica escolar mediante un pre-experimento pedagógico.

En el desarrollo de la investigación se emplearon varios métodos, que atendiendo a la tipología desarrollada por algunos autores (Pérez, García, Nocedo & García, 1996: 12; Cerezal & Fiallo, 2001), se pueden resumir en los siguientes:

Métodos teóricos.

Los métodos ***analítico-sintético*** e ***inductivo-deductivo,*** para el estudio de las fuentes de información, extraer de ellas regularidades y tendencias relacionadas con la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, fundamentar el problema de investigación y operacionalizar la variable dependiente; el método de ***análisis histórico y lógico***, para analizar el comportamiento del problema de la investigación en los diferentes enfoques estudiados y la evolución de las soluciones propuestas; el método del ***enfoque sistémico*** para estudiar el conocimiento matemático y el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, y el método de ***modelación***, para la elaboración del modelo didáctico.

Métodos empíricos.

La ***encuesta***, para buscar datos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto; el ***análisis de los productos del proceso pedagógico,*** la ***observación*** y la ***triangulación***, para valorar el proceso y los resultados del desempeño de los alumnos y alumnas en la resolución de las tareas relativas a la integración conceptual estudiada; la ***entrevista***, para buscar hechos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto; la ***evaluación por criterios de expertos***, para la valoración del modelo y el ***pre-experimento*** pedagógico, para la corroboración del modelo en la práctica escolar.

Métodos matemáticos y estadísticos.

En la investigación también se han utilizado métodos de carácter matemático o estadístico, entre ellos**,** métodos de ***muestreo***, para la selección de muestras de estudiantes y tareas; ***métodos de la estadística descriptiva***, en la caracterización del desempeño de los estudiantes en la resolución de las tareas y ***procedimientos de la teoría combinatoria***, para la determinación de variaciones y combinaciones de objetos.

Las ***contribuciones*** teóricas de la tesis consisten en: 1) una concepción de los conceptos matemáticos que agrega a sus componentes lógicas, los significados y las representaciones, 2) una caracterización didáctica de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas y 3) un procedimiento general sobre la ejecución de este proceso por el alumno en el que se desarrollan y articulan varias técnicas facilitadoras.

La ***significación práctica*** de la investigación consiste en que aporta: 1) un procedimiento para la planificación a largo plazo de la integración conceptual que aborda, 2) una tipología de tareas de aprendizaje para ejecutar este proceso con su correspondiente ejemplificación, 3) recomendaciones para el transcurso de las funciones didácticas en términos de la actividad del docente y la de los alumnos y alumnas y 4) dos modelos estadísticos para la evaluación mediante pruebas de la integración conceptual investigada.

Algunos de estos aportes han sido divulgados, parcialmente, en revistas científicas, sitios Web y en la modalidad de curso y ponencia en eventos científicos (anexo 3).

La ***novedad científica*** de esta investigación consiste, en que como resultado de ella, se ha elaborado un modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, no concebido por otros investigadores con anterioridad.

En la elaboración de la tesis se han tenido en cuenta criterios de Valle (2007) acerca de las componentes de un modelo en el marco de las ciencias pedagógicas y de las acciones a ejecutar para su elaboración, así como los puntos de vista de autores del Instituto Superior Pedagógico “Félix Varela” (Armas, Lorences & Perdomo, 2003; Marimón, 2004), quienes conciben que la presentación de un modelo como resultado científico de una investigación pedagógica, debe contener –además de sus fundamentos– el contexto social donde se inserta, una representación gráfica, la explicación, las formas de instrumentación y una evaluación.

La tesis está estructurada en introducción, un cuerpo, compuesto por tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. Cada capítulo está dividido en secciones, algunas secciones en epígrafes y ciertos epígrafes en apartados.

En el capítulo I se exponen los fundamentos teóricos del modelo didáctico elaborado, el II contiene el modelo y en el III se presenta una evaluación por expertos de éste, así como los resultados de su implementación en la práctica escolar mediante un pre-experimento pedagógico.

CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS DE UN MODELO DIDÁCTICO DE LA INTEGRACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

El presente capítulo contiene una síntesis de los fundamentos del tema de investigación de la tesis, referido a la integración de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, que se han conformado a partir de la revisión de una amplia bibliografía, que incluye fuentes sobre filosofía, psicología, pedagogía, lógica, lingüística, metodología de la investigación pedagógica, didáctica general, matemática, estadística y didáctica de la Matemática.

El análisis de la bibliografía se ha realizado a partir de las posiciones filosóficas del materialismo dialéctico, de los postulados fundamentales de la psicología histórico-cultural, de los aportes de la pedagogía socialista (Chávez, Permuy & Suárez, 2004), de las ideas desarrolladas por pedagogos cubanos que tienen su base en estos aportes y en nuestra tradición y práctica pedagógicas y de la conjugación de los aportes de la didáctica general, que se sustenta en estas ideas pedagógicas, y los relativos a la metodología de la enseñaza de la Matemática (MEM), introducida en Cuba según las concepciones de la escuela de la otrora República Democrática Alemana y desarrollada por investigadores cubanos.

Desde estas posiciones fue posible realizar un análisis de la bibliografía e incorporar en los fundamentos, elementos que se basan en los aportes de autores de diferentes escuelas y tendencias, particularmente en lo que respecta a los conceptos matemáticos, aprendizaje escolar y proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

El desarrollo del capítulo se ha dividido en tres secciones, donde se han sintetizado las contribuciones y limitaciones que los trabajos revisados tienen para el tema de investigación, cuyo centro son las relaciones conceptuales clásicas. En la primera sección, se analizan los conceptos matemáticos como formas del conocimiento matemático, tanto disciplinar como escolar, se describen las relaciones conceptuales clásicas y las operaciones con conceptos; en la segunda, se analizan concepciones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria y su vínculo con la integración conceptual y en la tercera, se caracteriza el concepto de integración de conceptos matemáticos a partir de estas relaciones.

1.1. Los conceptos matemáticos como formas del conocimiento matemático. Relaciones conceptuales clásicas y operaciones con conceptos

Bajo el enfoque del materialismo dialéctico (Guétmanova, 1989: 8), el ***conocimiento*** es el proceso en virtud del cual la realidad se refleja y reproduce en la mente del hombre durante la ejecución de una actividad. Pero este proceso en cada una de sus fases, en el tiempo, proporciona un resultado comunicable que puede interpretarse como el conocimiento visto en su faceta de producto. En consecuencia, el conocimiento es un proceso y un producto (Rojo, 2002: 1; Davídov, 1998: 174).

El conocimiento matemático es el que construye un individuo o grupo cuando ejecutan una actividad de carácter matemático; la cual se caracteriza por una generalización sistemática y proporciona un modo específico de reflejar la realidad material o mental en forma de estructuras abstractas. Cuando esta actividad se realiza con fines investigativos para resolver algún problema abierto de la matemática, el conocimiento que se construye en ella se llama ***conocimiento matemático disciplinar***.

Este conocimiento se registra en obras que escriben sus productores u otras personas interesadas en su comunicación. Posteriormente, puede resultar necesaria su inclusión en los contenidos de los programas docentes de una escuela, con el objetivo de que los alumnos lo reconstruyan y se lo apropien en la ***actividad de estudio*** (Davídov & Slobódchikov, 1991: 128). El ***conocimiento matemático escolar*** incluye, tanto el que aparece en estos programas (conocimiento institucional) –que resulta del conocimiento disciplinar por una transformación, llamada ***transposición didáctica*** (Chevallard, 1999: 229)– como el que los alumnos reconstruyen en la actividad de estudio (conocimiento individual).

Teniendo en cuenta las formas del conocimiento que reconoce la epistemología marxista (Guétmanova, Petrov & Panov, 1991: 8) y la epistemología de la ciencia (Rojo, 2002: 2), y considerando las características de la actividad matemática y de las obras donde se plasman sus resultados (Brousseau, 1986 y 1999; Ballester y otros, 1992: 46; Guzmán & Navarro, 1993; Guzmán, 1998; Sierpinska & Lerman, 1996; Sfard y otros, 1997; Sfard, 2000; Arzarello, Hefendehl, Hebeker & Turnau, 1999; Burton, 1999; Puig, 2000; Griffiths, 2000; Larios, 2000 y 2002; Gascón, 2001; Sáenz, 2001; Godino 2001a: 10 y 2001b: 2; Gómez & Rico, 2002: 14), se puede afirmar que el conocimiento matemático, tanto disciplinar como escolar, se expresa en ***preguntas***, ***conceptos***, ***proposiciones***[1] (***juicios)*** referidas a los conceptos (axiomas o teoremas), ***razonamientos*** para obtener o demostrar los teoremas y en los ***procedimientos*** utilizados para resolver los problemas intra o extramatemáticos que estimulan la génesis de nuevos conocimientos o la aplicación de los ya construidos.

Las preguntas, constituyen una forma muy importante del conocimiento matemático, tanto disciplinar como escolar, pues están muy relacionadas con los problemas, los cuales en su estructura siempre las incluyen de forma explícita o implícita, y son uno de los motores que promueven la construcción de este conocimiento. En tal sentido Brousseau (1986: 39) ha señalado que “encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar soluciones.”.

En estrecha conexión con las respuestas de las preguntas están las ***conjeturas***, las cuales son proposiciones que expresan un juicio supuestamente verdadero, cuya veracidad cuando se formulan queda pendiente de demostración.

Pero para que el pensamiento de contenido matemático se realice en la palabra, se necesita de la producción continua de ***signos***, que junto a los del lenguaje común, incluyendo el gestual, permiten que este proceso se ejecute. Estos signos, que funcionan en interacción unos con otros conformando sistemas, se denominan ***ostensivos***[2], para diferenciarlos de las entidades del conocimiento que ellos representan y de otros posibles conocimientos del sujeto, llamados no ostensivos (Bosch, 2000: 19; Godino, 2001a: 11).

La importancia del trabajo con los ostensivos en su relación dialéctica con los no ostensivos, llevó a que en la década del 70 del siglo XX se iniciara un nuevo campo de investigación en la didáctica de la Matemática, de gran actualidad, que consiste en explicar la cognición matemática en el ámbito escolar a partir del concepto de ***representación***, el cual tiene un carácter polisémico (Font, 2005).

A pesar de la variedad de significados que tiene el término “representación” en la didáctica de la Matemática, en general se refiere a un objeto mental o material que en la actividad matemática sustituye a otro objeto con el objetivo de estudiarlo y conocerlo mejor. Las

---

[1] Una proposición es la expresión de un juicio. Los juicios que relacionan a un objeto con sus propiedades se llaman categóricos y están compuestos por sujeto, predicado y cópula, aunque también pueden contener un cuantificador, lo cual es muy común en la matemática. En los juicios categóricos que contienen un cuantificador, según la calidad de la cópula y el cuantificador, se distinguen cuatro tipos: universal afirmativo (A), universal negativo (E), particular afirmativo (I) y particular negativo (O) (Guétmanova, 1989: 85).

[2] Del latín “ostendere” que significa presentar con insistencia.

representaciones externas tienen naturaleza semiótica y se refieren a los ostensivos, mientras que las internas (mentales) se refieren a los no ostensivos.

En Cuba, con la introducción de la MEM, como enfoque metodológico que sustentó el llamado “Plan Alemán”, los conceptos pasan a ocupar un lugar importante al ser incluidos en las llamadas ***situaciones típicas*** de la enseñanza de la Matemática (Jungk, 1979: 58; Torres, 1994: 87; Torres, 2000a: 24), que se conservan en el enfoque metodológico del currículo de Matemática para la Educación Preuniversitaria aplicado en la actualidad.

En una primera aproximación, puede considerarse que un concepto es un conocimiento acerca de una clase de objetos o de relaciones entre objetos, el cual se forma en un proceso complejo, cuyos resultados esenciales son:

- Una colección de propiedades de los objetos o de las relaciones entre objetos, que permiten diferenciarlos de otros e identificarlos (sistema de características necesarias y suficientes o sistema esencial de propiedades), la cual recibe el nombre de ***contenido*** del concepto (C) (Ballester y otros, 1992: 282) o núcleo intensional (Bunge, 1985, citado por Godino & Batanero, 1994: 47).
- El agrupamiento de todos los objetos o de las relaciones que tienen esas propiedades, en una clase, la cual recibe el nombre de ***extensión*** del concepto (E).
- La utilización de una palabra o cadena de palabras ─el ***nombre del concepto***─ para designar este conocimiento.

Los demás sistemas de propiedades, equivalentes al contenido del concepto, se denominan ***caracterizaciones*** del concepto.

El proceso que conduce a la determinación del contenido, al agrupamiento en una clase de los objetos o relaciones que poseen las propiedades del contenido y a la utilización de una palabra o cadena de palabras para designar el concepto resultante, se llama ***formación*** del concepto. En consecuencia, un concepto se ha formado si quedan determinados su contenido (C), extensión (E) y nombre; por lo que se puede considerar, en una primera aproximación, que un concepto es el par ordenado, designado por un nombre, formado por la extensión y el contenido, y utilizar el signo (E, C) para denotarlo (Mederos, 2002a).

Entre el concepto formado y su nombre se establece una relación que se puede explicar utilizando las teorías acerca del ***significado***. Vigotski ha planteado que:

> *[…] el significado es el rasgo indispensable, constituyente de la palabra. Es la propia palabra, examinada en el aspecto interno […] Pero el significado de la palabra en el aspecto psicológico […] no es otra cosa que la generalización o el concepto. La generalización y el significado de la palabra son sinónimos (Vigotski, 1989a: 166).*

Generalmente la relación de una palabra con su significado en el lenguaje externo se establece mediante un verbo copulativo en oraciones como “un reloj es una máquina que señala la hora”, las cuales son muy comunes en los diccionarios y en cuyo predicado gramatical se utilizan las propiedades del contenido del concepto que designa la palabra.

La correspondencia que le asigna a una palabra, uno de los significados del concepto que ella designa –donde puede intervenir la operación definición– se le ha llamado ***función semiótica*** en la teoría del lenguaje (Godino, 2002a: 10). El nuevo significado asignado a la palabra, es el ***contenido*** de esta función y se establece por las personas en la actividad y la comunicación.

En tanto cada función semiótica la establece una persona o grupo relacionando el conocimiento ya apropiado, con una nueva información o interrelacionando dos conocimientos ya adquiridos, es evidente, entonces, que no es posible establecer funciones semióticas, si no se dispone del conocimiento previo. Es por eso, que un nuevo significado se establece sólo si se dispone de un conocimiento previo que asuma el papel de contenido de las funciones semióticas correspondientes.

El significado de una palabra no es único y estático. La dinámica de los significados se puede estudiar utilizando el concepto de ***sentido***, como una representación del conjunto de todos los ***hechos*** psicológicos que surgen en nuestra conciencia gracias a la palabra (Polan, citado por Vigotski, 1989a: 193).

La ley principal de la dinámica de los significados se basa en “el enriquecimiento de la palabra por el sentido, que ella integra a partir del contexto”, y expresa:

> *La palabra integra, absorbe, de todo el contexto donde está incluida, contenidos intelectuales y afectivos y comienza a significar más y menos de lo que contiene su significado cuando la examinamos aisladamente y fuera de contexto: más, porque el círculo de sus significados se amplía, adquiriendo toda una serie de zonas, llenas de nuevo contenido; menos ya que el significado abstracto de la palabra se limita y estrecha con lo que la palabra designa en el contexto dado (Vigotski, 1981: 194).*

Por tanto, entre los resultados de la formación de un concepto, además de su contenido y extensión, quedan establecidos un significado y uno o varios sentidos para su nombre que no existían antes de este proceso, los cuales pueden conducir a nuevos significados.

La formación de conceptos matemáticos se caracteriza por algunos atributos que le dan un carácter singular a este proceso, pues los objetos de la clase de partida son creaciones del pensamiento humano, en la actividad y la comunicación, de las cuales se pueden manipular sólo sus representaciones ostensivas.

Cada representación ostensiva (semiótica) de un concepto matemático se realiza en un sistema que está formado por un conjunto inicial de signos y por las reglas y técnicas que permiten: 1) crear otros signos, 2) identificar si un signo dado pertenece al sistema, 3) operar con ellos y 4) relacionarlos entre sí y con los elementos de otros sistemas (Gómez y Rico, 2002: 29). La representación de un concepto en este sistema puede estar compuesta tanto por los signos iniciales como por otros que resulten de la aplicación de las reglas y técnicas.

Puede afirmarse, en una segunda aproximación, que a la formación de un concepto matemático, están asociados como resultados importantes: la extensión, el contenido, un significado del nombre[3] y, al menos, uno de los tipos de representaciones ostensivas de los elementos de la extensión.

Por tanto, el autor de esta tesis considera coherente denotar a cualquier concepto matemático por una cuaterna de la forma (E, C, S, R), donde E simboliza su extensión; C, el contenido; S, el conjunto de sus significados y R, el conjunto de los tipos de representaciones semióticas de los elementos de E. Cuando no ocasione confusión o el caso no lo requiera, se utilizará el par (E, C) o E.

[3] En lo adelante para abreviar se dirá significado del concepto.

Está claro que el estudio de un concepto no termina con su formación, pues después de este proceso pasa a la fase de desarrollo, que incluye ampliar la clase de los elementos conocidos de la extensión, determinar otras propiedades y caracterizaciones, construir otros significados, obtener otros tipos de representaciones y determinar ***relaciones*** con otros conceptos (Mederos, 2006).

El desarrollo del concepto en la dirección de las representaciones conduce a la necesidad de ***crear*** nuevas representaciones de los elementos de su extensión, ***transformar*** una representación en otra dentro de un mismo sistema y ***traducir***[4] una representación de un sistema a otro (Gómez y Rico, 2002: 25).

La determinación de ***relaciones*** de un concepto con otros conceptos ya desarrollados o en proceso de desarrollo, puede contribuir a la obtención de otras propiedades y caracterizaciones, y a ampliar los significados y los tipos conocidos de representaciones.

La idea que se aplica en este trabajo para el establecimiento de relaciones entre dos conceptos (E_1, C_1, S_1, R_1) y (E_2, C_2, S_2, R_2), consiste en partir de la determinación de relaciones entre una o varias de sus respectivas componentes y obtener de esa manera relaciones entre las otras.

Es así que la relaciones conceptuales clásicas −cuyo significado se analiza en párrafos siguientes a partir de aportes de la lógica (Guétmanova, 1989: 39) − se establecen mediante comparación de las extensiones de dos conceptos.

Aunque tales relaciones, no son específicas de la matemática y pueden presentarse entre conceptos de cualquier área del saber, en la actividad cognoscitiva de esta disciplina se manifiestan de forma sistemática, debido a la manera en que se construye y organiza el conocimiento matemático.

Pero sólo resulta útil analizar las relaciones y operaciones conjuntistas entre las extensiones de dos conceptos ya formados (E_1, C_1) y (E_2, C_2), cuando se dispone de un concepto (E, C) tal que E_1 y E_2 son partes de E. En este caso se dice que los conceptos (E_1, C_1) y (E_2, C_2) son ***comparables*** respecto al concepto base (E, C), y si no se conoce un concepto con estas características, se dice que son ***incomparables*** (en la colección de conceptos conocidos).

---

[4] También suelen utilizarse los infinitivos convertir y transferir.

Dos conceptos comparables pueden ser ***compatibles*** o ***incompatibles***, según sus extensiones tengan elementos comunes o no. A su vez, los conceptos compatibles pueden ser ***idénticos***, ***cruzados*** o estar en la relación de ***subordinación*** (anexo 4).

Aunque para la representación gráfica de relaciones conceptuales se han desarrollado distintas técnicas, como los mapas conceptuales, los mapas mentales (Brinkmann, 2001; 2003a; 2003b) y las redes asociativas pathfinder (Ruiz, Algarabel, Dasí & Bitarque, 1998; Casas, 2002: 130 y 2002: 155), el autor de esta tesis las considera insuficientes, en el caso de los conceptos matemáticos, al centrarse en los aspectos de su contenido y descuidar otros como la extensión. Es por eso que en el capítulo II se desarrollan otras técnicas.

La lógica reconoce como operaciones conceptuales a la definición, la clasificación, la generalización y la restricción (Guétmanova, 1989: 42; Mederos & Ruiz, 2003), las cuales son de gran interés para la construcción de conocimientos matemáticos escolares. Mediante cada una de estas operaciones generalmente se obtienen uno o varios conceptos nuevos a partir de la colección de conceptos ya formados. En muchos casos entre los conceptos obtenidos de ese modo, se pueden establecer las relaciones conceptuales clásicas.

1.2. Concepciones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria y su relación con la integración conceptual

En la presente sección se analizan críticamente concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria y se examina su relación con la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

1.2.1. El concepto de sistema didáctico. Entorno, encargo social, problema, objetivo y contenido. Las líneas directrices

Entre las ideas utilizadas para explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje, es esencial la expuesta por Álvarez (1992: 8), que lo concibe como la sucesión de estados de un objeto, que según Brousseau (citado por Ávila, 2001: 3), es el ***sistema didáctico***, el cual, en una primera aproximación, puede considerarse compuesto por un docente (D) que se ha propuesto enseñar un contenido (C) a un alumno (A) que lo pretende aprender; ambos guiados por un objetivo (O) y utilizando ciertos métodos (Mt) y medios (Md).

Un sistema didáctico, como todo sistema, tiene tres características esenciales, que son su ***composición***, su ***entorno*** y su ***estructura***. La composición es el conjunto de sus elementos

({D, A, O, C, Mt, Md})[5]; el entorno, el de todos los sistemas que tienen relación con alguno de sus elementos y la estructura, es el conjunto de las relaciones que se establecen entre los elementos del sistema (internas) o entre estos y los sistemas de su entorno (externas).

De los sistemas del entorno social provienen exigencias que con carácter normativo (Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2007) se imponen a cada sistema didáctico, algunas las cuales se convierten en el encargo social al proceso de enseñanza-aprendizaje (Álvarez, 1992: 7). Este encargo social constituye el ***problema*** de este proceso.

Entre las demandas que ha de satisfacer el aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria y que constituye una de las componentes de su encargo social (Ruiz y otros, 2005: 16), se incluye que debe proporcionar la apropiación de variados conceptos, proposiciones y procedimientos, cuyo dominio es un requerimiento para la comprensión de algunas de las disciplinas que se estudian en este nivel y en varias carreras universitarias.

El movimiento de un sistema didáctico no se produce a la deriva, sino que en él debe estar presente un elemento que indique el ¿para qué se enseña y aprende? El elemento que tiene esa función es el ***objetivo***, el cual responde al encargo social y "representa la modelación subjetiva del resultado esperado" (Addine y otros, 1998: 20).

Aunque los objetivos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática han sido divididos en tres campos para su estudio (Ballester y otros, 1992: 16), cada objetivo ha de incluir las aspiraciones en el campo de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador (Gutiérrez, sf).

En este trabajo se asume que el contenido –de enseñanza y aprendizaje– es "aquella parte de la cultura y experiencia social que debe ser adquirida por los estudiantes" (Addine y otros, 1998: 21) y que en el caso del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, incluye, en primer lugar, el conocimiento matemático escolar.

También al contenido pertenecen ideas filosóficas, políticas, morales y conclusiones filosóficas fundamentales relacionadas con la Matemática (Ballester y otros, 1992: 46), que Addine y otros (1998: 22), siguiendo a Lerner y Skatkin (citados por Buzón, 1986: 63), han incluido en la clase denominada "sistema de relaciones hacia y con el mundo".

[5] Más adelante en esta sección se agregan otros elementos.

Los aportes de la psicología educativa (Beltrán, 1998; National Academy Press [NAP], 2004a) y las proyecciones de organismos internacionales relacionados con la educación como la UNESCO (Delors y otros, 1996), acerca de la necesidad de “enseñar a aprender” por medio de la apropiación de estrategias y técnicas de aprendizaje por parte de los alumnos y alumnas, están a favor de la inclusión de ambas en la extensión del concepto “contenido”.

El autor concuerda con autores como Addine y otros (1998: 22), quienes incluyen también las habilidades y los hábitos en la extensión del concepto de contenido, a pesar de que constituyen formaciones psicológicas ejecutoras inherentes a cada persona, que se forman y desarrollan mediante la práctica de un procedimiento, el cual en el caso de las habilidades, puede ser algorítmico, cuasi-algorítmico o heurístico.

Resulta que el principal indicador del aprendizaje de un procedimiento por un alumno es su ejecución en forma de habilidad o hábito (Beltrán, 1998: 342), lo cual justifica la inclusión de estas formaciones psicológicas ejecutoras en la extensión del concepto contenido, aunque “no todo lo aprendido es ejecutable o se ejecuta de hecho” (Beltrán, 1998: 142).

Uno de los aportes de los especialistas de la otrora RDA a la didáctica general, dirigido al ordenamiento del contenido, es el concepto de ***directriz*** (Klingberg, 1972, p.81 y p.118), el cual se concibe en la MEM, como un lineamiento “que penetra todo el curso escolar con respecto a los objetivos a lograr, los contenidos que deben ser objeto de apropiación y a los métodos a elegir” (Jungk, 1978: 45; Ballester y otros, 1992: 57).

En cuanto a las directrices que sintetizan los conocimientos matemáticos y las habilidades y hábitos asociados a ellos en la educación general, en esta tesis se asumen las expuestas en la tabla del anexo 5 (Ruiz y otros, 2004), obtenidas a partir de un análisis de fuentes cubanas y extranjeras que tratan el tema (Klingberg, 1972: 81; Jungk, 1978: 45; Wenzelburger, 1990; Ballester y otros, 1992: 57; Rico, 1997a; Ballester y otros, 2002; NCTM, 2000a y 2000b).

1.2.2. El alumno. Desarrollo y aprendizaje

Una de las categorías utilizada en la pedagogía para caracterizar al alumno es el concepto de ***desarrollo*** (Esteva, 2003a), el cual proviene de la psicología, que lo concibe como el conjunto de transformaciones físicas y mentales relativamente estables, operadas en un sujeto, que les permiten pasar de un estadio a otro (Delval, 1984: 16; Yadeshko, citado por Chávez, Suárez & Permuy, 2005: 11).

El concepto pedagógico de desarrollo, se restringe a aquellas transformaciones que están relacionadas con la educación escolarizada, ya sea porque deben tenerse en cuenta para la educación o porque la propia educación las conduce.

Entre los aportes de Vigotski a la educación respecto al desarrollo cultural de un niño, está el haber planteado la necesidad de tener en cuenta por lo menos dos niveles, el ***desarrollo actual*** y el ***desarrollo potencial*** (1989b: 216). El primero contempla a todo aquello que el niño puede hacer y decir de forma autónoma, mientras que el segundo, está determinado por lo que puede hacer y decir con la ayuda de otros[6].

Pero lo ejecutable por una persona en un momento con ayuda tiene un límite, es decir, que existen tareas que aun con ayuda no pueden resolverse con comprensión. Por esta razón, el nivel de desarrollo potencial no puede rebasar los límites de la comprensión, pues como dijera Martí (1963: 327) “todo esfuerzo por difundir la instrucción es vano, cuando no se acomoda la enseñanza a las necesidades, naturaleza y porvenir del que la recibe”.

En tanto lo que se puede hacer solo, está incluido en lo que se puede hacer con ayuda, Vigotski introdujo el concepto de ***zona de desarrollo próximo*** (ZDP) para caracterizar el desarrollo debido a la ayuda, y lo describió como:

> *La distancia entre el nivel de desarrollo, lo que sabe, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, lo que puede llegar a saber, determinado a través de la resolución de unos problemas bajo la guía o mediación de un adulto o en colaboración con otro niño más capaz (Vigotski, 1978: 86).*

Es importante advertir que el concepto de ZDP es relativo a un problema, lo cual se observa en la propia definición de Vigotski. Una consecuencia de esto es que, aunque existe un proceso de ***transferencia*** “de los principios estructurales encontrados durante la solución de una tarea a toda una serie de otras tareas” (Vigotski, 1989b: 214), la ZDP de una persona puede variar de una tarea a otra.

[6] Vigotski incluyó en esta categoría a padres y madres, maestros y coetáneos más avanzados. En la actualidad se incluyen, además, otros elementos como son los grupos, los medios interactivos (televisión, video y computadoras), psicólogos, orientadores, trabajadores sociales y hasta el propio sujeto (Herrera, 2000).

En los marcos de esta investigación, interesa el desarrollo de los alumnos y alumnas cubanos que ingresan a la Educación Preuniversitaria, los cuales se caracterizan por un conjunto de rasgos generales que han sido expuestos en las versiones más recientes de los programas de Matemática para este nivel educativo (MINED, 2005a: 1).

Una de las categorías que se utiliza para modelar la actividad del alumno, como componente de un sistema didáctico, es el concepto de ***aprendizaje*** (Klingberg, 1972: 174), el cual ha sido concebido desde distintos puntos de vista. Dos de los más utilizados se sintetizan respectivamente, en las metáforas: el aprendizaje como adquisición de respuestas y el aprendizaje como construcción de significado (Beltrán, 1998: 2).

Aunque según la primera metáfora –de origen conductista– se considera que el aprendizaje es un proceso en el cual la conducta del que aprende cambia de estado como resultado de alguna práctica o ejercicio, los estados intermedios de este proceso quedan sin explicar.

La idea esencial caracterizadora del aprendizaje según la metáfora de la construcción, consiste en considerar que cada persona cuando aprende algo nuevo, no viene con la mente en blanco, sino que ya posee ciertos conocimientos y experiencias (NAP, 2004a: 71), almacenados en la memoria en forma de una red de unidades llamadas ***esquemas*** (Beltrán, 1998: 9). Al enfrentarse a la resolución de una tarea, la información percibida puede llevarlo a modificar –reestructurar, revisar, ampliar, enriquecer– esos esquemas. El aprendizaje es, según este enfoque, el proceso de modificación de los esquemas, mientras se resuelve una tarea.

La caracterización del aprendizaje según la metáfora de la construcción se realiza por medio de los conceptos de procesador, contenido, proceso, estrategia, técnica y estilo (Beltrán, 1998: 6), algunos de los cuales se describen en los párrafos siguientes.

La concepción del aprendizaje, sintetizada en la metáfora de la construcción, pone el mayor interés en las acciones mentales mediadoras entre los estímulos informativos y la ejecución del que aprende, las cuales constituyen el núcleo del aprendizaje y reciben el nombre de ***procesos del aprendizaje*** (anexo 6). Estos procesos son en realidad sucesos internos interrelacionados ejecutados por el alumno, los cuales pueden ser activados por éste o por el docente y que implican un procesamiento de la información entrante.

Entre las características de los procesos del aprendizaje se ha señalado que su activación la puede ocasionar tanto el alumno como el docente y es en ese acto donde entran a jugar su papel las ***estrategias***, las cuales son acciones mentales, no siempre conscientes, ejecutadas por el estudiante para mejorar el aprendizaje y que implican la elaboración de un plan para poner en marcha estos procesos (Beltrán, 1998: 34).

En resumen, puede decirse que las estrategias están dirigidas a saber lo que hay que hacer para aprender, saberlo hacer y controlarlo mientras se hace.

Aunque a cada proceso del aprendizaje están asociadas varias estrategias, existen tres de ellas: la ***atención***, la ***elaboración*** y la ***organización*** −correspondientes al proceso de adquisición− consideradas las condiciones del aprendizaje significativo (Beltrán, 1998: 39). También existen otras estrategias importantes relativas a otros procesos, así como las ***estrategias metacognitivas*** que no están al servicio de un proceso particular, sino que, como lo ha considerado Beltrán (1998: 77) están en función de todos los procesos, al controlar la acción del resto de las estrategias, a las cuales se les atribuye el calificativo de ***cognitivas***.

Las estrategias se llevan a cabo mediante uno o varios procedimientos de carácter más específico y ligados al contenido, llamados ***técnicas*** de aprendizaje, y definidas como “las operaciones manuales e intelectuales, que se refieren al trabajo con los objetos que funcionan como medios auxiliares en el proceso de aprendizaje” (Klimpel, citado por Klingberg, 1972: 199). Una misma técnica puede funcionar con varias estrategias.

La extensión del concepto de técnica de aprendizaje abarca una gran cantidad de ellas, subordinadas a las estrategias que se quieran llevar a cabo. Se incluyen desde las conocidas técnicas de selección como el subrayado, el resumen y el esquema; las técnicas de organización que abarcan los mapas conceptuales, hasta las técnicas de elaboración, ejemplificadas con los procedimientos mnemotécnicos (Beltrán, 1998: 77).

Muy relacionado con el concepto de técnica está el de ***medio*** de aprendizaje, que es aquel medio material, asociado a la ejecución de una técnica, utilizado por el alumno para apropiarse del contenido. Son ejemplos de medios de aprendizaje, el libro de texto, las calculadoras y los programas para ordenadores que ayudan al alumno a resolver las tareas de aprendizaje propuestas por el docente o por sí mismo.

En los cuatro conceptos ya analizados para caracterizar el aprendizaje no se ha contemplado la manera en que cada alumno personifica las estrategias en función del contexto escolar; esta dimensión del aprendizaje se incluye en el concepto de ***estilo***, el cual se concibe, al decir de Schmeck, como "una predisposición a utilizar una estrategia particular de aprendizaje, al margen de las demandas específicas de tarea" (citado por Beltrán, 1998: 70).

Las relaciones entre los procesos del aprendizaje, las estrategias, las técnicas y los estilos se representan en el mapa conceptual del anexo 7.

El aprendizaje escolar, concebido según la metáfora de la construcción se puede caracterizar, según Beltrán (1998: 16), mediante los adjetivos: cognitivo, mediado, activo, significativo, complejo, constructivo y estratégico, a los cuales se podrían agregar: individual, consciente en determinadas etapas y motivador.

En nuestro país también han surgido otros enfoques del aprendizaje que, aunque toman en consideración varias de las ideas ya explicadas acerca de este proceso, como construcción significativa de conocimientos, asumen una posición más global que tiene en cuenta todas las esferas de la personalidad del alumno en su relación con los otros y permite superar las limitaciones de los dos enfoques analizados y responder, de esta manera, al encargo social de la escuela como institución, en las condiciones concretas de Cuba.

Estas ideas cubanas acerca del aprendizaje tienen como punto de partida, en su fundamento psicológico, el enfoque histórico-cultural que ha aportado la escuela fundada por Vigotski, sus colaboradores y continuadores. Tales concepciones del aprendizaje se basan en la tesis vigotskiana según la cual el aprendizaje conduce el desarrollo y a la vez se sirve de él.

Es importante apuntar que desde la perspectiva de Vigotski, el aprendizaje puede ser interpretado desde dos dimensiones estrechamente vinculadas. La primera se refiere al ***aprendizaje como proceso***, la cual lo considera constituido por una serie de procesos internos de desarrollo, destinados a la interiorización, a la transferencia, de formas sociales de comportamiento que en un momento dado son posibles para el alumno sólo con la ayuda de los otros. La segunda se enfoca hacia al ***aprendizaje como producto*** y contempla los logros internos que el alumno hace suyos gracias a su actividad individual en colaboración con los demás, bajo la dirección del docente.

En consecuencia, el aprendizaje en su faceta de producto, es posible concebirlo como un cambio en el comportamiento del alumno que se involucra en la actividad de estudio.

Considerando estas ideas, un colectivo de investigadores cubanos ha elaborado un enfoque del aprendizaje –llamado ***aprendizaje desarrollador***– a partir de la tesis de Vigotski acerca de la relación entre aprendizaje y desarrollo y de la incorporación de varios de los elementos aportados por la concepción que encierra la metáfora de la construcción significativa (Castellanos, 1999; Llivina, Castellanos, Hernández & Arencibia, 2000).

Estos autores caracterizan el aprendizaje desarrollador mediante los rasgos del aprendizaje como construcción significativa y otros que lo describen como un proceso multiforme, social, a lo largo de toda la vida, heterogéneo, diverso, cooperativo y contextualizado.

El autor de este trabajo asume la concepción del aprendizaje desarrollador, pero considera poco probable propiciarlo en Matemática, sin la determinación de las dimensiones e indicadores específicos donde se concrete lo que los alumnos y alumnas deben aprender. En ello juegan un papel importante los conceptos de ***tarea docente***[7] y de ***tipo de tarea.***

Rico y Silvestre (2002: 78) señalan que una tarea se concibe para que el alumno la realice dentro o fuera de la clase en función de la búsqueda y apropiación de conocimientos o del desarrollo de habilidades; “es en la tarea donde se concretan las acciones y operaciones a realizar por el alumno”.

En la teoría antropológica de la didáctica (TAD) –con cuyo punto de vista concuerda el autor de esta tesis– el concepto de tarea, aunque se caracteriza y ejemplifica, se considera una noción primaria no definible a partir de otros conceptos de la teoría. Esto también se observa en Jungk (1979: 45), quien no define este concepto y lo describe de manera que los conceptos de ejercicio y de problema le están subordinados y agotan su extensión.

Las componentes fundamentales de una tarea –al igual que las de un problema– son las condiciones y las exigencias. Las condiciones, también llamadas datos, son las componentes de la tarea que proporcionan información acerca de la situación, a quien la resuelve. Esta información puede darse explícitamente o estar presente de forma implícita; en ese último caso se habla de condiciones derivadas o intermedias (Labarrere, 1987: 13).

[7] En lo adelante se hará referencia a este concepto omitiendo el adjetivo “docente”.

Las exigencias constituyen la parte de la tarea donde se especifica el objetivo final a alcanzar por el resolutor y pueden aparecer en forma de preguntas o como indicaciones. Una tarea puede contener una o varias exigencias.

Pero tanto las condiciones como las exigencias, están enmarcadas en un contexto, entendido como el entorno extra-matemático o intra-matemático dentro del que éstas se interpretan (Gil, Fernández, Rubio & López, 2000a: 83), lo cual conduce a considerar al contexto como una tercera componente de una tarea.

Cuando la tarea que se le propone a los alumnos tiene como objetivo la búsqueda y apropiación de nuevos conocimientos (Arteaga, 2000: 56 y 2002: 11), recibe el nombre de ***tarea de estudio*** (Davídov & Slobódchikov, 1991: 131); la cual, al estar dirigida a la construcción de nuevos conocimientos a partir de los ya apropiados, desempeña una función mediadora entre aprendizajes precedentes y el nuevo aprendizaje.

El autor de esta tesis, partiendo de criterios de Douady y Parzysz (1998: 16), considera que la tarea de estudio ha de poseer los rasgos siguientes:

- Debe estar formulada en un lenguaje que sea comprensible para el alumno.
- En las condiciones se deben incluir, niveles de ayuda con los cuales el alumno va iniciar el trabajo, aunque después el profesor suministre o propicie otros[8].
- El alumno ha de disponer de los conocimientos, hábitos y habilidades necesarios para iniciar su resolución, pero al avanzar en el proceso, percibirá la necesidad de un conocimiento que no posee, pero que puede construir con ayuda.
- La resolución de la tarea debe contribuir a la apropiación de nuevos conocimientos, especialmente de conceptos, proposiciones o procedimientos.

La resolución de una tarea es un proceso que, por lo general, transita por las fases de comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan, y análisis de la solución y de la vía, comunes a muchos modelos de la resolución de problemas (Sigarreta, 2001).

---

[8] En la psicología histórico-cultural se reconocen, para la solución de una tarea, cuatro niveles de ayuda al alumno por parte de los otros: 1) orientación de la tarea, 2) recordar la solución de tareas semejantes, 3) realización conjunta de la tarea, orientando su terminación de forma independiente y 4) demostración de cómo se resuelve la tarea (Herrera, 2000). La ayuda a los alumnos se ejecuta mediante impulsos didácticos (Klingberg, 1972: 326; Jungk, 1979: 52).

El concepto de tipo de tarea procede de la TAD (Chevallard, 1999: 223) y se caracteriza por:

- Se refiere a un conjunto de tareas resolubles con el mismo procedimiento (Gómez, 2006: 92) y su expresión se inicia con el infinitivo de un verbo de acción que describe un comportamiento observable como “calcular”, “describir” o “construir”.
- Supone un objeto relativamente preciso, de manera que no sólo se necesita del verbo, sino también de uno o varios complementos. Expresan tipos de tareas, pues, enunciados como “calcular la suma de dos números racionales”.
- Está subordinado a la institución escolar, pues se deriva de los objetivos y el contenido debe propiciar los procedimientos que le permitan al alumno resolver las tareas de un determinado tipo.

Aunque no todo lo aprendido es directamente ejecutable, en este trabajo se parte de la idea vigotskiana según la cual “para estudiar un proceso interno es necesario exteriorizarlo mediante su conexión con alguna otra actividad externa”[9] (Vigotski, 1981: 45) y que justifica la afirmación: “todo lo ejecutable que un alumno debe aprender o ha aprendido se puede indicar mediante el desempeño en las tareas que debe saber o sabe resolver”, la cual concuerda con las concepciones sobre el carácter funcional del aprendizaje (Talízina, 1988: 44; Cortese, sfa: 163) y del conocimiento matemático individual (Gallardo, 2004: 117).

Desde este enfoque, el autor de esta tesis considera como indicadores del aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, el desempeño de los alumnos y alumnas en la resolución de las tareas por tipos y directrices del contenido matemático.

1.2.3. El docente. La enseñanza

Al igual que sucede con el concepto de alumno, el concepto de docente es inmanente al de sistema didáctico. El (la) ***docente*** es una persona[10] responsabilizada con la realización de un sistema de actividades, entre las cuales está incluida, aquella que comprende todas las acciones que se deben ejecutar para el desarrollo y la conducción de los procesos del aprendizaje del alumno, a la cual se le llama ***enseñanza*** (Klingberg, 1972: 211).

[9] Esta proposición es la forma de aplicar la ley fundamental de la intervención, la evaluación y el diagnóstico psicológico (Arias, 2000; citado por Herrera, 2000).

[10] Es importante tener en cuenta esta característica, debido al uso que tienen hoy día los materiales audiovisuales y las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Aunque la enseñanza, al igual que el aprendizaje, es una actividad que no es privativa de la escuela, en lo que sigue se centrará la exposición en la enseñanza escolar y especialmente en la enseñanza de la Matemática en la Educación Preuniversitaria.

El concepto de enseñanza está muy relacionado con el de aprendizaje y entre ellos pueden establecerse relaciones funcionales recíprocas de precedencia y de causa-efecto. La enseñanza precede al aprendizaje, pero a la vez lo utiliza como premisa. Por otra parte, las características de la enseñanza influyen, en gran medida, en las del aprendizaje asociado, pero también, lo que un alumno sabe, pone límites a lo que se le puede enseñar.

Por otro lado, la relación entre la enseñanza y el desarrollo igualmente se caracteriza por un cierto nivel de complejidad, que Vigotski (1989b: 216) explicó con mucha claridad y que puede resumirse en las proposiciones: 1) la enseñanza debe coordinarse con el desarrollo del alumno, 2) una enseñanza correctamente organizada conduce tras de sí al desarrollo mental del alumno y 3) sólo es buena la enseñanza que se adelanta al desarrollo.

Es por eso que un aprendizaje desarrollador debe estar precedido y ser el efecto de una enseñanza que lo conduzca, a la cual se le llama ***enseñanza desarrolladora***. Desde esta perspectiva, la enseñanza consiste en “ayudar a la ejecución a través de la zona de desarrollo próximo” (Beltrán, 1998: 360).

Concebida de esta manera, la enseñanza es la actividad de dirección del aprendizaje de los alumnos y alumnas por parte del docente (Talízina, 1998: 46; Chevallard, 1999: 233), que está constituida por un sistema de acciones dirigidas a cumplir unos objetivos que responden a un encargo social (González y otras, 1995: 91), las cuales −en el caso de la enseñanza de la Matemática− han sido analizadas por investigadores cubanos y extranjeros (Feria, 2003: 34; Gómez & Rico, 2002; Godino, 2005; Godino, Contreras & Font, 2005).

Las acciones de enseñanza, no pueden reducirse sólo a aquellas ejecutadas por el docente en interacción con los alumnos durante la clase, sino que existen acciones que el docente debe ejecutar, antes y después de la clase, sin la presencia de los alumnos (Klingberg, 1972: 239; López y otros, 2003: 55) con el objetivo de dirigir su aprendizaje de manera efectiva.

Entre las acciones que ha de ejecutar el docente en la actividad de enseñanza se incluyen: 1) diagnosticar la personalidad de los alumnos y alumnas, 2) planificar la enseñanza en función de los objetivos y del desarrollo de los alumnos y alumnas, 3) dirigir el aprendizaje de cada uno de los alumnos y alumnas en y desde la clase[11], 4) evaluar el aprendizaje e 5) investigar los efectos de sus modos de actuación y proyectar nuevas formas de actuar para mejorar la dirección del aprendizaje en otras ediciones del proceso.

Como las ideas pedagógicas acerca del ***diagnóstico*** que guían la práctica en la educación general cubana, se sintetizan en la frase “proceso de evaluación-intervención” (Nieves, 1994), resulta conveniente abordar el concepto de ***evaluación*** antes que el de diagnóstico.

Según puntos de vista que se manejan en la investigación evaluativa (Escudero, 2003), los cuales comparte el autor de esta tesis, la evaluación es un proceso que, a partir de criterios prefijados, aporta información en forma de juicios valorativos de carácter descriptivo o explicativo para la toma de decisiones alternativas.

En toda evaluación del aprendizaje intervienen tres elementos que forman el triángulo de la evaluación: un modelo de cómo los alumnos aprenden, tareas que estos deben resolver para demostrar su aprendizaje y un método de interpretación para hacer inferencias a partir de la evidencia (NAP, 2004c: 2).

La evaluación del aprendizaje puede realizarse en distintos momentos y con diferentes fines. En dependencia de estas dos características, la evaluación puede ser diagnóstica, formativa o sumaria (Pérez, 1997: 9).

Si la evaluación de un alumno termina con la elaboración de juicios de valor sobre características de su personalidad, el diagnóstico, en tanto está dirigido a la ejecución de acciones de intervención para transformar esas características con el objetivo de alcanzar un estado potencial pretendido (Zilberstein & Valdés, 2001: 30), requiere de que esos juicios tengan un carácter explicativo de las causas de la manifestación de tales características.

La planificación de la enseñanza consiste en la determinación y elaboración de los programas de influencias sobre los alumnos por parte del docente para que se produzca el aprendizaje. Existen dos tipos de estos programas, el ***fundamental***, que se elabora antes de la interacción alumno-docente, y el ***regulador***, que se confecciona durante esta interacción (Talízina, 1998: 48; Gómez & Rico, 2002: 44), dado el carácter estocástico del proceso de enseñanza-aprendizaje.

---

[11] Algunos autores (Remedios & Hernández, 2005) llaman a esta acción ejecución de las actividades docentes.

La elaboración del programa fundamental transita por una secuencia de etapas que se inician con la planificación a largo plazo –incluye la planificación de las unidades temáticas– y terminan con la llamada planificación a corto plazo, donde se concreta este programa mediante la preparación de los sistemas de clases y de cada una de las clases que conforman una unidad temática (Ballester y otros, 2000: 309), que requieren de la elaboración de tareas de estudio y para la formación y desarrollo de habilidades.

La elaboración por el docente de una tarea de estudio, al igual que de tareas de otros tipos, constituye un problema, denominado metaproblema, cuya solución transcurre por una secuencia de etapas que en cada caso adoptan una forma particular (Cruz, 2002: 35).

En las condiciones actuales de la educación cubana, la planificación a largo plazo de la enseñanza de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, cuenta con algunos documentos elaborados con la supervisión de especialistas del Ministerio de Educación, que pueden ser asimilados por los docentes en dependencia de las características de sus alumnos y alumnas, como lo es una dosificación de la asignatura por grados (MINED, 2004h).

La acción de dirigir el aprendizaje en y desde la clase, comprende todas aquellas operaciones que el docente debe realizar durante su transcurso para cumplir con los objetivos propuestos, las cuales están orientadas a la apropiación del contenido por parte de los alumnos y alumnas. Esta acción, dada la fuerza motivacional que adquiere, generalmente se transforma en una actividad y sus operaciones en acciones – subordinadas a los objetivos de la clase– entre las cuales se incluyen la motivación, la asignación de tareas, la regulación y la evaluación (Godino, 2005).

Entre las operaciones de la regulación, está la prestación de ayuda a los alumnos que la necesiten, observando el ***principio de las exigencias decrecientes*** (Torres, 2000a: 9), según el cual ésta debe comenzar por el nivel mínimo y no saltar niveles.

Este principio está muy relacionado con la distribución de las responsabilidades del docente y del alumno en relación con el aprendizaje de un contenido, la cual recibe el nombre de ***topogénesis*** (Chevallard, 1999: 240; Godino, Contreras & Font, 2005: 6). Tal distribución, generalmente se establece implícitamente por un sistema de obligaciones recíprocas entre el docente y el alumno, denominado ***contrato didáctico*** (Brousseau, 1986: 15).

La ejecución de cada una de las acciones de enseñanza descritas, puede realizarse de diferentes formas; a cada una de ellas, se le llama ***método***. Cada método transcurre por medio de un sistema de operaciones que constituyen sus ***procedimientos*** y que deben ser ejecutadas siguiendo un orden y observando determinadas reglas.

A su vez, la ejecución de los procedimientos de un método por una persona o grupo, requiere del uso de determinados objetos materiales, a los cuales se les llama ***medios***.

Aunque los métodos, procedimientos y medios para ejecutar las acciones de enseñanza han sido ampliamente analizados en la didáctica general y la didáctica de la Matemática, en la actualidad continúa su estudio por especialistas e investigadores de estas disciplinas.

Aunque el asunto referido a los métodos y procedimientos para la evaluación del aprendizaje de la Matemática aparece como contenido de publicaciones cubanas y extranjeras (Jungk, 1978; Castro y otros, 1993; Batanero, 1997; Santana, 1998; Ballester y otros, 2000; Gil y otros, 2000a y 2000b; Mullis y otros, 2002; Gallardo, 2004; OCDE, 2006; Pérez, 2006), las relaciones conceptuales clásicas están entre los contenidos menos atendidos; observándose que en fuentes donde se trata el tema (Casas, 2002: 135) se presta más atención a la identificación de la estructura conceptual que los alumnos y alumnas poseen como producto, que a las técnicas utilizadas por estos para la determinación de relaciones entre conceptos y su representación.

A pesar de que los métodos y procedimientos para la planificación de la enseñanza de la Matemática han sido pródigamente tratados por autores de obras sobre MEM (Jungk, 1978: 142; Ballester y otros, 2000: 306), es importante tener en cuenta además, el procedimiento propuesto por Gómez y Rico (2002: 20) con el nombre de ***análisis didáctico***, que incluye el ***análisis del contenido*** y el ***análisis cognitivo***, y abarca varios elementos no considerados explícitamente por Jungk, y Ballester y otros, entre ellos, el de la ***estructura conceptual***.

No obstante, aunque en el procedimiento propuesto por Gómez y Rico (2002: 25) se presta atención al examen de la estructura conceptual, en lo que se refiere a las relaciones que se pueden establecer entre las representaciones de un mismo concepto o entre éste y otros conceptos al que sirve de modelo, en el análisis del contenido concebido por estos autores no son objetos de atención las relaciones conceptuales clásicas.

El método que ha de utilizar el docente para dirigir el aprendizaje de los alumnos y alumnas en y desde la clase depende del objetivo, de las características de la acción de enseñanza que desea ejecutar, del contenido y de la relación objetivo-contenido (Klingberg, 1972: 275).

La MEM describe el trabajo con los métodos y procedimientos para la dirección del aprendizaje en y desde la clase, utilizando tres niveles de concreción que recorren el camino de lo general a lo singular (Torres, 1994: 87). En el primero −el nivel de las funciones didácticas− estos se conciben con énfasis en la acción a ejecutar de la actividad, mientras que en los niveles segundo y tercero se enfatiza, además, en las características particulares o singulares del contenido.

Para ajustar los métodos y procedimientos propuestos para cada acción de enseñanza, a las características del contenido, los especialistas en MEM han utilizado los conceptos de ***situación típica*** y ***complejo de materia (contenido)***.

Las situaciones típicas se han concebido de modo que para cada forma del conocimiento matemático, con excepción de las preguntas en lo que respecta a su elaboración, existe una situación típica. En consecuencia, **en obras sobre MEM consultadas (Jungk, 1978; Jungk, 1979; Jungk, 1981; Pitzsch y otros, 1982; Ballester y otros, 1992; Torres, 1994; Torres, 2000a; Torres, 2000b; Ballester y otros, 2000) no se han desarrollado métodos y procedimientos para la enseñanza de la elaboración de preguntas, conducentes a la investigación de las relaciones conceptuales clásicas.**

Aunque existe una situación típica denominada "tratamiento metodológico de los conceptos matemáticos y sus definiciones" (Jungk, 1979: 58; Ballester y otros, 1992: 280; Villegas & Placeres, 2004: 205), en ésta no se explicitan métodos ni procedimientos para la enseñanza de las relaciones conceptuales clásicas.

A pesar de que muchas de estas relaciones se suelen expresar mediante teoremas, en la situación típica "tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones", concebida por la MEM (Ballester y otros, 1992: 320), no se analiza el caso particular de los teoremas que expresan relaciones conceptuales clásicas.

En función de los métodos y procedimientos de enseñanza están las ***formas de organización*** y los ***medios*** (Klingberg, 1972: 335; Jungk, 1979: 133). A la utilización de estos últimos, y particularmente de la televisión y el video, se le ha dado gran importancia en los momentos actuales, para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, a tal punto de que para una parte considerable de las clases, la exposición del contenido está grabada en video (video-clase) y en las orientaciones metodológicas de los programas se concibe la video-clase como la “vía fundamental mediante la cual se impartirán los contenidos del programa” (MINED, 2005a: 26).

Sin embargo, debe observarse en la actuación del docente ─según las leyes de la didáctica─ la subordinación de los medios a los métodos y la de estos últimos a la relación objetivo-contenido, que el diagnóstico, como afirma Rangel (2002: 25), modifica el objetivo y que entre las características esenciales del aprendizaje desarrollador está la participación activa del alumno.

1.2.4. Estructura y movimiento del sistema didáctico. Leyes, principios y funciones didácticas

La estructura de un sistema didáctico de contenido matemático en la Educación Preuniversitaria cubana, está compuesta por un conjunto de relaciones con formas específicas de manifestación, algunas de ellas muy asociadas al método y a las formas de organización, que incluye a las señaladas por varios autores (Klingberg; 1972; Rangel, 2002: 31; Godino, Contreras & Font, 2005: 15), más otras específicas que fueron identificadas por Ruiz y otros (2004: 21). Estas relaciones pueden dividirse en dos tipos:

- Relaciones del sistema con los sistemas del entorno.
- Relaciones entre los elementos que componen el sistema (relaciones internas).

El carácter de las relaciones internas en cada sistema didáctico o con los sistemas del entorno se manifiesta en forma de ley, lo cual ha conducido a la consideración de diferentes sistemas de leyes de la didáctica referidas a estas relaciones (Klingberg, 1972: 243; Álvarez, 1992: 22; Rangel, 2002: 28).

La enseñanza y el aprendizaje son procesos interrelacionados que sólo pueden separarse para un análisis, pero que en la realidad transcurren en una unidad llamada proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual en su aspecto dinámico se puede explicar mediante el cambio de estado de los sistemas didácticos relativos al grupo-clase. Este movimiento se expresa en una sucesión de etapas y está regulado por las leyes de la didáctica y los principios donde éstas se concretan.

Aunque existen distintos sistemas de principios didácticos (Rangel, 2002: 13), el autor de este trabajo considera que el elaborado por Silvestre y Zilberstein (2002: 22) −con la inclusión del principio de las exigencias decrecientes− se ajusta a los presupuestos teóricos que sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje se asumen en este trabajo, y a las condiciones y encargo social del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria en la actualidad. Los principios que forman este sistema son:

- **“*Diagnóstico integral*** *de la preparación del alumno para las exigencias del proceso de enseñanza-aprendizaje, nivel y logros y potencialidades en el contenido del aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo-valorativo.”*
- *“Estructurar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia la* ***búsqueda activa del conocimiento*** *por el alumno, teniendo en cuenta las acciones a realizar por éste en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad y el uso de medios de enseñanza que favorezcan la actividad independiente y la búsqueda de información.”*
- *Plantear inicialmente las preguntas e impulsos de la forma más general y exigentes posibles en correspondencia con el diagnóstico, y sólo en la medida en que los alumnos no puedan responder a ese nivel de exigencia, se decrece ésta, se incrementa la ayuda del profesor (***principio de las exigencias decrecientes***).*
- *“Concebir un sistema de [***tareas] para la búsqueda y exploración del conocimiento*** *por el alumno, desde posiciones reflexivas, que estimule y propicie el desarrollo del pensamiento, y la independencia en el escolar.”*
- *“Orientar la* ***motivación hacia el objeto*** *de la actividad de estudio y mantener su constancia. Desarrollar la necesidad de aprender y de entrenarse en cómo hacerlo.”*
- *“Estimular la* ***formación de conceptos*** *y el desarrollo de los* ***procesos lógicos del pensamiento****, y el alcance del nivel teórico, en la medida que se produce la apropiación de los conocimientos y se eleva la capacidad de resolver problemas.”*
- *“Desarrollar formas de* ***actividad y de comunicación colectivas****, que favorezcan el desarrollo intelectual, logrando la adecuada interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de aprendizaje, así como la adquisición de* ***estrategias de aprendizaje*** *por el alumno.”*

- *“Atender las* ***diferencias individuales*** *en el desarrollo de los escolares, en el tránsito del nivel logrado hacia el que se aspira.”*
- *“Vincular el contenido de aprendizaje con la* ***práctica social*** *y estimular la valoración por el alumno en el plano educativo y los procesos de su* ***formación cultural genera****l.”*

Existen distintos enfoques acerca de las etapas por las que transita el movimiento de cada sistema didáctico en el tiempo (Klingberg, 1972, p. 227 y p. 353; Jungk, 1978: 84; Baranov, Bolotina & Slastioni, 1989: 81; Davídov & Slobódchikov, 1991: 131; Ballester y otros, 1992: 98; Torres, 1994: 87; Chevallard, 1999: 242; Fuentes, 2002: 73; Godino, 2005). Desde la perspectiva de la MEM, asumida en esta tesis, se realiza una división atendiendo a las acciones del alumno y del docente, según la lógica del camino dialéctico del conocimiento y de la enseñanza y el aprendizaje; a las etapas que resultan se les llama ***funciones didácticas.***

Cada función didáctica es una etapa del movimiento del sistema didáctico, subordinada al objetivo y a una secuencia de elementos del contenido, que se distingue por las acciones de dirección del aprendizaje en y desde la clase por parte del docente (caracterizadas por la utilización de determinados métodos y medios de enseñanza) y las correspondientes acciones del alumno que éstas promueven (caracterizadas por el empleo de determinadas técnicas y medios de aprendizaje, asociados a estrategias y procesos) en el contexto de un grupo-clase con una determinada forma de organización o fuera de él.

Al enfrentarse a una tarea, el alumno llega con un conjunto de condiciones que se expresan en su sistema de conocimientos, habilidades, hábitos y capacidades, su sistema de valores, etc., los cuales ejercen una gran influencia sobre estos procesos y sus resultados (Comenius, citado por Klingberg, 1972: 356; Klingberg, 1972: 283; Vigotski, 1989b: 216; Jungk, 1978: 84; Ballester y otros, 1992: 120; Torres, 2000b: 59; Ausubel, Novak & Hanesian, 2000: 1; NAP, 2002; NAP 2004a: 10; NAP, 2004b: 1). Este sistema de ***condiciones previas***, que incluye elementos tanto del subsistema afectivo-motivacional como cognitivo-instrumental de la personalidad del alumno, recibe el nombre de ***nivel de partida.***

Como no existe un criterio único en la didáctica general y la MEM acerca del número y denominación de las funciones didácticas, en esta tesis se consideran como tales: 1) el aseguramiento del nivel de partida, 2) la motivación y orientación hacia el objetivo, 3) la elaboración del nuevo contenido, 4) la fijación y 5) la evaluación.

Cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se utiliza una tarea para la construcción de nuevos conocimientos, la motivación se divide en dos fases (Jungk, 1978: 92; Ballester y otros, 1992: 100). En la primera de ellas se induce la necesidad de ocuparse de resolver la tarea –motivación del trabajo con la tarea– y en la segunda, se promueve la necesidad de utilizar cierto procedimiento en su resolución; se motiva la vía de solución.

Los nexos entre las funciones didácticas se manifiestan en forma de ley (Klingberg, 1972: 229), de manera que entre ellas se establecen relaciones diacrónicas y sincrónicas, ya que unas preceden a las otras en el tiempo, pero a la vez en cada momento están implicadas varias de ellas, como son la motivación y la orientación hacia el objetivo.

En la didáctica general (Klingberg, 1972: 353) y la MEM (Jungk, 1978: 82; Ballester y otros, 1992: 98) se han desarrollado métodos y procedimientos para la realización de las funciones didácticas, asumidos en esta tesis, los cuales –en casos como la motivación y orientación hacia el objetivo– se basan en enfoques psicológicos de la actuación, especialmente en la teoría de la actividad de Leóntiev.

1.3. **Caracterización didáctica de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas**

El concepto de integración en la Matemática, muy relacionado con el de suma, está claro para los especialistas en la materia, pues existe una definición científica de éste aceptada como satisfactoria. No ocurre lo mismo con el concepto de igual nombre utilizado en la didáctica, pues ya en este campo hablar de suma resulta bastante impreciso, razón por la cual es necesario el uso del método del análisis conceptual (Rico, 2001: 180) para llegar a un significado didáctico de utilidad.

En el *Diccionario de la Real Academia Española* (2006) se precisa que la integración es la acción o el efecto de integrar. Se señala, además, que integrar es, “constituir un todo”, “completar un todo con las partes que faltaban”, “hacer que alguien o algo pase a formar parte de un todo” o “aunar, fusionar dos o más conceptos, corrientes, etc., divergentes entre sí, en una sola que las sintetice”.

De estos significados se puede inferir que la integración tiene los rasgos siguientes:

- Además de un resultado, es un proceso.
- Está dirigida a formar o completar un todo.

- Entre las partes que se integran, debe existir alguna relación para que constituyan un todo.
- Presupone la existencia de las partes que componen un todo.

Como estas características son generales y no están enmarcadas en el contexto del proceso de enseñanza-aprendizaje, se buscaron otros significados del concepto de integración en fuentes sobre lingüística, psicología, didáctica general y didáctica de la Matemática, para obtener rasgos más específicos.

La integración conceptual ha sido y es un concepto de interés de la lingüística cognitiva desarrollada por investigadores norteamericanos. Una de las definiciones de este concepto de más impacto, es la elaborada por Fauconnier y Turner (1998: 133), según la cual, la integración conceptual (blending) se concibe como una operación conceptual general en un par con analogía, es recursiva, de modelación mental, categorización conceptual y encuadre; sirve a una variedad de propósitos cognitivos; es dinámica, flexible y activa en el momento de pensar; proporciona productos que con frecuencia se arraigan a la estructura y gramática conceptuales; cada nueva realización se produce, a menudo, utilizando como entradas sus productos previos; es fácil de detectar en casos espectaculares, pero la mayoría de las veces es un proceso rutinario que escapa de la detección, excepto en análisis técnico; no está reservado para propósitos especiales y no es costoso *(*Fauconnier & Turner, 1998: 133).

Esta definición se formuló en el contexto de la elaboración de un modelo de integración conceptual que ha tenido un gran impacto en la lingüística cognitiva. El modelo, aunque se ha ejemplificado con el conocimiento matemático disciplinar (Fauconnier y Turner, 1998; Turner, 2005), no tiene fines didácticos, se centra en lo cognitivo y no está dirigido específicamente a las relaciones conceptuales clásicas.

El término integración se ha utilizado en la psicología cognitiva para designar uno de los llamados procesos del aprendizaje (Beltrán, 1998: 41), caracterizados en el epígrafe 1.2.2. A este concepto se le atribuyen, entre otros, los significados siguientes:

- "Proceso de búsqueda de conocimientos previos para transformarlos en la memoria de trabajo. Se establecen conexiones externas entre la información entrante y su conocimiento previo" (Cook & Mayer, 1983; citados por Beltrán, 1998: 41).
- "Proceso de construcción de relaciones entre los ítems a aprender y los ya aprendidos" (Thomas & Rohwer, 1986; citados por Beltrán, 1998: 41).

En cuanto a las acciones a ejecutar por el alumno para el logro de la integración, se deben considerar las estrategias de aprendizaje dirigidas a las relaciones –la organización y la elaboración– así como las técnicas al servicio de estas estrategias. Ha de observarse que, si la organización pone de manifiesto relaciones entre elementos de la información ya apropiada por el alumno, la elaboración propicia que éste relacione su conocimiento previo con el conocimiento en proceso de apropiación (Beltrán, 1998: 129).

Además de los significados provenientes de la lingüística y la psicología, el concepto de integración tiene otros significados, apreciables en obras de investigadores cubanos y extranjeros que lo han analizado desde una perspectiva didáctica, generalmente en los marcos del estudio del concepto de interdisciplinariedad (Fiallo, 2001: 26; Lenoir & Hasni, 2004: 176; Lenoir, 2004 y 2005).

El primer significado que se atribuye a este concepto desde este enfoque, se supedita a su relación con el concepto de interdisciplinariedad y se considera como un momento "de organización y estudio de los contenidos de las disciplinas" (Fiallo, 2001: 26). Tal significado de la integración, pudiera interpretarse como su ***dimensión curricular***, pero sería muy restringido reducirlo a las relaciones interdisciplinarias, sino que también deben incluirse las intra y las transdisciplinarias.

Por otra parte, el análisis del concepto de interdisciplinariedad desde una perspectiva instrumental, llevó a los investigadores canadienses Y. Lenoir y A. Hasni al examen del significado que en ese contexto tiene el concepto de integración, el cual consideran ─acertadamente─ como un proceso que debe ser comprendido desde una doble perspectiva, pues involucra la enseñanza del docente y el aprendizaje del alumno. Estos autores con razón señalan, que desde el punto de vista del aprendizaje, la integración abarca dos dimensiones interrelacionadas y necesarias; como proceso y como producto (Lenoir & Hasni, 2004: 176; Hasni, 2005: 11). En consecuencia sostienen que:

> *[…] la integración es considerada como un proceso interno y transportable de construcción de productos cognitivos, que pertenece al sujeto y que requiere el apoyo apropiado de una tercera persona para actuar como mediadora momentánea (el docente) y para establecer condiciones de aprendizaje favorables con orientaciones integradoras. (Lenoir & Hasni, 2004: 176).*

Pero no todos los que han definido el concepto de integración desde una perspectiva didáctica, lo analizan en su relación con el de interdisciplinariedad. En esta tendencia se ubican las concepciones de la investigadora uruguaya Edith Moraes, quien asume que "Entonces, relacionar, establecer nexos, organizar jerárquicamente conceptos a lo interno de cada disciplina e interdisciplinariamente es integrar conocimientos." (Moraes, 2001: 9).

Aunque la definición que ofrece Moraes restringe la integración de conocimientos a los conceptos, tiene como ventaja, respecto a las analizadas anteriormente, que contempla tanto la integración intradisciplinaria como la interdisciplinaria, lo cual se corresponde con el sentido del uso de esta palabra en muchos trabajos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, donde se utiliza sin explicitar su significado.

En el caso de la didáctica de la Matemática, además de las ideas aportadas por la MEM sobre la integración conceptual, expuestas en la sección 1.2, existen enfoques en que este proceso ha sido incluido, explícita o implícitamente, en conceptos importantes que se han desarrollado. Es así como en la fenomenología didáctica de Freudenthal (Michelsen, 2006: 275) se incluye en la matematización vertical y en los Principios y Estándares del NCTM (2002a) está comprendido implícitamente en el estándar de las "conexiones".

La teoría antropológica de la didáctica ─que concibe el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en términos de la construcción de organizaciones matemáticas (praxeologías) compuestas por tipos de tareas, técnicas para resolver las tareas, tecnologías para explicar esas técnicas y producir otras, y teorías para fundamentar las tecnologías─ explica la integración en términos de la construcción de praxeologías locales, regionales y globales (García y Gascón, 2006: 227) no explicitando, como señala Godino (2001a), el lugar que ocupan los conceptos y las relaciones conceptuales en estas praxeologías.

El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2005; Godino, 2007), explica la integración mediante el concepto de función semiótica, pero no analiza el caso específico de la integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas, aunque incluye a los conceptos como componentes del conocimiento matemático.

Del análisis de todos los enfoques expuestos y de la teoría de la actividad de Leontiev (1979; 1981), se deduce que para integrar, el alumno tiene que actuar, y por tanto se necesita de una tarea, cuya resolución lo conduzca a construir relaciones entre los conceptos que se integran para obtener el conocimiento producto. Se conoce también que la resolución de la tarea contribuye al desarrollo de habilidades (Rico & Silvestre, 2002: 78; Silvestre & Zilberstein, 2002: 86) y a la formación de valores en el alumno (Sigarreta, 2001).

Teniendo en cuenta los distintos significados que se han expuesto de la integración y las reflexiones realizadas al respecto, es posible caracterizar la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas con los atributos siguientes:

- Es un proceso que debe ***ejecutar*** el alumno bajo la ***dirección*** del docente en alguna etapa del proceso de enseñanza-aprendizaje; en la clase o fuera de ella.
- ***Durante este proceso*** el alumno debe determinar y representar las relaciones conjuntistas entre las extensiones de los conceptos involucrados y eventualmente, además, relaciones entre el cardinal de las extensiones de nuevos conceptos que resultan de este proceso o entre el cardinal de las extensiones de esos nuevos conceptos y las de conceptos de partida.
- El momento esencial del proceso transcurre durante la resolución por el alumno de una ***tarea de estudio***, de forma independiente o con ayuda, la cual le es asignada por otro[12], especialmente por el docente.
- La resolución de las tareas de estudio que conducen al alumno a la determinación y representación de relaciones conceptuales, requiere que en este proceso se elaboren o apliquen determinados ***procedimientos*** o ***técnicas*** dirigidas a ello.
- Su transcurso se produce según las ***funciones didácticas*** descritas en el epígrafe 1.2.4; específicamente, los nuevos conocimientos apropiados como resultado de la integración, requieren de fijación para que su aprendizaje adquiera un carácter funcional y duradero.
- El ***resultado fundamental*** del proceso, es la apropiación por el alumno de nuevos conocimientos, especialmente de distintas representaciones de sistemas de proposiciones referidas a las relaciones conceptuales clásicas entre los conceptos y, eventualmente, a relaciones de cardinalidad entre extensiones conceptuales.

[12] Aquí la palabra otro, se asume con el significado dado en el epígrafe 1.2.2; de manera que el propio alumno se puede convertir en el otro.

- Al proceso están asociados ***otros procesos y resultados*** como son, la formación y desarrollo de habilidades y la contribución a la formación de valores en el alumno.

El contenido del capítulo permite arribar a las conclusiones siguientes:

- Todo concepto matemático, como forma del conocimiento, tiene como componentes fundamentales: la extensión, el contenido, los significados y las representaciones, y transita por un proceso de formación y uno de desarrollo. Este último incluye la determinación de relaciones entre distintas representaciones del concepto y entre éste y otros conceptos en proceso de desarrollo.
- El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria se puede describir como el cambio de estado (movimiento) de los sistemas didácticos que forman un grupo-clase, los cuales se caracterizan por poseer composición, entorno y estructura. En la composición se contemplan los elementos de cada sistema didáctico; en el entorno, los sistemas que se relacionan con estos y en la estructura, las relaciones que se establecen. El movimiento de cada sistema se realiza en etapas llamadas funciones didácticas y está regulado por leyes y principios.
- El aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, en lo que respecta a los conocimientos y habilidades asociadas, se puede indicar mediante los desempeños de los alumnos en la resolución de las tareas que pertenecen a determinados tipos, los cuales se derivan de los objetivos del programa.
- El análisis de distintos significados del concepto de integración permitió al autor de este trabajo caracterizar la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, con el objetivo de elaborar un modelo didáctico de este proceso.
- En la bibliografía consultada sobre didáctica de la Matemática, el desarrollo de los métodos y procedimientos referidos a la planificación, la evaluación y la dirección del aprendizaje de la integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas, no se corresponde con las necesidades actuales de la Educación Preuniversitaria cubana.

CAPÍTULO II. MODELO DIDÁCTICO DE LA INTEGRACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS A PARTIR DE LAS RELACIONES CONCEPTUALES CLÁSICAS

En esta tesis se entiende por ***modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas***, en la Educación Preuniversitaria, una representación que interpreta, diseña y ajusta este proceso de integración mediante la determinación de sus características esenciales, en términos de la planificación a ejecutar, y del transcurso de las funciones didácticas en las tres etapas que representan su dinámica: 1) elaboración de técnicas que facilitan el proceso, 2) determinación y representación de relaciones conceptuales utilizando estas técnicas y 3) aplicación de conocimientos sobre las relaciones conceptuales determinadas, a la resolución de tareas (Fig. 1).

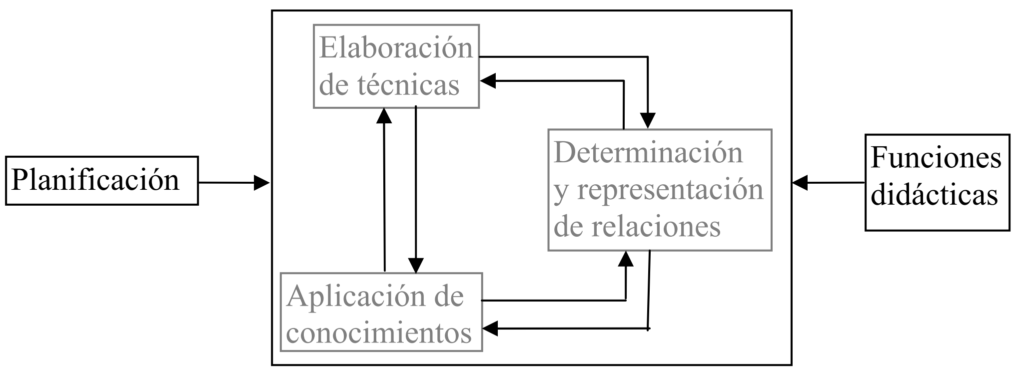


Fig. 1: Modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

El modelo interpreta la integración conceptual que representa, al explicar de forma simplificada sus rasgos más significativos; la diseña, al proyectar las características de un estado futuro partiendo del existente y la ajusta, porque prevé su transformación en la dirección de su mejoramiento, como forma de concreción de su función sustitutivo-heurística.

Este modelo se basa en los "principios didácticos dirigidos a un proceso de enseñanza-aprendizaje que instruya, eduque y desarrolle", elaborados por Silvestre y Zilberstein, citados en el capítulo I, y tiene como objetivo contribuir a que los alumnos y alumnas de la Educación Preuniversitaria integren conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, con la utilización de técnicas facilitadoras y puedan aplicar los conocimientos de que se apropien en ese proceso −junto con otros conocimientos y habilidades apropiados anteriormente− a la resolución de tareas.

En la representación gráfica del modelo, se han colocado dentro de un rectángulo los nombres de las tres etapas que representan la dinámica de la integración conceptual y se ha concebido −como se explicará más adelante− que este proceso, en general, y cada una de las etapas de su dinámica requieren de una planificación, a largo, mediano y corto plazos.

En el modelo se concibe que las etapas representativas de la dinámica de la integración conceptual, transcurran según las funciones didácticas pertinentes, cuya realización demanda de la actuación del docente, y de los alumnos y alumnas, con la utilización de métodos, procedimientos y medios que propicien un aprendizaje desarrollador en los marcos de una determinada forma de organización del grupo-clase.

Estas etapas no siguen una secuencia lineal, pues después de elaborada una técnica se puede pasar a la determinación de relaciones conceptuales y su representación o a la aplicación de los conocimientos referidos a las relaciones conceptuales determinadas en ese proceso, y conocidas las relaciones entre dos o más conceptos, se puede pasar a la aplicación de los conocimientos apropiados en este proceso o a la elaboración de otra técnica.

Esta flexibilidad del modelo permite que los docentes puedan ajustarlo a las características de sus alumnos y alumnas, a sus estilos de enseñanza y a las particularidades de los contenidos de cada uno de los temas del programa de la asignatura.

Seguidamente se describen las etapas del modelo, lo cual incluye sus formas de implementación en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se comienza por la etapa de elaboración de las técnicas, con el objetivo de que el contenido del resto de las etapas pueda ser comprendido significativamente.

2.1. Elaboración de técnicas facilitadoras de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas

El contenido de esta sección se ha dividido en tres epígrafes. En el primero se explican las técnicas que se conciben en el modelo para facilitar la integración conceptual; el segundo está destinado a la exposición de aspectos importantes relacionados con las tareas a utilizar en la elaboración de estas técnicas (tareas de estudio) y el tercero, está dirigido al proceso de elaboración de las técnicas mediante la resolución de las tareas.

2.1.1. Técnicas facilitadoras de la integración

Cuando se necesite integrar conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, el alumno debe determinar cuál es la relación conjuntista existente entre las extensiones de estos conceptos y eventualmente, relaciones de cardinalidad, para lo cual ha de aplicar conocimientos que ya posee sobre los conceptos involucrados, así como otros conocimientos y habilidades, y especialmente algunas técnicas de aprendizaje que se exponen a continuación, las cuales resuelven insuficiencias de las citadas en el capítulo I.

1) Mapa de extensiones y mapa de proposiciones

Partiendo de ideas expuestas por González (2001: 66), en este trabajo se concibe un ***mapa de extensiones,*** como un diagrama en el que se representan las relaciones conjuntistas entre las extensiones de dos o más conceptos comparables y eventualmente, además, relaciones entre la cardinalidad[13] de las extensiones de nuevos conceptos que resultan de ellas mediante intersección, unión, diferencia o composición de estas operaciones o entre la cardinalidad de las extensiones de los nuevos conceptos y la de las extensiones de conceptos de partida.

En una primera aproximación, un mapa de extensiones es muy parecido a un diagrama de Venn, aunque en un mapa de este tipo también se puede representar información sobre la relación entre la cardinalidad de las extensiones de los conceptos, lo cual no se incluye en los diagramas de Venn.

Los mapas de extensiones, según el número de conceptos involucrados y de si representan o no relaciones de cardinalidad[14], pueden dividirse en cuatro tipos (anexo 8).

Como las relaciones conceptuales clásicas son binarias, la construcción de un mapa de extensiones de tres o más conceptos, requiere de la construcción de varios mapas de

---

[13] El cardinal de un conjunto finito es el número de los elementos que posee. El cardinal de un conjunto infinito es un número que tiene el calificativo de transfinito. Un ejemplo, es el cardinal del conjunto de los números naturales, que se denota con el símbolo $\aleph_0$. Todos los conjuntos, finitos o no, entre los que es posible establecer una biyección, tienen el mismo cardinal.

[14] Aunque en la educación general cubana, los conocimientos y las habilidades de los alumnos para determinar la relación de cardinalidad entre dos conjuntos son limitados, el cardinal de un conjunto finito es un concepto que se estudia en décimo grado (MINED, 2004g), y en el contenido de la disciplina Matemática aparecen algunas proposiciones que contienen información sobre la cardinalidad de la extensión de conceptos que se estudian. Son ejemplos de ellas: “el conjunto de los números naturales es infinito” y “en la recta existen puntos a los que no corresponde ningún número natural”.

extensiones de dos conceptos, lo que significa que los mapas de tipo I son básicos, pues hay que construirlos en todos los casos.

La construcción de un mapa de extensiones puede considerarse, como resolución de una tarea de ***creación*** de una representación, en el sentido que se ha concebido este proceso en la sección 1.1 del capítulo I, pues se debe partir de la información que se tiene sobre dos o más conceptos y construir un diagrama representativo de relaciones entre sus extensiones.

Si se tienen, por ejemplo, dos conceptos en desarrollo (E_1, C_1) y (E_2, C_2) que son comparables con respecto a un concepto (E, C), un mapa de extensiones del tipo I de estos conceptos, es uno de los diagramas[15] de la figura 2.

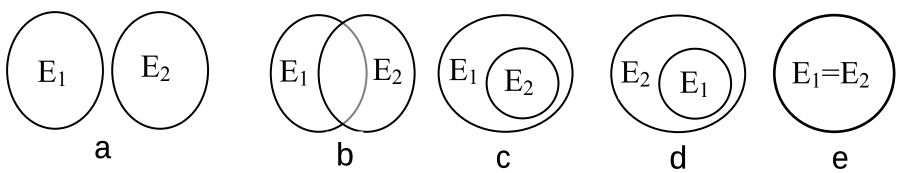


Fig. 2: Posibles mapas de extensiones de dos conceptos.

La construcción de un mapa de extensiones requiere de la determinación de una o varias proposiciones que en conjunto representan relaciones entre los conceptos involucrados en él, para después transferir la información de las proposiciones al diagrama. De aquí resulta que la resolución de tareas de este tipo, exige también la ***conversión*** de representaciones, en el sentido expresado en el capítulo I.

A cada colección de proposiciones, acerca de las relaciones entre dos o más conceptos, que es suficiente para construir un mapa de extensiones, se le denomina ***mapa de proposiciones***.

Si se tienen, por ejemplo, los conceptos de “triángulo rectángulo” y “triángulo escaleno” y se pretende construir un mapa de extensiones que represente la relación conceptual clásica existente entre ellos, se debe disponer de un mapa de proposiciones como el siguiente:

1. Existen triángulos rectángulos que no son escalenos.
2. Existen triángulos escalenos que no son triángulos rectángulos.
3. Existen triángulos rectángulos que son escalenos.

---

[15] También se pueden utilizar otras figuras geométricas para representar las extensiones. Cuando el número de conceptos a relacionar es mayor que dos, a veces es recomendable.

El mapa de extensiones puede representar mejor la relación entre los dos conceptos, si se dispone además, en este ejemplo, de proposiciones sobre la cardinalidad del conjunto de los triángulos rectángulos no escalenos, de los triángulos escalenos no rectángulos o de los triángulos rectángulos escalenos.

La conversión de un mapa de proposiciones en uno de extensiones, es un proceso que incluye, como primera operación, la traducción de las proposiciones del mapa, referidas a los conceptos, en proposiciones que representan relaciones entre las extensiones de estos conceptos, y como segunda operación la conversión de la colección formada por estas últimas en un mapa de extensiones (Fig. 3).

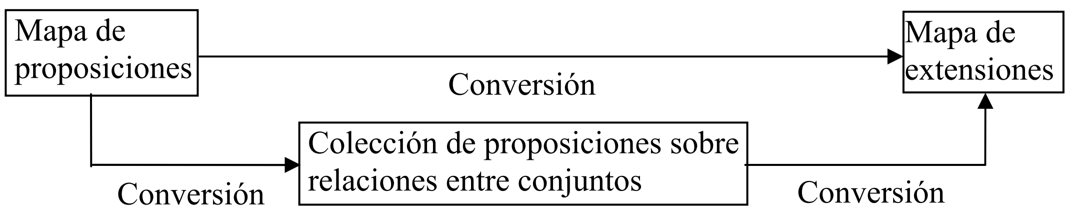


Fig. 3: Conversión de un mapa de proposiciones en un mapa de extensiones.

La conversión de cada proposición conceptual donde intervienen dos conceptos en una proposición sobre conjuntos, transita por las fases siguientes:

1. Denotación de las extensiones de los conceptos.
2. Conversión del sujeto y el predicado lógicos del juicio que expresa la proposición, en frases referidas a la relación de pertenencia.
3. Planteamiento de una proposición sobre conjuntos.

En la primera fase hay que introducir un símbolo para denotar la extensión de cada concepto, cuando en la matemática no exista uno convencional que tenga esta función, como sucede con los distintos conceptos de número. Es así, por ejemplo, que en el caso de los conceptos de “triángulo rectángulo” y “triángulo escaleno”, podrían introducirse las notaciones siguientes:

TR: conjunto de los triángulos rectángulos.
TE: conjunto de los triángulos escalenos.

Después de introducidas estas notaciones, se realiza la conversión del sujeto y el predicado (lógicos) del juicio en frases referidas a la relación de pertenencia. En el ejemplo que se está analizando, el sujeto y el predicado de la primera proposición del mapa de proposiciones son, respectivamente, "triángulo rectángulo" y "triángulo escaleno", los cuales se convierten en las frases "elemento de TR" y "elemento de TE".

En la tercera fase se convierte cada proposición conceptual en una proposición sobre conjuntos, mediante la sustitución del sujeto y el predicado de la primera, por las frases correspondientes de la teoría de conjuntos (segunda columna, tabla del anexo 9).

Para la conversión de una colección de proposiciones sobre las extensiones de dos conceptos en un mapa de extensiones, se requiere conocer las proposiciones de la teoría de conjuntos que caracterizan cada diagrama de la figura 2 (tabla 1). También en la tercera columna de la tabla se muestra un ejemplo de dos conceptos donde se manifiesta cada relación. En los casos c, d y e, las proposiciones son las mínimas necesarias, pues sin todas ellas no es posible dibujar un mapa de extensiones del tipo I, en el caso b se necesitan las dos primeras proposiciones y además la tercera o la cuarta; en el caso a el mapa se puede construir conociendo sólo una de las dos proposiciones.

Tabla 1: Proposiciones de la teoría de conjuntos necesarias para construir mapas de extensiones de dos conceptos.

Mapa	Proposiciones sobre las extensiones	Ejemplo	
		(E_1, C_1)	(E_2, C_2)
a	pa1: ningún elemento de E_1, es elemento de E_2. pa2: ningún elemento de E_2, es elemento de E_1.	Triángulo rectángulo	Triángulo obtusángulo
b	pb1: algún elemento de E_1, no pertenece a E_2. pb2: algún elemento de E_2, no pertenece a E_1. pb3: algún elemento de E_1, es un elemento de E_2. pb4: algún elemento de E_2, es un elemento de E_1	Triángulo isósceles	Triángulo acutángulo
c	pc1: algún elemento de E_1, no pertenece a E_2. pc2: todo elemento de E_2, es elemento de E_1.	Triángulo isósceles	Triángulo equilátero
d	pd1: algún elemento de E_2, no pertenece a E_1. pd2: todo elemento de E_1, es elemento de E_2.	Triángulo equilátero	Triángulo isósceles
e	pe1: todo elemento de E_2, es elemento de E_1. pe2: todo elemento de E_1, es elemento de E_2.	Triángulo equilátero	Triángulo equiángulo

Todas las proposiciones de la tabla 1 expresan juicios categóricos (anexo 10).

Las proposiciones de la tabla 1 expresan juicios entre los cuales existen relaciones, atendiendo a los valores de verdad (anexo 11). Cuando los juicios coinciden (=) o son equivalentes (⇔) tienen los mismos valores de verdad. También hay casos en que de la verdad del primer juicio se obtiene la verdad del segundo (⇒), casos en que de la verdad de uno se obtiene la falsedad del otro (C) y casos en que de la verdad de uno no es posible deducir la del otro (ND).

Del análisis del anexo 11 resultan las conclusiones siguientes:

- Las 12 proposiciones que aparecen en la tabla 1 se pueden reducir a seis, pues pa_1 y pa_2 son equivalentes entre sí, al igual que pb_3 y pb_4; pb_1 y pc_1 coinciden y lo mismo ocurre con las proposiciones de los pares pb_2-pd_1, pc_2-pe_1 y pd_2-pe_2.
- Las proposiciones más fuertes son pa_1 y pa_2, pues si una de ellas se cumple, se tiene la información suficiente para construir una primera aproximación del mapa de extensiones.
- Hay pares de proposiciones que expresan juicios contrarios o contradictorios[16]; por lo que si se cumple una de estas proposiciones no se cumple la otra y por consiguiente es posible descartar algunos de los casos de la figura 1 (anexo 12).

Si en el caso b se dispone, además, de alguna proposición que suministre información sobre la relación entre la cardinalidad de $E_1 \cap E_2$ y de $E_1 \setminus E_2$, se puede construir un mapa de extensiones más preciso. La misma situación se presenta en los casos c y d, si se dispone de información sobre algunas relaciones de cardinalidad que se analizarán más adelante en este epígrafe.

2) Mapa simbólico

Como las extensiones de los conceptos son conjuntos, para representar sus relaciones se pueden utilizar los símbolos de las relaciones (igualdad e inclusión) y de las operaciones (internas) de la teoría de conjuntos, algunos de los cuales se introducen en el sexto grado de la educación general (Rizo y otros, 1990a: 11) y otros se estudian en octavo y décimo

[16] Dos juicios categóricos son contrarios, si no son verdaderos a la vez. Dos juicios son contradictorios si uno es la negación del otro o equivalente a la negación.

(Campistrous y otros, 1989: 1)[17]. En dependencia del sistema de representación que se escoja, cada mapa de la figura 2 se puede expresar de distintas formas.

A una representación de las relaciones entre las extensiones de dos o más conceptos mediante los signos de las operaciones (internas) de la teoría de conjuntos, las relaciones de igualdad, inclusión y las negaciones de estas, y eventualmente de relaciones de cardinalidad, y las operaciones lógicas, se le denomina ***mapa simbólico***.

En la tabla del anexo 13 se exponen algunos mapas simbólicos correspondientes a cada uno de los mapas de extensiones de la figura 2.

Los mapas simbólicos también se pueden dividir en cuatro tipos, según el número de conceptos involucrados y de si contienen o no expresiones sobre cardinalidad.

Estos mapas pueden jugar el papel de eslabón intermedio en la construcción de un mapa de extensiones a partir de uno de proposiciones, de manera que primeramente se realiza la conversión del mapa de proposiciones a uno simbólico y después se convierte éste en uno de extensiones (Fig. 4).

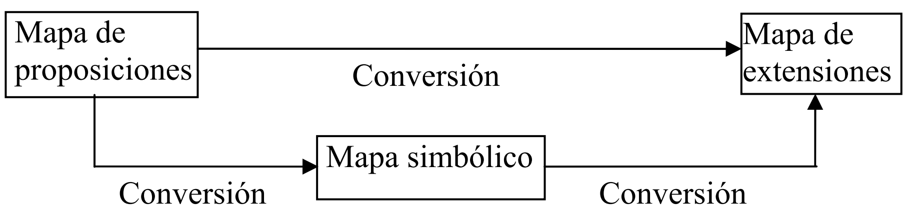


Fig. 4: Conversión de un mapa de proposiciones en un mapa de extensiones.

La conversión de un mapa de proposiciones en uno simbólico requiere primeramente de la traducción de cada proposición conceptual en una proposición sobre conjuntos y después esta última se convierte en una expresión del mapa simbólico (Fig. 5). En la tabla del anexo 14 se exponen expresiones del mapa simbólico correspondientes a cada una de las proposiciones sobre conjuntos de la tabla 1.

[17] A pesar de que en muchos textos de Matemática se utilizan los signos $\subseteq$ y $\subset$ para representar las relaciones “es subconjunto de” y “es subconjunto propio de”, respectivamente, la primera relación se denota en la educación general con el signo $\subset$, lo que trae como consecuencia que en este nivel educativo no se disponga de un signo para representar la segunda relación, que es un caso particular de la primera.

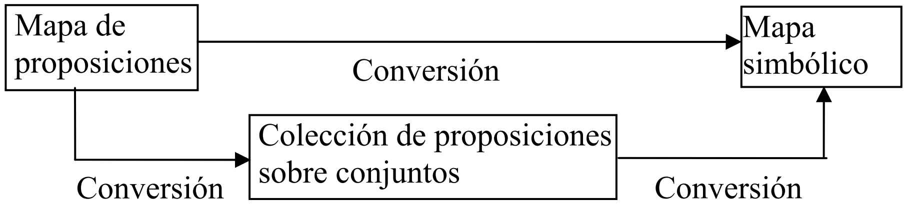


Fig. 5: Conversión de un mapa de proposiciones en un mapa simbólico.

Las distintas vías expuestas de convertir un mapa de proposiciones en uno de extensiones se resumen en el diagrama del anexo 15.

Como el diagrama del anexo 15 es conmutativo, la conversión no sólo es posible en el sentido que indican las flechas, sino también en el sentido opuesto, lo cual permite el paso de un vértice cualquiera a otro utilizando distintas vías.

3) Mapa de preguntas. Procedimiento general

Aunque la determinación de la relación conceptual clásica entre dos conceptos, puede iniciarse con la resolución de una tarea relativa a la construcción de un mapa de extensiones, simbólico o de proposiciones; en la Educación Preuniversitaria es conveniente hacerlo con un mapa de extensiones, dada la sencillez de éste y su relación con los diagramas de Venn, estudiados en niveles precedentes.

La construcción de un mapa de extensiones del modo que se representa en el anexo 15, requiere disponer de un mapa de proposiciones conceptuales, de la colección correspondiente de proposiciones sobre conjuntos o de un mapa simbólico. Sin embargo, para la integración conceptual, lo más importante no es que el alumno construya el mapa de extensiones, dado uno de los otros mapas, sino que participe activamente en el planteamiento, demostración y conversión de las proposiciones necesarias para hacerlo.

Pero el planteamiento de estas proposiciones, raras veces puede realizarse en forma de lista y directamente, sino que es un proceso en el que entre dos de ellas median algunas operaciones y donde cada una debe surgir como respuesta a una pregunta, cuyo planteamiento –en el caso de los mapas del tipo I– ha de realizarse teniendo en cuenta la relación entre las colecciones de proposiciones sobre conjuntos de la tabla 1 o las correspondientes colecciones de expresiones simbólicas del anexo 14, con los mapas de extensiones de la figura 2.

Dada la diferencia entre los distintos tipos de mapas, en cuanto a las proposiciones necesarias, y teniendo en cuenta el carácter básico de la construcción de los mapas del tipo I, el proceso de construcción de los mapas se expone a continuación de forma diferenciada, comenzando por los del tipo I.

Construcción de mapas del tipo I

Debido a la fortaleza de la proposición pa_1 (pa_2) y su relación con el resto de las proposiciones expuestas en la tabla 1, es conveniente comenzar por una pregunta que lleve a establecer la validez o falsedad de esta proposición (anexo 16).

Es por eso que la construcción de un mapa de extensiones de dos conceptos puede iniciarse con la ***pregunta:*** ¿tienen las extensiones de los conceptos un elemento común?, la cual es factible expresar sintéticamente en la forma ¿$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$?, y que los alumnos plantearían utilizando su vocabulario activo. Así, por ejemplo, si se estuvieran analizando los conceptos de triángulo isósceles y triángulo acutángulo, la pregunta podría ser ¿existe algún triángulo que sea acutángulo e isósceles a la vez?

La interrogación acerca de si la intersección de las extensiones de los conceptos es vacía o no, tiene dos posibles respuestas en forma de ***proposiciones***; una afirmativa y una negativa. La respuesta negativa conduce a la proposición pa_1, la cual se puede demostrar considerando que si un objeto de E satisface las propiedades de C_1, entonces no satisface alguna propiedad de C_2. La respuesta afirmativa se expresa con la proposición pb_3, que se demuestra mediante un ejemplo.

En el caso de los conceptos de triángulo isósceles y triángulo acutángulo, la respuesta a la pregunta formulada es afirmativa; de manera que se obtiene la proposición: algunos triángulos isósceles son acutángulos.

Cuando la respuesta a la pregunta es negativa, queda determinada una primera aproximación del mapa de extensiones mediante el diagrama a de la figura 2, pero si la respuesta es afirmativa, hay que determinar cuál del resto de los diagramas es una primera aproximación del mapa de extensiones.

Para ello, puede observarse en la tabla del anexo 12 que a las proposiciones pc_2 y pd_2, corresponden sólo dos casos del mapa de extensiones. Por esta razón, puede formularse como segunda ***pregunta***: ¿es todo elemento de E_2, un elemento de E_1?, que se puede expresar mediante los signos de la teoría de conjuntos como ¿$E_2 \subset E_1$?

Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, se obtiene la proposición pc2, que no es suficiente para determinar el mapa de extensiones buscado, pero que reduce la lista de los posibles, a los casos c o e. Se necesita de una segunda proposición que resulta de las posibles respuestas a una tercera pregunta: ¿es todo elemento de E_1, un elemento de E_2?

Si la respuesta de esta tercera pregunta es afirmativa resulta la proposición pe2 y el mapa de extensiones es el e. Si por el contrario la respuesta es negativa, se tiene la proposición pc1 y entonces el mapa de extensiones es el c.

Por otra parte, si la respuesta a la segunda pregunta es negativa, resulta la proposición pd1, que no es suficiente para determinar el mapa de extensiones buscado, pero que permite reducir la lista de los posibles a los casos b o d. Se necesita, entonces de una segunda proposición que resulta de la pregunta: ¿es todo elemento de E_1, un elemento de E_2?

Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, se obtiene la proposición pd2 y el mapa de extensiones es el d. Si la respuesta es negativa, se obtiene la proposición pb1 y el mapa de extensiones es el b.

Para obtener el mapa de extensiones que corresponde a cada caso, hay que formular una colección de preguntas en un determinado orden, a la cual se le ha denominado ***mapa de preguntas***. Como se observa en el anexo 16, cada mapa de preguntas no opera separadamente de las proposiciones que surgen como sus respuestas ni de los mapas de extensiones que las representan[18].

Si en el diagrama del anexo 16, se sustituye la segunda pregunta por la interrogación: ¿es todo elemento de E_1, un elemento de E_2?, se obtiene un nuevo mapa de preguntas (anexo 17). Esto también ocurre si se realizan otras sustituciones de preguntas.

Esta característica de los mapas de preguntas indica que no son jerárquicos –a diferencia de lo que ocurre con mapas de otros tipos que se utilizan para la elaboración u organización del conocimiento– y tiene como ventaja que ofrece al alumno libertad para actuar y convertirse en protagonista de su propio aprendizaje.

[18] En la figura, las preguntas están escritas en el interior de un rombo.

Por tanto, a un mismo mapa de extensiones pueden corresponder diferentes mapas de preguntas, por lo que el alumno tiene distintas opciones para construir un mapa de extensiones y diferentes alumnos pueden proceder de maneras distintas.

No obstante, cualquiera sea el orden que siga el alumno, el número máximo de preguntas a plantear, es tres y el mínimo es uno.

En algunas ordenaciones predominan las preguntas que corresponden a juicios particulares, cuya demostración usualmente se realiza mediante la construcción de un ejemplo. En otras ordenaciones predominan las preguntas que se corresponden con juicios universales, cuya refutación se logra mediante un contraejemplo.

Aunque el punto de partida para la elaboración de las preguntas son las proposiciones sobre conjuntos de la tabla 1 o las correspondientes expresiones simbólicas de la tabla del anexo 14, puede partirse de un mapa o conjunto de mapas de extensiones, que se escojan entre los posibles, para iniciar el trabajo y orientarse en la elaboración de las preguntas.

Es así, que la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, tal como se ha concebido en este trabajo, es un proceso en el cual la transferencia de información sigue una secuencia que se inicia con la denotación de las extensiones de los conceptos a relacionar –cuando no existan símbolos convencionales en la matemática–, continúa con la consideración de los posibles mapas de extensiones, a partir de los cuales se selecciona uno o un conjunto de ellos a modo de conjetura y después se prosigue con otras acciones, entre ellas la formulación de una proposición, que requiere de un razonamiento para argumentarla o demostrarla y permite reducir la lista de los mapas de extensiones seleccionados, obtener el representativo de la relación existente entre los conceptos, o seleccionar otro mapa o grupo. Este procedimiento general se puede representar en un esquema, denominado ***diagrama de conversión*** (Fig. 6).

El proceso puede terminar después de un primer ciclo[19], o puede necesitar hasta tres, de manera que en cada uno se determina una proposición.

[19] Aquí se asume el concepto de ciclo de la teoría de grafos, de manera que se entiende como tal una sucesión de aristas adyacentes, donde no se recorre dos veces la misma arista, y donde se regresa al vértice inicial.

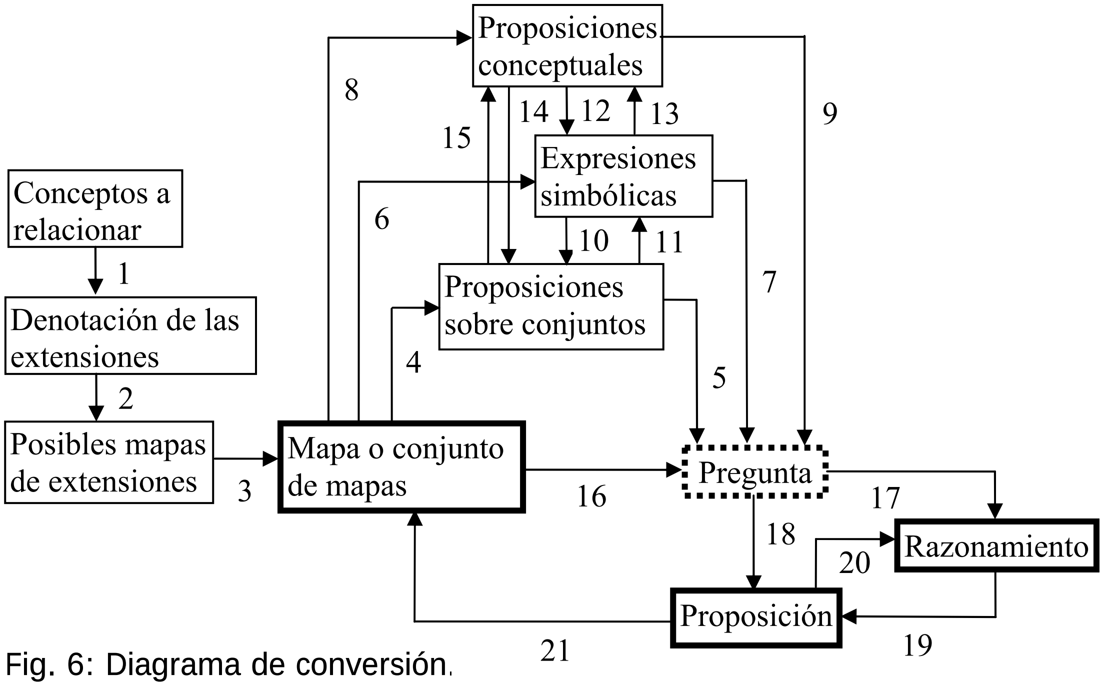


Fig. 6: Diagrama de conversión.

En dependencia del nivel de partida del alumno, la determinación de cada proposición puede realizarla directamente a partir de la consideración de las posibles proposiciones conceptuales, las expresiones simbólicas o las proposiciones sobre conjuntos, o también formulando previamente una pregunta a partir de tales consideraciones.

La transferencia del mapa o conjunto de mapas seleccionados a la pregunta, puede ejecutarse de 16 formas correctas diferentes, entre las que se encuentran:

- Formulación directa de la pregunta (16).
- Tener en cuenta las proposiciones sobre conjuntos que caracterizan cada mapa de extensiones (4) y plantear una pregunta (5) cuya respuesta sea una de estas proposiciones o su negación (vía (4, 5)).
- Tener en cuenta los mapas simbólicos correspondientes (6) y plantear una pregunta, una de cuyas posibles respuesta se corresponda con alguna de las expresiones del mapa o su negación (7) (vía (6, 7)).
- Tener en cuenta las proposiciones conceptuales correspondientes (8) y plantear una pregunta (9) cuya respuesta sea una de estas proposiciones o su negación (vía (8, 9)).
- Tener en cuenta las proposiciones sobre conjuntos que caracterizan cada mapa de extensiones (4), considerar expresiones de los mapas simbólicos respectivos (11) y

finalmente plantear una pregunta, una de cuyas posibles respuestas se corresponda con alguna de las expresiones o su negación (7) (vía (4, 11, 7)).

- Tener en cuenta los mapas simbólicos correspondientes (6), considerar proposiciones sobre conjuntos que les correspondan (10) y plantear una pregunta cuya respuesta sea una de estas proposiciones o su negación (5) (vía (6, 10, 5)).
- Tener en cuenta los mapas simbólicos correspondientes (6), considerar proposiciones conceptuales que les correspondan (13) y plantear una pregunta (9) cuya respuesta sea una de estas proposiciones o su negación (vía (6, 13, 9)).

La proposición que responde a la pregunta puede obtenerse directamente, cuando ésta sea conocida por el estudiante (18). En caso contrario, la pregunta lo conduce a un razonamiento (17) que consiste en demostrar, argumentar o refutar una proposición (19).

En determinados casos el alumno no tendrá necesidad de formular una pregunta y determinará la proposición de forma directa (18) o después de un razonamiento (19). También es posible que formule la proposición a modo de conjetura y posteriormente la argumente o demuestre (20).

Cuando el alumno disponga de la proposición puede obtener el mapa de extensiones que busca o una colección de los posibles. En el último caso, debe repetir el proceso hasta que obtenga el mapa de extensiones.

La transferencia de información de la proposición a los mapas de extensiones (21) puede realizarse de forma directa o empleando alguna de las variantes de conversión representadas en el anexo 15.

Si después de construido el mapa de extensiones, no se han planteado las proposiciones conceptuales correspondientes, el alumno tendrá que realizar la conversión etiquetada con el 8 en el diagrama de conversión.

Construcción de mapas del tipo II

En los casos a, b, c y d de la figura 2, después de que el alumno disponga de una primera aproximación del mapa de extensiones, puede encaminar su actividad hacia el mejoramiento de este diagrama, mediante la determinación de proposiciones que expresen relaciones de cardinalidad y su transferencia a un mapa que represente mejor las relaciones entre las extensiones, al tener en cuenta ese conocimiento.

Las proposiciones sobre cardinalidad, al igual que las relativas a relaciones conjuntistas, pueden formularse utilizando distintos sistemas de representación; ya sea en forma conceptual, al estilo de "existen tantos números naturales como fraccionarios"; en forma conjuntista, como "los conjuntos N y Q_+ son isomorfos[20]" o de manera simbólica[21], al estilo de card N=card Q_+.

Estas proposiciones se determinan comparando los cardinales de las extensiones de los conceptos, y en dependencia del caso en análisis –de los representados en la figura 2– también el de otros conjuntos como la intersección y las diferencias de las extensiones (anexo 18). Resultan así distintas proposiciones posibles (anexo 19).

Por ejemplo, el mapa de extensiones del tipo I de los conceptos "número primo" y "número par", corresponde al caso b de la figura 2. La construcción de un mapa de extensiones del tipo II, lleva a comparar la cantidad de números pares (cardinal de E_1) con la de números primos (cardinal de E_2) y la de números pares primos (cardinal de $E_1 \cap E_2$), así como esta última con la de números pares no primos (cardinal de $E_1 \backslash E_2$).

Cuando la extensión de uno de los conceptos es un conjunto infinito, la representación conjuntista de las proposiciones relativas a la cardinalidad, como aparece en el anexo 19 sólo tiene un carácter intuitivo, pero carece de rigor. Éste se puede lograr sólo después de formado el concepto de función biyectiva en onceno grado. Posteriormente a ello, es posible expresar las proposiciones sobre cardinalidad con más exactitud mediante su uso (anexo 20), lo cual requiere de la formación previa del concepto de subconjunto propio de un conjunto.

Cada uno de los mapas de extensiones de la figura 2 adopta una forma específica en función de las relaciones de cardinalidad que se cumplan y cada forma puede representarse mediante distintas colecciones de proposiciones sobre estas relaciones (anexo 21).

---

[20] Este concepto no se estudia en la educación general en Cuba, se utilizará como idea intuitiva la frase "N y Q+ tienen el mismo número de elementos", hasta que en onceno grado se forme el concepto de función biyectiva, que permitirá sustituirla por "existe una biyección de N en Q+".

[21] La simbología para denotar el cardinal se introduce en décimo grado (MINED, 2004g: clase26).

El proceso de transferencia en la construcción de un mapa de extensiones del tipo II a partir de uno del tipo I, también se puede representar mediante el diagrama de conversión (Fig. 6), considerando como posibles mapas de extensiones, distintas variantes del mapa del tipo I y teniendo en cuenta proposiciones sobre relaciones de cardinalidad.

Construcción de mapas del tipo III

Cuando la integración conceptual se base en las relaciones conceptuales clásicas entre n conceptos (n>2), para la construcción de un mapa de extensiones del tipo III, el alumno debe construir primeramente mapas de extensiones de dos conceptos, después de tres, de cuatro, etc., hasta construir el mapa correspondiente a los n conceptos.

Para construir en este caso los mapas de extensiones de dos conceptos, se deben formar todos los pares posibles de conceptos; cuyo número M_2, según la fórmula del número de combinaciones sin repetición de n objetos, tomados p a p (Campistrous, Rivero, Durán & Sandoval, 1991: 31), es $M_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$. Si se trata, por ejemplo, de tres conceptos (n=3), resulta $M_2=3$ y por tanto hay que construir tres mapas de extensiones de dos conceptos.

De igual manera, la construcción de los mapas de extensiones de tres conceptos requiere determinar previamente todas las ternas posibles de conceptos, cuyo número M_3, según la fórmula citada en el párrafo anterior, es $M_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

El número X_n de mapas de extensiones que se deben construir para llegar a un mapa de n conceptos (n>2) del tipo III, es la suma de todos los números M_p ($2\leq p\leq n$) de los que M_2 y M_3 son casos particulares. A partir de las fórmulas del binomio (Campistrous, Rivero, Durán & Sandoval, 1991: 36) y del número de combinaciones sin repetición de n objetos tomados p a p, se deduce la relación $X_n=2^n-n-1$. Resulta, por ejemplo, que la construcción de un mapa de extensiones de 3 conceptos, necesita de la construcción de $X_3=2^3-3-1=4$ mapas de extensiones y la de 5 conceptos, de $X_5=2^5-5-1= 26$.

El número de mapas a construir es uno de los factores indicativos de que la complejidad de la construcción de un mapa del tipo III es superior a la de un mapa del tipo I.

Otro factor influyente en la elevación de este nivel de complejidad, es el número de casos diferentes que se pueden presentar; que si para dos conceptos es de cinco, aumenta notablemente con el incremento del número de conceptos. Para ilustrar el significado de esto, es conveniente analizar el caso de tres conceptos.

Si se tienen tres conceptos de extensiones E_1, E_2 y E_3, respectivamente, a cada par formado por dos de estos, corresponden cinco mapas de extensiones posibles, y por tanto, según la regla del producto de la combinatoria, podrían existir $5^3 = 125$ casos diferentes para un mapa de extensiones de tres conceptos (anexo 22).

Pero como algunos de estos 125 casos no son posibles (sombreados en el anexo 22) y otros pueden presentarse mediante desdoblamiento de dos formas diferentes (en negrita y cursiva en el anexo 22), se debe restar a 125 el número de casos imposibles (71) y sumarle el de los que resultan por desdoblamiento (20), para obtener 74, que es el número de mapas de extensiones del tipo III, posibles, de tres conceptos (anexo 23).

Estos 74 mapas se pueden distribuir en 22 formas (anexo 24), de modo que todos los de una misma forma se obtienen unos de otros mediante permutaciones de los tres conjuntos que intervienen en ella. De las 22 formas existen cuatro donde, al menos, dos conceptos son idénticos (sombreadas en el anexo 24) que no se presentan con frecuencia en la educación general.

Para la construcción de los mapas correspondientes a las formas donde existen desdoblamientos (en negrita y cursiva, anexo 23), además de las proposiciones referidas a las relaciones resultantes de cada uno de los mapas de dos conceptos, se necesitan proposiciones adicionales, suficientes para decidir el caso correspondiente. Es así, por ejemplo, que para decidirse por la forma 11 desechando la 12 (anexo 24), se debe probar que la intersección de las tres extensiones es no vacía. En casos como éste, se sigue el proceso representado en el diagrama de conversión a partir de la arista 3, seleccionando como posibles mapas de extensiones las dos variantes del desdoblamiento o una de ellas.

Lo anterior indica que la construcción de mapas de extensiones del tipo III de tres conceptos, se reduce a la construcción de mapas de dos conceptos, pero en algunos casos se necesitan proposiciones adicionales, además de las que resultan de la construcción de los mapas del tipo I.

En los casos de más de tres conceptos se presentan situaciones análogas a las que ocurren con tres, por lo que el número de casos posibles aumenta considerablemente.

Es importante apuntar, que el número de casos posibles para un mapa de extensiones del tipo III de n conceptos (n>2) no tiene que ser conocido por el alumno, de igual modo que éste no tiene que calcular el número M_p para construirlo.

Construcción de mapas del tipo IV

La construcción de mapas del tipo IV a partir de mapas del tipo III, como ocurre con los del tipo II, no es factible en todos los casos. Cuando ello ocurra, la acción se ejecuta de forma análoga a la construcción de mapas del tipo II, mediante la comparación de la cardinalidad de las extensiones de algunos o de todos los conceptos que intervienen, así como de otros conjuntos que resultan de operaciones entre las extensiones.

Aunque, según los objetivos del aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, los casos para los que se dispone de recursos cognitivos facilitadores de la construcción de mapas de los tipos II o IV son limitados, es importante no descartarlos pues en ocasiones ésta resulta muy necesaria, útil y motivadora.

Todos los procedimientos relativos a la construcción de los mapas de cada tipo se pueden integrar en un procedimiento general de la integración conceptual investigada (anexo 25).

2.1.2. Tareas dirigidas a la elaboración de las técnicas

El diagrama de conversión constituye un punto de partida para la determinación de las características que ha de tener la tarea de estudio, que será propuesta por el docente a los alumnos y alumnas para la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

La tarea de estudio para tales fines, choca con una dificultad análoga a la que se presenta con la aplicación de los mapas conceptuales y de otras técnicas de aprendizaje (Casas, 2002: 146), pues el alumno tiene que apropiarse de las técnicas y a la vez aplicarlas para determinar relaciones conceptuales.

Por esta razón, en una primera etapa, siguiendo la idea aristotélica de que "las cosas que debemos aprender, antes de poder hacerlas, aprendemos haciéndolas" (citado por Cortese, sfa: 166), hay que trabajar tanto en función de que el alumno integre conceptos como en la enseñanza y aprendizaje de las técnicas que ha de utilizar para lograrlo**.** Después de aprendidas las técnicas, el énfasis debe estar en su aplicación en nuevas situaciones y contextos.

Las tareas para la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, constituyen tareas de estudio en el sentido expuesto en el epígrafe 1.2.2 del capítulo I. Al resolverlas el alumno debe aplicar las técnicas anteriormente expuestas para obtener diversas representaciones de las relaciones conceptuales clásicas buscadas.

Entre los factores determinantes de la complejidad de la tarea de estudio, se incluyen el número de conceptos involucrados y el de proposiciones conocidas por el alumno que la ha de resolver, respecto a las necesarias para satisfacer la exigencia; de manera que se pueden diferenciar varios tipos de tareas, según el criterio formado por estas dos características, donde la segunda está asociada al momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual se proponga la tarea (tabla 2).

Tabla 2: Tipos de tareas según el número de conceptos involucrados y de proposiciones conocidas por el alumno

Proposiciones conocidas	Número de conceptos a integrar	
	Dos conceptos	Más de dos conceptos
Todas	I	IV
Sólo algunas	II	V
Ninguna	III	VI

Según la tipología de mapas expuesta en el epígrafe anterior, la resolución de una tarea del tipo I, II o III conduce a un mapa de extensiones del tipo I o II, mientras que la resolución de una tarea del tipo IV, V o VI, lleva a un mapa del tipo III o IV.

En los tipos de tareas IV y V hay que diferenciar dos casos, pues puede suceder que los alumnos hayan construido o no con anterioridad el mapa de extensiones correspondiente a algunos de los conceptos involucrados. En el primer caso, tendrían que recuperar lo aprendido para después determinar las nuevas relaciones conceptuales buscadas, mientras que en el segundo, deberían determinarlas todas y realizar sus representaciones.

Cada uno de los tipos de tareas de la tabla 2 se puede asociar a un momento del proceso de enseñanza-aprendizaje (anexo 26).

Cualquier tarea de estudio de alguno de los tipos descritos, debe contener, como toda tarea, los componentes y cumplir con los requisitos presentados en el epígrafe 1.2.2 del capítulo I. En cuanto a las condiciones y exigencias, son necesarias las precisiones siguientes:

- Debe contener una información inicial acerca de los conceptos cuyas relaciones se van a investigar, con el objetivo de coadyuvar a la orientación de la actividad del alumno.
- Además de las exigencias dirigidas a la determinación de las nuevas relaciones, debe contener exigencias orientadas a la recuperación de conocimientos previamente apropiados, según el caso.
- Cuando una tarea pertenezca a los tipos IV o V y los alumnos hayan construido previamente el mapa de extensiones correspondiente a algunos de los conceptos involucrados, ésta debe contener una primera exigencia dirigida a recuperar los conocimientos adquiridos acerca de tales mapas.
- Cuando se trate de tareas donde haya que establecer relaciones entre más de dos conceptos (tipos IV, V y VI, tabla 2), es conveniente, en función de las características de cada alumno y alumna, descomponer la exigencia correspondiente, en varias exigencias parciales que permitan la obtención escalonada de los diferentes mapas de extensiones.
- En las exigencias que correspondan a la determinación de relaciones conceptuales para la construcción de un nuevo mapa de extensiones, ha de pedírsele al alumno que presente de forma escrita las proposiciones que obtenga en el proceso y, en dependencia de su nivel de desarrollo, las preguntas utilizadas en su determinación.
- Según el objetivo a alcanzar, en las exigencias de la tarea se pueden fijar algunos medios de aprendizaje a utilizar por el alumno, especialmente programas informáticos.

Un ejemplo de tarea de estudio del tipo V, cuya resolución se puede orientar después de la formación del concepto de función cuadrática en décimo grado, es el siguiente:

En esta clase te has apropiado del concepto de función cuadrática, definido a partir del concepto de función, al igual que otros conceptos como el de función monótona *creciente y función monótona decreciente que ya conoces y en clases anteriores has relacionado entre sí y con el concepto de función, mediante un mapa de extensiones.*

a) Reproduce el mapa de extensiones que representa la relación entre los conceptos de función, función monótona creciente y función monótona decreciente. Escribe las proposiciones que representan las relaciones entre estos conceptos.

b) Construye un mapa de extensiones que represente las relaciones entre los conceptos siguientes. Deja escritas las preguntas y las proposiciones que formulaste, así como los razonamientos que hiciste para lograrlo en cada caso.

- *Función cuadrática y función monótona creciente.*
- *Función cuadrática y función monótona decreciente.*
- *Función, función monótona creciente, función monótona decreciente y función cuadrática.*

En el anexo 27 se presentan otros ejemplos, relativos a los otros tipos de tareas de la tabla 2.

Hasta tanto el alumno no tenga formado el concepto de mapa de extensiones, en la exigencia de la tarea de estudio se debe sustituir esta frase por otra que facilite la comprensión. Es así, por ejemplo, que si se trata de determinar la relación entre los conceptos de función y de función cuadrática, podría sustituirse la frase mapa de extensiones por “diagrama representativo de la relación entre el conjunto de las funciones y de las funciones cuadráticas”.

De igual forma mientras no tengan formado el concepto de cardinal, se debe hablar de número de elementos y no utilizar este término.

Las tareas de estudio tipificadas en la tabla 2, pueden diferenciarse por el tiempo que se necesita para su resolución, el cual puede variar de un alumno a otro. Es así, que algunas se podrán resolver en un corto período de tiempo durante la clase o fuera de ella y otras, necesitarán de más tiempo y, tal vez, de estudio e investigación.

Una característica que también diferencia a una tarea de otra, es si la exigencia es ***abierta*** o ***cerrada*** respecto al tipo de relaciones a determinar entre las extensiones. Una tarea como la del ejemplo anteriormente expuesto y las del anexo 27, tienen una exigencia abierta, pues el alumno puede elegir libremente las relaciones a investigar. Cuando la exigencia es cerrada, se limita el tipo de relación a determinar por el alumno; pues se puede pedir que sólo se tengan en cuenta las relaciones conjuntistas o que además de éstas, se investiguen relaciones de cardinalidad. También en una tarea cerrada se puede dar un mapa del tipo I y pedir la construcción de uno del tipo II a partir de éste; así la exigencia se reduce a las relaciones de cardinalidad.

Desde esta perspectiva, dos tareas con las mismas condiciones pueden ser de diferentes tipos si sus exigencias son distintas, pues, por ejemplo, se puede disponer de las proposiciones suficientes para construir un mapa del tipo I y necesitar de proposiciones sobre relaciones de cardinalidad para convertirlo en uno del tipo II.

2.1.3. El proceso de elaboración de las técnicas

El ***objetivo general*** fundamental de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, consiste en “determinar relaciones entre conceptos –utilizando las relaciones y operaciones conjuntistas entre sus extensiones y eventualmente relaciones de cardinalidad– y representarlas de forma verbal, gráfica y simbólica” y se debe alcanzar en ***dos etapas*** interrelacionadas; en la primera, el alumno determina relaciones conceptuales mientras se apropia de las técnicas y en la segunda, las determina aplicando las técnicas ya apropiadas. En este epígrafe se expone la primera etapa (de la dinámica).

Las acciones del docente y del alumno en la resolución de tareas de estudio, dependen de varios factores interrelacionados, entre ellos, del nivel de dominio por parte del alumno de las técnicas para la construcción de mapas de los diferentes tipos y de si la tarea se concibe para ser resuelta en la clase o fuera de ella (contextos de actuación del alumno).

Para expresar el nivel de dominio de una técnica se consideran como indicadores: su conocimiento y poseer habilidades para aplicarla, los cuales están interrelacionados de modo que la existencia del segundo implica la del primero, pero no en el sentido inverso.

Si se asocia una variable dicotómica a estos indicadores cuyos valores posibles son sí (S) o no (N) y se diferencian las técnicas según el tipo de mapa del que son específicas, resultan 8 casos probables de conocimiento de las técnicas y 8 referidos a la tenencia de habilidades para aplicarlas (anexo 28), que se reducen a 6, respectivamente, debido a que no se pueden conocer las técnicas para construir mapas del tipo III, sin conocer las necesarias para la construcción de mapas del tipo I.

Si se combinan el conocimiento de las técnicas con la tenencia de habilidades para aplicarlas; resultan 36 situaciones probables, de las cuales hay que descontar 18 (sombreadas en el anexo 29), atendiendo a la relación que existe entre estos indicadores.

Estas situaciones representan estados posibles del dominio de las técnicas, incluidos los dos estados extremos, es decir, el caso en que el alumno no conoce ninguna técnica (estado mínimo) y aquel donde las conoce todas y tiene habilidades para aplicarlas (estado máximo).

El transcurso de la elaboración de las técnicas puede representarse como una secuencia de situaciones de las representadas en el anexo 30, con las acciones a ejecutar para pasar de una a otra, intercaladas. Aunque el número de estas secuencias supera los mil billones, para el aprendizaje de las técnicas se conciben, en esta tesis, dos alternativas excluyentes, que parten de la situación que expresa el estado mínimo y mediante la ejecución de diversas acciones subordinadas a ***objetivos parciales*** que se derivan del general, se llega a la situación del estado máximo correspondiente a la etapa de aprendizaje de las técnicas (Fig. 7).

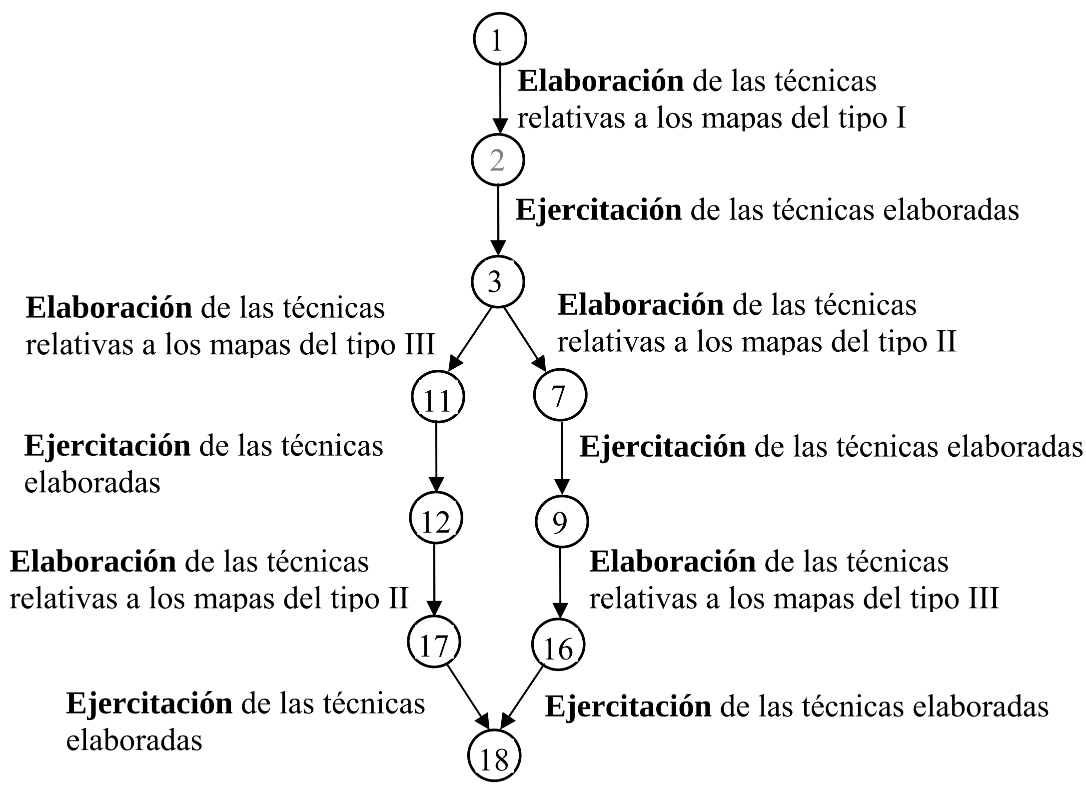


Fig. 7: Secuencias de situaciones para el aprendizaje de las técnicas.

En la primera secuencia (1-2-3-7-9-16-18)[22] se parte del estado mínimo (situación 1), se elaboran las técnicas que permiten la construcción de los mapas del tipo I y se llega a la situación 2. Seguidamente se ejercitan estas técnicas y se arriba a la situación 3. Después se elaboran las técnicas que permiten la construcción de los mapas del tipo II para llegar a la situación 7. Se continúa con la ejercitación de estas técnicas y se alcanza la situación 9. Acto seguido, se elaboran las técnicas que permiten la construcción de los mapas del tipo III para llegar a la situación 16. Por último, se ejercitan tales técnicas y se pasa a la situación 18.

La segunda secuencia (1-2-3-11-12-17-18) se diferencia de la primera, en que en ésta la elaboración de las técnicas para construir mapas del tipo III, antecede a la elaboración de las relativas a la construcción de los mapas del tipo II.

El ordenamiento de estas situaciones se ha realizado de manera que la responsabilidad del alumno respecto a la resolución de la tarea de estudio vaya aumentando a medida que la del docente decrece. Así se garantiza una tendencia creciente del papel activo del alumno en su aprendizaje y se resuelve, de modo satisfactorio, el problema de la topogénesis.

El paso de una situación A, a una situación B en cualquiera de las secuencias de la figura 7, es en realidad una ***transformación*** de A, que describe una trayectoria de situaciones intermedias – no representadas en el anexo 30– que termina en la situación B.

En lo que resta de este epígrafe, se analiza la derivación del objetivo general fundamental en objetivos parciales y los tipos de tareas a resolver para cumplirlos mediante la transformación de una situación en otra. También se analiza la actividad del docente en relación con la del alumno.

El estado del nivel de dominio de las técnicas por parte del alumno en una situación de las secuencias de la figura 7, es uno de los factores que influye en la determinación del objetivo parcial de la integración conceptual a alcanzar en la transformación de esta situación en la que le sigue. A la vez, es este objetivo parcial el que determina el tipo de tarea a asignar al alumno en cada situación (anexos 31 y 32).

Es así, por ejemplo, que en la secuencia 1, para la transformación de la situación 1 en la 2 se concibe la orientación de dos tareas con exigencia abierta; la primera del tipo I y la segunda del tipo II o III y en la transformación de la situación 3 en la 7; se sugieren dos tareas; la

[22] Se han utilizado los números de las situaciones que aparecen en el anexo 30.

primera del tipo I, II o III, con exigencia abierta, y la segunda del tipo II o III, con exigencia cerrada (anexo 31).

Como se observa, en las secuencias representadas en la figura 7 se alternan la elaboración y la ejercitación, las cuales poseen, tanto rasgos comunes como específicos, en cuanto a la actuación del docente y del alumno.

A pesar de que la actuación del docente a propósito de la resolución de una tarea de estudio –que además de la elaboración o ejercitación de una técnica, propicia la integración conceptual – tendrá particularidades que la hacen singular en el paso de una situación a otra, lo cual se manifestará en los métodos y medios que se utilicen, en la propia actuación del alumno, y por tanto en las formas de organización del grupo-clase; existirán acciones del docente que son comunes a todos los casos, entre ellas, la asignación de la tarea y la evaluación de los resultados obtenidos en el proceso.

Además de la asignación de la tarea y de la evaluación de los resultados, también el docente deberá favorecer la creación de un clima afectivo favorable para que los alumnos y alumnas resuelvan la tarea y sientan satisfacción por la ejecución de la actividad de estudio.

Después de resuelta la tarea, el docente debe realizar una evaluación del proceso y de los resultados obtenidos y en consecuencia emitirá juicios de valor al respecto.

En caso de que los alumnos dispongan de un ordenador, pueden utilizarlo en correspondencia con las condiciones y exigencias de la tarea para la ejecución de procedimientos, incluido el dibujo de los mapas de extensiones y el registro de la información, que se va generando durante el proceso de resolución de la tarea.

Seguidamente se analiza lo particular de la elaboración y ejercitación de cada grupo de técnicas, o sea, de la transformación de cada situación de una secuencia en la siguiente, comenzando por la secuencia 1 y teniendo en cuenta que las dos primeras transformaciones son comunes a ambas secuencias (Fig. 7).

1) Elaboración de las técnicas para la construcción de mapas del tipo I

Es aquí donde el alumno aprende a construir un mapa de extensiones de dos conceptos, sin tener en cuenta relaciones de cardinalidad, y a plantear las preguntas y proposiciones que le están asociadas, siguiendo alguna de las vías del diagrama de conversión (Fig. 6).

Se recomienda que el docente inicie con una tarea del tipo I (tabla 2), o sea, donde intervengan dos conceptos y el alumno conozca todas las proposiciones que representan la relación conceptual a determinar. Pueden aprovecharse los conocimientos que poseen los alumnos acerca de las relaciones entre los dominios numéricos estudiados, las cuales se representan en los textos y videos-clases, utilizando diagramas de Venn y expresiones de la teoría de conjuntos (Muñoz, Agüero, López, Guerra & Marrero, 1989: 8; MINED, 2004d, 2004e, 2004f).

Esta tarea inicial debe ser resuelta en trabajo independiente, donde el docente observará la actuación del alumno.

Después debe resolverse una tarea del tipo II o III para estimular la formulación de preguntas por parte del alumno. También se recomienda que la relación entre los conceptos corresponda a los casos representados por los mapas b, c o d (Fig. 2).

El docente puede iniciar la motivación del trabajo con ambas tareas y la orientación hacia el objetivo con un diálogo como el siguiente:

D: En varias ocasiones se ha representado la relación ***conocida*** entre dos conceptos, utilizando un diagrama de Venn. Por ejemplo, la relación entre los conceptos de número natural y de número fraccionario se ha representado en un diagrama de este tipo, considerando el conjunto de todos los números naturales (N) y el de todos los números fraccionarios (Q_+), ¿qué utilidad tiene realizar este tipo de representación?

A: Ayuda a comprender mejor estos conceptos, permite recuperar los conocimientos adquiridos acerca de ellos y contribuye a repasar lo aprendido sobre conjuntos[23].

D: Ahora voy a proponerles que resuelvan una tarea en la que deben representar la relación entre dos conceptos conocidos por ustedes.

El docente asigna una tarea del tipo I para que los alumnos la resuelvan en trabajo independiente. Después de resuelta la tarea, el docente asigna una segunda tarea del tipo II o III y procura que los alumnos actúen de forma independiente durante un tiempo. Transcurrido éste, iniciará un diálogo como el siguiente:

[23] Es importante que en momentos posteriores, el docente vuelva a realizar esta pregunta en cuya respuesta debe incluirse, además, que la construcción de un diagrama como éste, estimula la construcción de nuevos conocimientos acerca de la relación entre los conceptos, cuando estos conocimientos son necesarios para dibujarlo.

D: El dibujo del diagrama en el caso anterior no les trajo dificultades, ¿en qué se diferencia este caso del anterior?

A: Desconocemos la relación que hay entre los conceptos.

D: En el caso anterior pensaron en una sola forma del diagrama porque la conocían, pero en este que no la conocen, ¿qué deben hacer?

A: Considerar todas las formas posibles y a partir de ahí, determinar la que corresponde.

D: A continuación vamos a ***elaborar las técnicas*** que permiten hacerlo.

Acto seguido, el docente aprovecha la situación para orientar el primer objetivo parcial de la integración conceptual (anexo 31).

Aunque en la resolución de la segunda tarea se pueden utilizar varios métodos de enseñanza-aprendizaje, debe procurarse que predominen los que propician un papel activo del alumno, como es la ***conversación heurística*** (Klingberg, 1972: 314; Jungk, 1978: 127; Ballester y otros, 1992: 198), de modo que podría procederse de la forma siguiente:

1. El docente, después de llamar la atención sobre las notaciones de las extensiones de los conceptos a integrar (conjuntos) y con el objetivo de propiciar el aprendizaje de los conceptos y procedimientos que incluye el diagrama de conversión, puede dirigir un diálogo como el siguiente:

   D: ¿Cuáles son las posibles relaciones entre ambos conjuntos?

   A: Entre los conjuntos pueden existir cinco relaciones posibles: 1) no tienen elementos comunes, 2) tienen elementos comunes, pero existen elementos del primer conjunto que no pertenecen al segundo y elementos del segundo que no pertenecen al primero, 3) el primero es subconjunto del segundo, pero existen elementos del segundo que no pertenecen al primero, 4) el segundo es subconjunto del primero, pero existen elementos del primero que no pertenecen al segundo y 5) los dos conjuntos son iguales.

   D: ¿Qué diagrama se puede utilizar para representar cada una de estas relaciones?

   A: Uno o varios alumnos podrán dibujar los diagramas correspondientes en el pizarrón.

D: ¿Qué expresiones simbólicas de la teoría de conjuntos representan a cada diagrama?

A: Uno o varios alumnos podrán escribir en el pizarrón la expresión o expresiones simbólicas de la teoría de conjuntos que corresponden a cada diagrama.

D: ¿Qué proposiciones de la teoría de conjuntos caracterizan cada diagrama?

A: Uno o varios alumnos, con la ayuda de los demás y del docente, formulan las proposiciones de la teoría de conjuntos que caracterizan cada caso y éstas se escriben en el pizarrón.

D: A cada proposición de la teoría de conjuntos formulada corresponde una proposición conceptual ¿cuál?

A: Uno o varios alumnos, con la ayuda de los demás y del docente, formulan las proposiciones conceptuales que corresponden a cada colección de proposiciones sobre conjuntos.

D: Si se conocen las proposiciones de la teoría de conjuntos que caracterizan cada diagrama, es posible determinar la relación que existe entre los dos conjuntos. Obsérvese que hay proposiciones comunes a algunos de los diagramas y que se pueden seleccionar uno o varios de ellos a priori a manera de conjetura. El trabajo debe encaminarse, entonces, a determinar cuáles son las proposiciones que se cumplen, para lo cual se debe comenzar por una pregunta ¿Cuál debe ser la primera pregunta?

A: Varios alumnos pueden dar sus opiniones.

D: El docente podrá elegir una de las preguntas sugeridas y argumentará su selección. Acto seguido formulará la interrogación: ¿cuál es la respuesta de esta pregunta?

A: Algún alumno formulará la respuesta y se escribirá en el pizarrón.

B: ¿Por qué la proposición formulada es verdadera?

A: Algún alumno argumentará su respuesta y se escribirá en el pizarrón.

D: Ya disponemos de una proposición que sabemos es verdadera ¿Cuáles son los diagramas que la cumplen?

A: Algún alumno responde la pregunta.

En caso de que el mapa de extensiones no quede determinado con una primera proposición, el diálogo debe continuar hasta que se determine el que corresponde a la relación conceptual investigada.

2. Después de finalizado el diálogo, el docente podrá explicar que al diagrama construido se le llama ***mapa de extensiones***. También es factible introducir los conceptos de ***mapa de proposiciones, mapa simbólico y mapa de preguntas***. Si lo hace, es conveniente que solicite opiniones a los estudiantes acerca del sentido de la palabra “mapa” en estas denominaciones.
3. Después de la introducción de los cuatro mapas, el docente presentará un diagrama como el de la figura 6, pero ajustado a las condiciones de la tarea y a la conversación sostenida, y señalará el camino seguido durante el diálogo para la determinación del mapa de extensiones, correspondiente a la relación conceptual investigada.
4. Finalmente, el docente aprovechará el diagrama presentado para la elaboración de una base orientadora de la acción (BOA) dirigida a construir un mapa de extensiones del tipo I y describirá, utilizando el diagrama, distintas formas de proceder.

   Tanto el diagrama como la base orientadora elaborados, pueden ser entregados a los alumnos en un material impreso o estos pueden reproducirlos en sus libretas de notas con el objetivo de su utilización en la resolución de otras tareas.

   Es importante que el docente insista en que existen otras formas de proceder, las cuales dependerán de las características de la tarea y de quien la resuelve.

2) Ejercitación de las técnicas para la construcción de mapas del tipo I

Después de la transformación de la situación 1 en la 2, los alumnos y alumnas han de estar en condiciones de resolver tareas de los tipos I, II y III con el objetivo de la formación y desarrollo de habilidades en la aplicación de las técnicas, en tanto integran conceptos utilizando las relaciones conceptuales clásicas.

El docente puede partir del análisis de los resultados y del proceso de resolución de las tareas que orientó para el trabajo independiente fuera de la clase. De esa manera asegura algunas condiciones previas del nivel de partida.

Acto seguido, el docente hace referencia a que, si bien ya conocen las técnicas para construir mapas de extensiones como los construidos al resolver las tareas orientadas con anterioridad, todavía necesitan ejercitarlas para desarrollar habilidades en su uso. De esta manera orienta el objetivo de la actividad a realizar (anexo 31) y procede a asignar la primera tarea.

Durante la ejercitación debe predominar el ***método de la dirección del trabajo independiente*** de los alumnos (Jungk, 1978: 129; Ballester y otros, 1992: 178), de manera que estos puedan resolver la tarea de forma individual o en grupos y el docente observe su actuación y preste ayuda a quien la necesite, siguiendo el principio de las exigencias decrecientes.

En la ejercitación, se puede realizar una diferenciación de la enseñanza, asignando la tarea a los alumnos y alumnas en función de su nivel de desarrollo.

En esta fase no deben proponerse tareas cuya resolución sea muy compleja, en tanto el objetivo fundamental consiste en la formación y desarrollo de habilidades mediante la aplicación de las técnicas recién elaboradas.

3) Elaboración de las técnicas para la construcción de mapas del tipo II

La transformación de la situación 3 en la 7 tiene a su favor que ya los alumnos se han apropiado de las técnicas para la construcción de mapas del tipo I. Sobre esa base se deben elaborar las técnicas para la construcción de mapas del tipo II.

La elaboración de las técnicas se puede comenzar a partir de una tarea del tipo I, II o III, con exigencia abierta, que haya sido orientada con anterioridad para ser resuelta fuera de la clase y en la cual la relación conjuntista entre los conceptos, corresponda preferiblemente a uno de los casos b, c o d de la figura 2 y donde sea factible investigar, al menos, una relación de cardinalidad de las expuestas en el anexo 21 con los recursos de que disponen los alumnos y alumnas.

Después del análisis del mapa de extensiones del tipo I construido y del proceso seguido en la resolución de la tarea, el docente podrá intervenir para transformarla en una nueva, cerrando su exigencia a la determinación de relaciones conjuntistas y de cardinalidad; de manera que la nueva tarea contenga, como subtarea, a la ya resuelta y quede pendiente sólo la determinación de relaciones de cardinalidad. Para lograrlo el docente puede utilizar el método de ***conversación heurística*** y promover un diálogo como el siguiente:

D: Aunque el mapa construido representa la relación que existe entre los dos conceptos, todavía es bastante impreciso, ¿por qué?

A: En el mapa no se representa información sobre la relación entre el número de elementos de cada conjunto.

D: Para construir un mapa que tenga en cuenta esta relación, debemos resolver una nueva tarea, cuya exigencia consiste en construir un mapa de extensiones en que se tenga en cuenta, además de la relación conjuntista, la relación entre el número de elementos de cada conjunto. De esta manera el docente propone una nueva tarea a los alumnos y les indica que trabajen de forma ***independiente*** en su resolución.

Después de transcurrido un tiempo de orientada la tarea, la motivación de la vía de solución puede realizarse promoviendo una conversación como la siguiente:

D: ¿Cómo se procedió para la elaboración de las técnicas dirigidas a la construcción de un mapa de extensiones, que no tiene en cuenta el número de elementos de cada conjunto?

A: Se consideraron los casos posibles, se seleccionó uno o varios de estos a modo de conjetura y después siguiendo las ideas del diagrama que se dibujó en la clase, se determinaron proposiciones que permitieron obtener el mapa.

D: En este caso vamos a ***elaborar las técnicas de forma análoga***, sólo con la diferencia de que los casos posibles del mapa son otros y las proposiciones a determinar, tienen que establecer relaciones entre el número de elementos de los conjuntos.

Llegado este momento el docente aprovechará la situación para orientar el objetivo de la resolución de la tarea y transcurrido un tiempo podrá continuar con una conversación como la siguiente:

D: El mapa de que se dispone representa una posibilidad de varias, ¿cuáles son los posibles mapas?

A: Uno o varios alumnos, con la ayuda de los demás y del docente, dibujan en el pizarrón diagramas como los del anexo 21, según el caso.

D: ¿Qué proposiciones sobre los conceptos que intervienen caracterizan cada diagrama?

A: Uno o varios alumnos, con la ayuda de los demás y del docente, formularán las proposiciones, las cuales se escribirán en el pizarrón.

D: A estas proposiciones corresponden otras donde se compara el cardinal de las extensiones de los conceptos y de otros conjuntos, ¿cuáles son esas proposiciones?

A: Uno o varios alumnos, con la ayuda de los demás y del docente, formularán las proposiciones sobre cardinalidad, las cuales se escribirán en el pizarrón.

D: ¿Qué expresiones simbólicas representan a estas proposiciones?[24]

A: Uno o varios alumnos, con la ayuda de los demás y del docente, escribirán las expresiones simbólicas que correspondan en el pizarrón (como las del anexo 19).

D: Como cada diagrama queda caracterizado por una colección de proposiciones, para determinar cuál es el mapa que corresponde a los conceptos que se están analizando, basta con determinar tal colección. Debe observarse que en todos los casos se necesita de una proposición acerca de la relación entre el cardinal de las extensiones de ambos conceptos. Como no se pueden determinar todas las proposiciones necesarias en forma de lista, se debe partir de uno o varios mapas a modo de conjetura y mediante preguntas, de manera análoga a como se ha hecho con las relaciones conjuntistas[25], determinar el mapa que corresponde, o reducir la colección de los posibles ¿Cuál debe ser la primera pregunta?

De aquí en lo adelante el diálogo puede desarrollarse de la misma manera que en la elaboración de las técnicas para la construcción de mapas del tipo I.

En los casos en que no se disponga de los recursos para determinar todas las proposiciones necesarias, se aceptaría como respuesta a cualquiera de los diagramas que satisfaga las proposiciones encontradas.

[24] Esta pregunta es pertinente sólo cuando los alumnos conozcan el concepto de cardinal.

[25] El docente puede hacer referencia al diagrama de conversión construido en la elaboración de las técnicas relativas a la construcción de mapas del tipo I.

4) Ejercitación de las técnicas para la construcción de mapas del tipo II

En esta etapa se debe lograr la transformación que consiste pasar de la situación 7 a 9. La manera de proceder es análoga al caso ya analizado, de la ejercitación de las técnicas para la construcción de mapas del tipo I.

5) Elaboración de las técnicas para la construcción de mapas del tipo III

La transformación de la situación 9 en la 16 se realiza mediante la elaboración de las técnicas para la construcción de mapas del tipo III, la cual se basa en que los alumnos conocen y saben aplicar las relativas a los mapas del tipo I.

Un rasgo que diferencia esta transformación de las anteriores, es la cantidad de conceptos a relacionar, lo cual obliga a que la elaboración de las técnicas se realice a partir de la resolución de una tarea en la que intervengan tres conceptos, para aplicarlas posteriormente a otros casos en que el número de conceptos es igual o mayor que tres.

Debe observarse, teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado 3 del epígrafe 2.1.1, que cuando existen tres o más conceptos, se pueden presentar dos casos. En el primero, para dibujar el mapa de extensiones de todos los conceptos, es suficiente determinar la relación conceptual clásica entre los pares que se pueden formar; en el segundo, se determinarán, además, relaciones entre más de dos conceptos y eventualmente entre todos los involucrados.

Dado este hecho, la elaboración de las técnicas para la construcción de mapas de extensiones del tipo III, requiere que se traten los dos casos por separado, comenzando por el primero.

En el primer caso, después de una motivación basada en la necesidad de ejercitar las técnicas para la construcción de mapas del tipo I, el docente ha de orientar la resolución de una tarea en cuyas condiciones estén involucrados tres conceptos, pero que exija construir mapas de este tipo. La tarea puede ser asignada –para el trabajo independiente fuera de la clase– en días anteriores al de la elaboración de las técnicas relativas a los mapas del tipo III. Podrá utilizarse una tarea como las de los ejemplos 4 y 5 del anexo 27, pero sin incluir la exigencia en que se pide la construcción de un mapa de tres conceptos. También ha de tenerse en cuenta que la relación entre los tres conceptos no corresponda a uno de los casos 7, 8, 12, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 34, 41, 42, 43 y 44 del anexo 23, los cuales están relacionados con las formas 5-14 y 16-19 del anexo 24, que se obtienen por desdoblamiento. Deben evitarse, además, casos en que existan dos conceptos idénticos (correspondientes a las formas 4, 15, 21 y 22 del anexo 24).

Después del análisis de los mapas de extensiones del tipo I construidos y del proceso seguido resolviendo la tarea, el docente ha de actuar para transformarla en una nueva, que contenga como exigencia adicional, la construcción de un mapa de extensiones de los tres conceptos. Acto seguido, el docente orientará a sus alumnos la resolución, en ***trabajo independiente***, de la nueva tarea y transcurrido un tiempo, podrá promover una ***conversación*** con estos para analizar el proceso seguido y sus resultados.

La motivación del trabajo con esta segunda tarea y de su vía de solución se puede estimular mediante un diálogo como el siguiente:

D: Aunque la exigencia de la tarea resuelta se refiere a la construcción de mapas de extensiones de dos conceptos, en sus condiciones intervienen tres, vamos ahora a construir el mapa de extensiones de los tres conceptos, ¿qué debemos hacer?

A: Dibujar un solo mapa donde se muestren, a la vez, las relaciones que se determinaron para cada par de conceptos.

Después de esto el docente indica a los estudiantes que construyan el mapa de los tres conceptos en trabajo independiente y orienta el tercer objetivo parcial de la integración conceptual (anexo 31).

Concluido el análisis de la resolución de la segunda tarea, el docente se referirá a que para construir un mapa de extensiones de tres conceptos, se han dibujado primero mapas de extensiones de dos conceptos, considerando todos los pares posibles y finalmente el de tres, haciendo uso de la información obtenida. Destacará el haber utilizado sólo proposiciones representativas de relaciones entre dos conceptos y preguntará si sucederá lo mismo en otros casos. Aprovechará la ocasión para orientar la resolución de una tercera tarea del tipo IV o V, en ***trabajo independiente***, que permita la elaboración de las técnicas para el segundo caso.

La relación conceptual a determinar en esta tercera tarea debe corresponder a uno de los casos 7, 8, 12, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 34, 41, 42, 43 y 44 del anexo 23, los cuales requieren de una proposición que relacione los tres conceptos para construir el mapa de extensiones. No es necesaria la descomposición de la exigencia en exigencias parciales, al estilo de las tareas 4 y 5 del anexo 27, ésta puede ser única para que los alumnos y alumnas apliquen la BOA y las técnicas elaboradas en el primer ejemplo.

En el análisis de los resultados y el proceso seguido en la resolución de la tarea, el docente, debe interesarse primeramente por los mapas de extensiones del tipo I construidos, los cuales pueden dibujarse en el pizarrón con la participación de los alumnos y alumnas. Acto seguido, debe dirigir su atención al mapa del tipo III y promover una conversación como la siguiente:

D: ¿Qué mapa de tres conceptos construyeron?

A: Varios alumnos esbozarán en el pizarrón el mapa construido.

D: ¿Fueron suficientes las proposiciones sobre dos conceptos para construir este mapa?

Si los alumnos dan una respuesta afirmativa y todas las formas del mapa no coinciden, el docente aprovechará este hecho para continuar el diálogo:

D: ¿Qué proposición diferencia a un mapa del otro?

A: Uno o varios alumnos responderán con la ayuda del docente o de otros alumnos.

D: Observen que en este caso, además de las proposiciones que relacionan dos conceptos, se necesita de una proposición donde intervienen los tres, ¿cuál de los mapas cumple esta proposición?

De esa manera se llega al mapa de extensiones buscado.

Si los alumnos dan una respuesta afirmativa a la segunda pregunta y todos los mapas tienen la misma forma, el docente dibujará en el pizarrón la segunda variante del mapa y pedirá a los alumnos que analicen si ésta también es posible. A partir de ese momento procede como en el caso anterior.

Si los alumnos responden la segunda pregunta de forma negativa y todos los mapas no tienen la misma forma, el docente se interesará por la proposición adicional, dibujará la segunda variante del mapa y procederá como en los casos analizados.

Si los alumnos responden la segunda pregunta negativamente y todos los mapas tienen la misma forma, el docente se interesará por la proposición adicional y aprovechará la ocasión para comentar que en algunos casos no bastan las proposiciones sobre dos conceptos.

Después del análisis realizado, el docente aprovechará la ocasión para elaborar conjuntamente con los alumnos una BOA que permita la construcción de mapas de extensiones del tipo III de tres conceptos, la cual puede resumirse en las operaciones siguientes:

1. Denotar las extensiones de todos los conceptos.
2. Determinar todos los pares de conceptos.
3. Construir todos los mapas de extensiones de dos conceptos.
4. Construir los mapas de extensiones posibles de tres conceptos.
5. Si hay más de un mapa posible de tres conceptos, determinar proposiciones adicionales y utilizarlas para obtener el mapa buscado.

Esta BOA es completa y general sólo para construir mapas de tres conceptos. Si el número de conceptos es mayor, el alumno debe transferirla y ajustarla a las nuevas condiciones.

6) Ejercitación de las técnicas para la construcción de mapas del tipo III

La transformación de la situación 16 en la 18 se realiza mediante la ejercitación de las técnicas relativas a la construcción de mapas del tipo III por medio de la resolución de tareas de los tipos IV, V y VI (anexo 31).

La ejercitación debe iniciarse con tareas que exijan la construcción de mapas de tres conceptos, utilizando el método de ***trabajo independiente*** de la misma forma que en los demás casos. Deben incluirse tareas en que para la construcción de mapas del tipo III, no sean suficientes las proposiciones sobre las relaciones entre dos conceptos.

Después de desarrollada la habilidad para construir mapas de tres conceptos, deben proponerse tareas en las que estén implicados cuatro conceptos o más. En estos casos ha de procurarse el trabajo independiente de los alumnos y alumnas, observando el principio de las exigencias decrecientes. En el análisis colectivo del resultado y el proceso seguido en la resolución de la tarea, el docente debe aprovechar la oportunidad para elaborar, conjuntamente con los alumnos y alumnas, una BOA dirigida a resolver todas las tareas del mismo tipo que la resuelta.

Esta forma de proceder permitirá generalizar la BOA referida a la construcción de mapas de tres conceptos a la construcción de mapas de n conceptos (n>2).

Las transformaciones correspondientes a la segunda de las secuencias de la figura 7 se realizan de forma análoga a las de la secuencia 1, sólo hay una pequeña diferencia en cuanto a la exigencia de algunas tareas (anexo 32).

2.2. Determinación y representación de relaciones conceptuales

En esta sección se expone la segunda etapa de la integración conceptual en términos de su concepción, ejemplificación, resultado fundamental y otros procesos y resultados asociados.

2.2.1. **Concepción y ejemplificación**

La ***segunda etapa*** de la dinámica de la integración conceptual, dedicada a la aplicación de las técnicas a la determinación de relaciones conceptuales y a su representación utilizando distintos sistemas, puede comenzar a partir de la situación 2 de la primera etapa, además de que continúa después de finalizada ésta en los momentos pertinentes.

La construcción de mapas del tipo IV se inserta en la segunda etapa, pues para ello sólo basta aplicar las técnicas elaboradas para la construcción de mapas de los tipos I, II y III.

Las tareas docentes a utilizar en la segunda etapa de la integración conceptual, deben tener las mismas características que las usadas en la primera, con excepción de la descomposición de la exigencia, no necesaria cuando los alumnos y alumnas dominan las técnicas. También se podrán utilizar tareas en cuyas condiciones se incluya una representación de las relaciones conceptuales y se pida la determinación de conceptos que las satisfagan.

En la segunda etapa, además de los métodos de enseñanza-aprendizaje utilizados en la primera, puede emplearse el ***método de investigación*** (Ballester y otros, 1992: 193), preferiblemente en tareas que deben ser resueltas fuera de la clase. En esos casos, el docente debe ofrecerle una orientación al alumno que propicie la ejecución de la actividad de estudio y pueda tener éxito en su actuación. En este sentido, asignará tareas diferentes a determinados alumnos en dependencia de su nivel de desarrollo.

A continuación se expone un ejemplo sobre la determinación y representación de las relaciones conceptuales clásicas entre tres conceptos de la unidad “Funciones lineales y cuadráticas. Inecuaciones y sistemas de ecuaciones” del Programa de Décimo Grado.

El ejemplo es pertinente después de la elaboración de las técnicas para la construcción de mapas del tipo III y se refiere a la integración de los conceptos de “función lineal”, “función constante” y “función monótona creciente”, cuya formación está prevista en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en noveno grado. En el caso de los dos primeros, se concibe la apropiación de significados en los sistemas de representación analítico y gráfico, mientras que el concepto de “función monótona creciente” se forma y desarrolla en noveno grado sólo con el uso de representaciones gráficas.

El desarrollo que se concibe en el Programa de Matemática de Décimo Grado para el concepto de “función monótona creciente” incluye, como primera idea, la construcción de un nuevo significado con el uso de representaciones analíticas y su integración con otros conceptos matemáticos y de otras disciplinas.

Para la integración de estos tres conceptos mediante la determinación de las relaciones conceptuales clásicas y su representación, se puede utilizar la tarea de estudio siguiente:

> *En esta unidad has estudiado los conceptos de “función lineal”, “función constante” y “función monótona creciente”. Representa la relación entre estos conceptos mediante un mapa de extensiones único sin tener en cuenta relaciones de cardinalidad. Escribe las proposiciones que utilizaste y los razonamientos fundamentales en que te basaste.*

Después de la comprensión de esta tarea, se pasa a la fase de elaboración de un plan de resolución en términos de la BOA para la construcción de mapas de extensiones de tres conceptos, expuesta en el epígrafe 2.1.3.

La ejecución del plan comienza por denotar las extensiones de los tres conceptos:

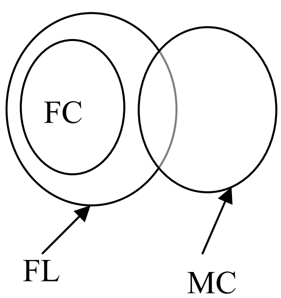
FL: conjunto de las funciones lineales,
FC: conjunto de las funciones constantes.
MC: conjunto de las funciones monótonas crecientes.

Después de denotadas las extensiones de los tres conceptos, se determinan todos los pares de ellos y se construyen los mapas de extensiones correspondientes a cada par, siguiendo el procedimiento general representado en el diagrama de conversión (anexo 33).

Al analizar los posibles mapas de extensiones de los tres conceptos, resultan dos posibilidades que se corresponden con las formas 7 y 8 del anexo 24. Dado este hecho, se debe determinar una proposición adicional a partir de la pregunta ¿Existen funciones lineales que no son funciones constantes ni monótonas crecientes?

Como las funciones lineales representables en la forma $y = mx + n$, con $m<0$, no son constantes ni monótonas crecientes, se obtiene una respuesta afirmativa para esta pregunta y un mapa de extensiones que satisface la exigencia de la tarea, se presenta en la tabla 3.

Tabla 3: Mapas correspondientes a los conceptos de función constante, función lineal y función monótona creciente

Mapa de extensiones	Mapa de proposiciones	Mapa simbólico
	1. Toda función constante es una función lineal. 2. Existen funciones lineales que no son funciones constantes. 3. Existen funciones lineales que no son monótonas crecientes. 4. Existen funciones lineales que son monótonas crecientes. 5. Existen funciones monótonas crecientes que no son funciones lineales. 6. Ninguna función constante es monótona creciente. **7.** Existen funciones lineales que no son constantes ni monótonas crecientes.	1. $FC \subset FL$ 2. $FL \not\subset FC$ 3. $FL \cap MC \neq FL$ 4. $FL \cap MC \neq \emptyset$ 5. $FL \cap MC \neq MC$ 6. $FC \cap MC = \emptyset$ 7. $(FL \setminus FC) \setminus (FL \cap MC) \neq \emptyset$

La resolución de la tarea también debe incluir el análisis de la solución y de la vía que estará dirigido a examinar el proceso seguido y los resultados obtenidos y podrá incluir el examen los razonamientos realizados, de las proposiciones planteadas con vista a perfeccionar su formulación y a determinar otros mapas simbólicos equivalentes al construido.

2.2.2. Resultado fundamental. Otros procesos y resultados

El resultado fundamental del proceso, es la apropiación por el alumno de ***nuevos conocimientos***, especialmente de distintas representaciones de sistemas de proposiciones referidas a las relaciones conceptuales clásicas entre los conceptos y, eventualmente, a relaciones de cardinalidad entre extensiones conceptuales.

El hecho de que el alumno determine nuevas relaciones conceptuales, contribuye al desarrollo de los conceptos que intervienen, pues favorece el enriquecimiento de sus significados conocidos, y en dependencia de la relación existente, propicia la ampliación de la clase de los elementos conocidos de sus extensiones, así como de la colección de propiedades y de los tipos de representaciones conocidas de sus elementos.

Aun en el caso donde el alumno conozca todas las proposiciones que representan las relaciones entre los conceptos analizados, la exigencia de su recuperación y representación en distintos sistemas, trae consigo un nuevo aprendizaje.

A la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, tal como se ha concebido en este trabajo, le son inherentes ***otros procesos y resultados***, entre los cuales pueden citarse los siguientes:

- Los alumnos y alumnas desarrollan la habilidad para preguntar, de gran importancia en una apropiación activa del conocimiento.
- Los alumnos y alumnas desarrollan otras habilidades de gran importancia para el aprendizaje activo de la Matemática, entre ellas, las destrezas para formular, demostrar y refutar una proposición, que tienen una relación muy estrecha con el modelo cuasi-empírico de la matemática, propuesto por Lakatos (1976, citado por Gascón, 2001: 113), según el cual esta ciencia se desarrolla siguiendo el patrón de conjeturas, pruebas y refutaciones.
- Cuando la relación entre dos conceptos sea de subordinación (casos c y d, Fig. 2), el mapa de extensiones constituye el punto de partida para que el alumno realice una clasificación dicotómica del concepto subordinante. Esto también es válido para el caso de tres conceptos o más, si existe uno que sea subordinante de todos los otros.
- El hecho de que el alumno utilice conjuntos, las relaciones de igualdad e inclusión y las operaciones internas con ellos, contribuye a la recuperación de los conocimientos y al desarrollo de habilidades sobre este tema.
- La construcción de mapas de más de dos conceptos contribuye al aprendizaje de contenidos correspondientes a la teoría combinatoria, los cuales están incluidos de forma explícita en el programa de duodécimo grado.

- La tarea que el alumno debe resolver para determinar las relaciones conceptuales clásicas entre dos o más conceptos, exige un esfuerzo personal continuado y en muchos casos la búsqueda de información que éste no posee, lo cual contribuye al desarrollo de la perseverancia, que es un indicador de los valores laboriosidad y responsabilidad (Sigarreta, 2001: 34). Por tal razón, dada la relación que existe entre un constructo[26] y sus indicadores (Campistrous & Rizo, 2000a), la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, contribuye a la formación de estos valores.

2.3. **Aplicación de conocimientos sobre relaciones conceptuales estudiadas**

En el propio proceso de elaboración de las técnicas, descrito en el epígrafe 2.1.3, se ha concebido su fijación mediante la ejercitación y aplicación. Esta sección trata sobre la aplicación de los conocimientos que se construyen mediante la aplicación de las técnicas y especialmente de las proposiciones que representan relaciones de subordinación o de incompatibilidad entre dos conceptos.

Los tipos de tareas, según la habilidad implicada, que se conciben para la aplicación son: 1) identificar un concepto y argumentar, 2) citar ejemplos de un concepto y argumentar y 3) citar no-ejemplos de un concepto y argumentar.

La identificación, como acción a ejecutar por el alumno en el proceso de apropiación de un concepto, consiste en determinar si un objeto (o relación) dado, pertenece o no a la extensión (Jungk, 1979: 67). Generalmente, las tareas utilizadas con este fin se orientan inmediatamente después de la formación del concepto y en su exigencia se pide, explícitamente, a los alumnos que argumenten su decisión. Cuando la argumentación no se exige de forma explícita, los alumnos la pudieran asumir como una obligación implícita del contrato didáctico.

Tareas de este mismo tipo se deben proponer después de la apropiación de proposiciones referidas a relaciones de subordinación entre dos conceptos por los alumnos y alumnas. En este caso, podrán argumentar la pertenencia del objeto (o relación) a la extensión del

[26] Se le llama así a un concepto que se utiliza para la representar una característica de un objeto de investigación. Cuando esta característica no es directamente observable, se descompone en otras que sí lo sean, llamadas indicadores. En ocasiones para la determinación de indicadores se buscan características del constructo que no son directamente observables, a las que se les llama dimensiones.

concepto subordinado, utilizando estas proposiciones, las cuales constituyen condiciones suficientes. Por ejemplo, si conocen que "todo rectángulo es un trapecio"[27], pueden argumentar que algunas figuras son trapecios utilizando esta proposición obtenida en la integración conceptual.

Es importante que en estas tareas también se incluyan casos en los cuales no puedan utilizarse condiciones suficientes, de modo que en la argumentación se deba utilizar necesariamente el contenido del concepto u otros sistemas de propiedades equivalentes.

La ejemplificación –como la determinación de elementos de la extensión– también es una de las acciones que el alumno debe ejecutar para apropiarse de un concepto (Jungk, 1979: 67). Las tareas concebidas para que los alumnos y alumnas ejecuten esta acción, usualmente se asignan inmediatamente después de la formación del concepto y en su exigencia se suele incluir la argumentación.

Tareas de este tipo también se deben orientar después de la determinación de proposiciones expresivas de una relación de subordinación entre dos conceptos. En este caso, al igual que en la identificación, el alumno puede valerse de estas proposiciones para la determinación de ejemplos y la argumentación de su pertenencia a la extensión del concepto. Es así que, después de conocida la proposición: "todo número fraccionario es un número racional", se pueden citar ejemplos de números racionales, utilizando números fraccionarios y argumentar mediante esta proposición.

La citación de no-ejemplos de un concepto –entendida como la determinación de elementos de la extensión de conceptos incompatibles con éste– también es una de las acciones del alumno que contribuyen a la apropiación de un concepto (González, 1993: 52). Aunque en la Educación Preuniversitaria es menos usual la asignación de tareas para la ejecución de esta acción que en los dos casos analizados, cuando ello se realiza, se hace inmediatamente después de la formación de un concepto. En la exigencia de estas tareas, además de la determinación de no-ejemplos, se pide la argumentación de la no pertenencia de estos objetos o relaciones a la extensión del concepto.

Al igual que en los casos anteriores, la tareas que exigen la búsqueda de no-ejemplos y la argumentación, deben proponerse también después de la determinación de una proposición

[27] Se asume que es un cuadrilátero convexo que tiene, al menos, dos lados opuestos paralelos.

que exprese una relación conceptual (aquí es la incompatibilidad, caso a, figura 2). En estos casos es posible utilizar estas proposiciones para la determinación de no-ejemplos y la argumentación de su no pertenencia a la extensión del concepto. Es así, que después de conocida la proposición "ninguna función constante es inyectiva", los alumnos pueden citar ejemplos de funciones no-inyectivas, utilizando funciones constantes.

Las tareas para la ejecución de cualquiera de las tres acciones citadas han de elaborarse utilizando alguna de las formas en que es habitual presentar los ítems para la evaluación del aprendizaje de la Matemática (Puig, 2003; Ruiz y otros, 2004: 35). Es así, que una tarea puede ser compuesta e incluir dos de las exigencias mencionadas (anexo 34).

2.4. Las funciones didácticas en la integración conceptual

Aunque el transcurso de las etapas de la dinámica de la integración conceptual se produce según las funciones didácticas referidas en el capítulo I y por tanto en las tres primeras secciones de este capítulo se ha expuesto cómo se concibe en el modelo el transcurso de algunas de ellas, la presente sección está dedicada al análisis de las funciones de aseguramiento del nivel de partida y evaluación.

2.4.1. El aseguramiento del nivel de partida

El aseguramiento del nivel de partida para la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, es un proceso que contempla las acciones del docente y del alumno, dirigidas a la determinación de las condiciones previas necesarias, a la evaluación diagnóstica de su existencia en cada alumno y alumna, y a la recuperación o creación de aquellas que no estén disponibles.

La ***primera etapa*** del aseguramiento del nivel de partida, consistente en la determinación de las condiciones previas que lo componen, debe ser ejecutada por el docente y para ello es útil dividirlas, atendiendo al nexo con los conceptos a relacionar, en las tres clases siguientes:

- Condiciones previas generales (no específicas de la Matemática).
- Condiciones previas particulares (específicas de la Matemática, pero no de los conceptos que se han de relacionar).
- Condiciones previas singulares (específicas de los conceptos que se han de relacionar).

Según las concepciones sobre el aprendizaje de la Matemática expuestas en el epígrafe 1.2.4, la primera etapa del aseguramiento del nivel de partida, en lo que concierne a la dimensión cognitivo-instrumental, se puede dividir en las dos fases siguientes:

1. Determinación de los tipos de tareas que los alumnos deberán resolver.
2. Determinación de los conocimientos y habilidades necesarios para resolverlas.

La concreción de estas fases, requiere analizarlas en relación con la secuencias de situaciones representadas en la figura 7; de manera que existen tanto condiciones previas comunes a todas las transformaciones, como específicas de cada una.

En todas las transformaciones, son condiciones previas generales del nivel de partida necesario, que los alumnos y alumnas sean capaces de interpretar una tarea por resolver y sepan formular una pregunta cuya respuesta sea una proposición a determinar, o su negación.

Son comunes a todas las transformaciones, como condiciones previas particulares del nivel de partida, que los alumnos y alumnas sepan argumentar, demostrar y refutar proposiciones matemáticas, lo cual incluye, como muy importante, que sean capaces de elegir el procedimiento a utilizar, según el tipo de proposición. También deben saber formular proposiciones matemáticas, representar relaciones entre conjuntos mediante diagramas de Venn y realizar conversiones entre proposiciones sobre relaciones conceptuales, proposiciones sobre conjuntos, expresiones simbólicas de la teoría de conjuntos y diagramas de Venn.

Son específicas de cada transformación, las condiciones previas singulares del nivel de partida, referidas a los conceptos que se deben relacionar. Están incluidas aquí, tipos de tareas tales como: citar ejemplos y no-ejemplos de cada concepto, crear y convertir representaciones de sus objetos, y argumentar la inclusión o no de un objeto en sus extensiones. Ello exige como requisito, conocer los contenidos y propiedades de los conceptos, sus significados y los tipos de representaciones de sus elementos.

También al nivel de partida relativo a cada transformación, le son específicas otras condiciones previas, algunas de las cuales se han esbozado en la tabla del anexo 35.

La ***segunda etapa*** del aseguramiento del nivel de partida consiste en la evaluación diagnóstica de la existencia de las condiciones previas en cada uno de los alumnos y alumnas, para lo cual, en lo que respecta a la dimensión cognitivo-instrumental, pueden utilizarse como indicadores, los comportamientos en la resolución de las tareas.

Esta evaluación, de ser posible, debe realizarse preferiblemente en momentos anteriores a las clases donde se ejecuta la integración conceptual, con el objetivo de poder garantizar los conocimientos y habilidades necesarios, máxime que algunos de ellos son ineludibles para el aprendizaje de muchos contenidos.

Además de los tipos de tareas descritos para la evaluación diagnóstica del nivel de partida, se pueden utilizar tareas de identificación que demanden un nivel intermedio de exigencia a la actuación del alumno. Es así, que dado un mapa de extensiones correspondiente a dos conceptos, en lugar de pedir la elaboración de un mapa de proposiciones, se pueden dar varias proposiciones cuyo valor de verdad (V o F) se exija determinar (anexo 36).

El contexto de algunas tareas para la evaluación diagnóstica de la existencia de condiciones del nivel de partida, no tiene que ser necesariamente matemático (anexo 36) y los conceptos involucrados pueden ser desconocidos por los alumnos. En algunas ocasiones, como señala Landman (2005: 534), es conveniente tal situación para que su actuación no esté influenciada por la familiaridad con los conceptos.

Después de la evaluación diagnóstica de una o varias condiciones del nivel de partida, se inicia la ***tercera etapa*** de su aseguramiento, en función de que cada alumno y alumna sepa resolver las tareas de los tipos necesarios, para lo cual tendrán que recuperar los conocimientos y habilidades adecuados o apropiárselos, si no disponen de ellos.

2.4.2. La evaluación de la integración conceptual

Este epígrafe está dirigido a contribuir a dar respuesta a las preguntas referidas al ¿qué?, ¿cuándo y ¿cómo evaluar?, la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

En cuanto al ¿qué evaluar?, se deben atender cuatro objetos interrelacionados:

1. Las condiciones previas necesarias en la transformación de las situaciones de aprendizaje (anexo 35).
2. El dominio de las técnicas para determinar relaciones conceptuales y representarlas de forma verbal, gráfica y simbólica.

3. El dominio de los conocimientos construidos por medio de estas técnicas.
4. Características de la esfera afectivo-motivacional de la personalidad del alumno y de la comunicación, imbricadas en los objetos anteriores.

La evaluación de las condiciones previas necesarias para la transformación de las situaciones de aprendizaje, forma parte de la función didáctica de aseguramiento del nivel de partida, que no se tratará aquí porque ya fue analizada en el epígrafe 2.4.1.

El dominio de las técnicas para determinar relaciones conceptuales y representarlas de distintas formas, puede someterse a evaluación en distintos momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje, incluidos los siguientes:

- Después de la ejercitación de una técnica, para determinar si es posible pasar a otra fase del proceso de integración; sea para la elaboración de otras técnicas o para aplicar las ya aprendidas a la construcción de nuevos conocimientos (evaluación formativa).
- Antes de iniciar al aprendizaje de una nueva técnica o de la construcción de nuevos conocimientos sobre relaciones conceptuales, como parte del aseguramiento del nivel de partida (evaluación diagnóstica).
- En momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje en que se necesitan juicios de valor para acreditar el desempeño del alumno (evaluación sumaria).

La evaluación del dominio de las técnicas en cualquiera de estos momentos debe basarse en la resolución de tareas de alguno de los tipos expuestos en la tabla 2, preferiblemente de los tipos II, III, V o VI, en correspondencia con la técnica o técnicas cuyo dominio se desee evaluar. También se pueden utilizar tareas que resulten de las descritas en la tabla 2 por descomposición en tareas parciales o mediante la disminución de la exigencia de acuerdo con las condiciones.

Para obtener datos que propicien hacer inferencias acerca del aprendizaje de los alumnos y alumnas, el docente debe observar su actuación mientras resuelven las tareas y de ser necesario ha de realizar un análisis de los productos de la actividad ejecutada, a partir de la recogida de la libreta de notas o de cualquier otro soporte, donde esté registrada la información generada durante la resolución de las tareas.

También el docente puede obtener información de la actuación de los alumnos y alumnas propiciando la autovaloración, coevaluación y heteroevaluación de su actuación en la resolución de las tareas asignadas.

El dominio de los conocimientos construidos mediante la aplicación de las técnicas, puede evaluarse desde el mismo momento en que se construyen; incluida la primera etapa del proceso de cumplimiento del objetivo de la integración.

La evaluación del dominio de los conocimientos debe ejecutarse de la misma manera que el dominio de las técnicas, pero utilizando tareas como las descritas en la sección 2.3.

En la esfera afectivo-motivacional debe valorarse el interés por resolver la tarea, la actitud frente a la necesidad de información, la actitud ante a los obstáculos, el estado de ánimo durante la resolución de la tarea, el interés por resolver otras tareas y la actitud ante la crítica y los elogios de los otros. Con relación a la comunicación, debe evaluarse la solicitud y prestación de ayuda, el intercambio de información con los compañeros sobre la resolución de la tarea, la descripción del proceso seguido, la atención al discurso de sus compañeros y del docente, la actuación ante las preguntas de sus compañeros y del docente y la valoración de la tarea. Todas estas características se han de evaluar mediante la observación.

2.5. Planificación de la integración conceptual

En este epígrafe se analizan los momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en que es factible la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, así como elementos importantes de su planificación a largo y corto plazos.

La planificación de la integración conceptual, es parte de la planificación de la enseñanza y el aprendizaje y por tanto está inmersa en el proceso de elaboración de los ***programas fundamental y regulador***, citados en el capítulo I, que requiere del análisis de la estructura del contenido y del análisis cognitivo (Gómez & Rico, 2002: 25).

Como el análisis cognitivo se ha realizado en los epígrafes anteriores mediante la determinación de los tipos de tareas que los alumnos y alumnas deben ser capaces de resolver, en éste sólo se prestará atención al análisis de la estructura del contenido en lo que respecta las relaciones conceptuales clásicas.

2.5.1. Momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje donde es pertinente la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas

Aunque la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas es necesaria y posible sistemáticamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, su presencia en la educación media es crucial después de la realización de las operaciones definición y clasificación de conceptos. Puede afirmarse, incluso, que este tipo de integración es necesario, después de la formación de un concepto, aún en el caso que éste no se defina.

Como fue descrito en el capítulo I, la formación de un concepto es un proceso que requiere de la apropiación, por parte del alumno, de un sistema esencial de características de una colección de objetos o de relaciones entre objetos, las cuales generalmente están contenidas en una definición o expresión sustituta que aparece en el libro de texto u otro material didáctico.

Después de definido un concepto (E_1, C_1) a partir de (E, C), se debe verificar si existen elementos de E que no están incluidos en E_1 y determinar, además, qué relación conceptual clásica existe entre (E_1, C_1) y otros conceptos comparables en el universo de los conceptos formados, especialmente los definidos a partir de (E, C). Además de las relaciones conceptuales clásicas, es importante investigar relaciones de cardinalidad entre las extensiones de estos conceptos y de otros que emergen en el proceso.

Esta forma de proceder conduce a que la determinación de muchas proposiciones, incluidos teoremas importantes, aparezca de "forma natural" como una necesidad, en los marcos de la resolución de una tarea, y constituye una manera de llevar a cabo el proceso parcial denominado "búsqueda del teorema", relativo a la situación típica "tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones" (Ballester y otros, 1992: 320).

Después de una clasificación de un concepto (E, C), surgen nuevos conceptos (E_i, C_i), ($i \in I$, I es un conjunto, card I>1) (Mederos & Ruiz, 2003), comparables respecto a (E, C). Son condiciones a verificar para que realmente se tenga una clasificación de (E, C), que entre dos conceptos cualesquiera (E_i, C_i) y (E_j, C_j) ($i \neq j$), exista la relación representada por el mapa de extensiones "a" de la figura 2 y entre (E, C) y cada concepto (E_i, C_i), exista la relación representada por el mapa c de esta figura.

También es importante, siempre que sea posible, incorporar al mapa de extensiones información acerca de la relación entre la cardinalidad de las extensiones de los conceptos (E_i, C_i) resultantes de la clasificación. Un caso donde esta forma de trabajar es muy necesaria, se presenta cuando se clasifica el concepto de número real, según el tipo de expresión decimal que representa los elementos de su extensión, obteniéndose los conceptos de número racional y de número irracional.

La integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas también es necesaria, después de la realización de varias clasificaciones de un mismo concepto. En tal caso, se debe proceder a la determinación de las relaciones conceptuales clásicas entre todos los conceptos obtenidos de ese modo. Es así, por ejemplo, que cobra interés determinar la relación entre los conceptos de triángulo escaleno, triángulo isósceles, triángulo equilátero, triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo, resultantes de la clasificación del concepto "triángulo", según dos criterios diferentes.

En este caso también es conveniente la determinación de relaciones de cardinalidad entre las extensiones de los conceptos que se obtienen de las distintas clasificaciones y entre la de otros conjuntos que resultan de éstas mediante operaciones como la diferencia, intersección y unión, aún cuando no sea posible realizar una demostración de las proposiciones correspondientes.

El currículo de Matemática de la educación general está diseñado en forma concéntrica o en espiral (Klingberg, 1972: 79), de modo que el estudio de un mismo concepto se reitera en varios grados y niveles. La integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, es un proceso muy útil para la recuperación de conocimientos previos al reiniciar el estudio de un concepto, formado en otro momento del curso o en grados anteriores.

2.5.2. Planificación a largo plazo

En la primera etapa de la elaboración del programa fundamental –planificación a largo plazo– el docente debe realizar un análisis del contenido que abarque la estructura conceptual y especialmente las relaciones conceptuales clásicas. Para ello ejecutará un procedimiento que aplicará a cada una de las unidades, el cual está compuesto por las operaciones siguientes:

LP1. Identificar los conceptos a estudiar.

LP2. Determinar para cada concepto, la colección de los conceptos comparables entre sí que se estudiarán en el grado o que se han formado en grados precedentes.

LP3. Determinar las colecciones de conceptos comparables cuya relación ha sido estudiada con anterioridad.

LP4. Identificar las colecciones de conceptos comparables para los cuales se prevé explícitamente en el programa de la asignatura el estudio de su relación.

LP5. Determinar colecciones de conceptos comparables, además de las previstas explícitamente en el Programa, cuya relación debe ser objeto de apropiación.

LP6. Establecer la clase en o desde la cual será estudiada cada una de las relaciones conceptuales encontradas en las operaciones LP4 y LP5.

Al ejecutar la operación LP1, el docente debe obtener una lista de todos los conceptos a estudiar en la asignatura, distribuidos por unidades temáticas. Para ello puede valerse del análisis documental del programa de la asignatura, las video-clases y el libro de texto.

Con la operación LP2, el docente debe obtener varias colecciones de conceptos a cada una de las cuales pertenecen todos los comparables entre sí, cuyo estudio está previsto en el grado o en grados precedentes.

Al ejecutar las operaciones LP3, LP4 y LP5 hay que determinar colecciones de conceptos comparables respecto a un concepto, entre los cuales se haya estudiado o se prevea el estudio de la relación conceptual clásica existente. Estas colecciones deben estar formadas por lo menos por dos conceptos, pero pueden involucrar a más de dos, como sucede con los distintos conceptos de número que se aprenden en la Secundaria Básica y en la Educación Preuniversitaria.

Las operaciones LP3 y LP4 están dirigidas a determinar, respectivamente, las colecciones de conceptos cuya relación ha sido estudiada con anterioridad o está prevista en el Programa. Para ello el docente, además del análisis documental, puede auxiliarse de la entrevista a alumnos, docentes de grados precedentes, metodólogos o responsables de aprendizaje.

Para la ejecución de estas operaciones se puede utilizar como medio, una matriz de relaciones para cada colección de conceptos comparables, que se confeccionará manualmente o utilizando algún software como el Excel para Windows, según los requerimientos siguientes:

- La matriz es cuadrada y simétrica. Cada fila y columna se corresponde con un concepto de la colección.
- Para colocar la etiqueta de cada concepto en la matriz, cuando las restricciones de espacio lo impongan, se puede utilizar un número. En ese caso hay que presentar adicionalmente un descriptor.
- Las casillas de la diagonal principal y las que están por debajo de ésta se dejan en blanco.
- En cada casilla, con excepción de las que quedan en blanco, se coloca un uno (1) o un cero (0), en dependencia de si la relación conceptual clásica entre los conceptos está presente o no.
- La matriz sólo representa relaciones entre cada par de conceptos. Si se quiere expresar que se han estudiado o se prevé el estudio de las relaciones entre más de dos conceptos, todas las casillas correspondientes se pueden destacar con el mismo color de fondo u otro rasgo que las identifique.

En el anexo 37 aparece la matriz de relaciones para una colección de conceptos comparables, con respecto al concepto de función, obtenida como resultado de la aplicación de la operación LP5 al contenido del Programa de Décimo Grado.

La operación LP5 está dirigida a que el docente, teniendo en cuenta los objetivos del programa de la asignatura y las características de sus alumnos, determine las relaciones conceptuales que deben ser objeto de construcción en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el transcurso de las clases o en el trabajo independiente que en ellas se oriente.

Aquí el docente tendrá que hacer una ***selección***, pues según los resultados del epígrafe 2.1.1, entre los n conceptos que componen una colección de conceptos comparables respecto a un mismo concepto, existen 2^n-n-1 combinaciones distintas.

Con la ejecución de la operación LP6, el docente determinará las clases donde se debe orientar o ejecutar la integración conceptual a partir de cada una de las relaciones conceptuales determinadas como resultados de la realización de la operación LP5.

En la planificación a largo plazo de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, también se tendrá en cuenta que los alumnos y alumnas deberán apropiarse de las técnicas necesarias expuestas en el epígrafe 2.1.1, lo cual requiere que su enseñanza y aprendizaje se prevea en la dosificación de la asignatura.

Aunque la enseñanza y el aprendizaje de las técnicas asociadas a los mapas de extensiones para la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, puede iniciarse en cualquier grado, es conveniente que ello se produzca desde la primera unidad de décimo, con el objetivo de que los alumnos y alumnas de cada cohorte, las puedan aplicar sistemáticamente durante los tres grados.

2.5.3. Planificación a mediano y corto plazos

Como la planificación de la clase de Matemática es un tema ampliamente tratado por especialistas en didáctica de la Matemática, citados en el capítulo I, aquí se centrará la atención sólo en algunos elementos que necesitan precisión.

Después de ejecutada la planificación a largo plazo de la enseñanza y el aprendizaje; que ha de incluir la planificación a largo plazo de la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, mediante la aplicación del procedimiento descrito en el epígrafe 2.5.2, el docente ha de estar en condiciones de elaborar una primera versión del programa fundamental, correspondiente a cada clase de las unidades temáticas –planificación a mediano y corto plazos– el cual debe incluir, la integración conceptual prevista en la planificación a largo plazo, teniendo en cuenta las dos etapas de cumplimiento del objetivo de este proceso, descritas en el epígrafe 2.1.3.

En este empeño el docente elegirá la secuencia de situaciones de las representadas en la figura 7, que va a seguir para la enseñanza y el aprendizaje de las técnicas.

Conclusiones del capítulo

En el capítulo se ha concebido un modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, en el cual la dinámica de este proceso se representa en tres etapas interrelacionadas, que requieren de una planificación a largo, mediano y corto plazos, y transcurren según las funciones didácticas establecidas en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

La esencia del modelo se puede sintetizar en la sigla PEDA, que significa **p**lanificación, **e**laboración, **d**eterminación y **a**plicación con la aclaración adicional de que estas etapas trascurren según las funciones didácticas referidas en el epígrafe 1.2.4.

En el modelo se incluyen técnicas que facilitan la integración conceptual ─ según el número de conceptos a relacionar y el conocimiento que los alumnos y alumnas tienen de las proposiciones necesarias ─ así como las tareas para la elaboración y aplicación de estas técnicas.

En la elaboración del modelo se utilizaron los fundamentos teóricos expuestos en el capítulo I y especialmente la caracterización didáctica de la integración conceptual que se exponen en la sección 1.3.

El modelo elaborado favorece el desarrollo de la metodología de la enseñanza de la matemática (MEM) al concebir una manera de planificar e implementar la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas. Además ofrece solución a una contradicción inmanente al "aprender a aprender", la cual se manifiesta entre la necesidad de construir mapas para obtener nuevos conocimientos –como técnica de aprendizaje– y la de conocerlos y poseer habilidades para aplicarlos, como requisito.

CAPÍTULO III. EVALUACIÓN Y EXPERIMENTACIÓN DEL MODELO

Este capítulo, compuesto por dos secciones, contiene una evaluación del modelo didáctico elaborado mediante el procedimiento de comparación por pares (Campistrous & Rizo, 2000b; Ramírez & Toledo, 2005) correspondiente al método de expertos, así como los resultados de una implementación del modelo en la práctica pedagógica por medio de un pre-experimento, con medida pre y post. Estas dos variantes: la valoración por expertos y la implementación en la práctica, son las formas concebidas para la evaluación del modelo con el objetivo de ajustarlo y derivar recomendaciones para su aplicación y la proyección de nuevas investigaciones.

3.1. **Evaluación por expertos del modelo**

El método de evaluación por expertos, según el procedimiento de comparación por pares, es un caso particular del procedimiento general para la evaluación de un objeto de investigación (Ruiz y otros, 2005: 2), con la especificidad de que la medición de cada indicador resulta de las opiniones de todos los expertos mediante la aplicación de un procedimiento estadístico singular, que incluye el uso de tablas de frecuencia, la distribución normal estándar y una prolongación de su inversa (Campistrous & Rizo, 2000b; Ramírez, 1999: 10; Ruiz, 2005).

La aplicación del procedimiento –que se describe en esta sección– requiere de la ejecución de las operaciones: selección de los expertos, definición y operacionalización del constructo objeto de evaluación; diseño de la medición de los indicadores, de las dimensiones y del constructo; elaboración de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y fiabilidad, recogida y procesamiento estadístico de los datos, y análisis de los resultados.

3.1.1. Selección de los expertos

Para seleccionar los expertos se tomó como población a un conjunto formado por docentes cubanos de Matemática con experiencia en la Educación Preuniversitaria, docentes de MEM de institutos superiores pedagógicos del país y docentes que desempeñan funciones relacionadas con la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria. Se conformó así, un conjunto de 30 educadores creativos, con buena capacidad de análisis, espíritu crítico y autocrítico, disposición real de colaborar en el trabajo y un desempeño profesional destacado.

Para seleccionar los miembros de la población que pudieran dar una mayor objetividad a la valoración del modelo (expertos), se utilizó un procedimiento basado en la autovaloración de estos (Campistrous y Rizo, 2000b: 19), cuyas operaciones son: determinación del coeficiente de conocimiento de cada sujeto (k_c), cálculo del coeficiente de argumentación (k_a), cálculo del coeficiente de competencia (k) y valoración de los resultados.

1) **Determinación del coeficiente de conocimiento**

El coeficiente de conocimiento de los posibles expertos se determinó por medio de su propia valoración. Para obtenerlo, se le pidió a cada uno que valorara su conocimiento sobre el tema en una escala de 0 a 10 en un cuestionario que se le aplicó (anexo 38).

2) Cálculo del coeficiente de argumentación (k_a)

Este coeficiente se calculó también a partir de la propia valoración de cada sujeto. Para su determinación se le pidió a cada uno que indicara el grado de influencia (alto, bajo, medio) que en sus criterios tienen los indicadores siguientes: 1) análisis teóricos realizados, 2) su experiencia, 3) los trabajos de autores nacionales, 4) los trabajos de autores extranjeros, 5) su conocimiento del estado del problema en el extranjero y 6) su intuición (anexo 38).

A las categorías alto, bajo y medio, dadas por cada sujeto a los indicadores anteriores, se les asignaron números según se especifica en el anexo 39, se sumaron estos números y se obtuvo como resultado el coeficiente de argumentación del sujeto.

3) Cálculo del coeficiente de competencia (k)

El coeficiente de competencia de cada sujeto se calculó como la media aritmética de los coeficientes de conocimiento y de argumentación (anexo 40).

4) Valoración de los resultados de la selección de los expertos

Como el menor valor obtenido del coeficiente k es 0,70 (anexo 40), se decidió utilizar como expertos a todos los miembros de la población, pues no existe ninguno con competencia baja ($k<0,5$). Entre ellos hay 15 (50 %) que desempeñan la función de profesor/a, dos (6,7 %) son metodólogos, ocho (26,7 %) son responsables de aprendizaje a nivel municipal o provincial, tres (10,0 %) son jefes de departamento y dos (6,7 %) ejercen otras funciones.

De estos docentes, 27 (90,0 %) han ejercido como profesores de Matemática en la Educación Preuniversitaria, 11 (36,7 %) han sido metodólogos, tres (10 %) han desempeñado la función de jefe de departamento y uno (3,3 %) fue responsable de aprendizaje.

Estos profesores y profesoras tienen una experiencia promedio de 28,5 años en la enseñanza de la Matemática con una desviación estándar de 6,2; el promedio de años en funciones relacionadas con la enseñanza de la Matemática en el preuniversitario es de 19,3, con una desviación típica de 7,2. El promedio de años de experiencia como profesores/as de Matemática en la Educación Preuniversitaria es de 12,9; con una desviación estándar de 9,1.

Entre los expertos existen siete doctores (23,3 %) y 15 master (50 %). Dos de los master cursan doctorado. Los ocho (26,7 %) que no poseen grado científico o título académico, poseen una vasta experiencia como profesores de preuniversitario y cursan maestría.

Todos estos docentes están vinculados a centros de la educación superior en contrato por tiempo indeterminado o a tiempo parcial. De ellos, dos (6,7 %) ostentan la categoría de profesores titulares, nueve (30 %) son profesores auxiliares y 19 (63,3 %) son asistentes.

3.1.2. Definición y operacionalización del constructo objeto de evaluación

El objeto de evaluación en este caso lo constituye la “calidad de un modelo didáctico”. Su operacionalización se realizó teniendo en cuenta las dimensiones determinadas por Schoenfeld (2000) para juzgar teorías, modelos y resultados de investigación en el área de la didáctica de la Matemática. Las dimensiones consideradas son: 1) poder descriptivo, 2) poder explicativo, 3) alcance, 4) poder predictivo, 5) rigor y especificidad, 6) posibilidad de refutación y 7) poder de replicación (Schoenfeld, 2000: 10; Meel, 2003: 44).

El ***poder descriptivo*** de un modelo didáctico está relacionado con su función interpretativa, es decir, con su capacidad para representar de forma simplificada lo esencial del proceso modelado en correspondencia con el objetivo del estudio. En consecuencia, los indicadores del poder descriptivo son: 1) la representación en el modelo de las características didácticas esenciales del proceso modelado, 2) la descripción de las etapas del proceso modelado y 3) la descripción de las relaciones esenciales entre estas etapas.

El ***poder explicativo*** de un modelo didáctico es su capacidad para revelar cómo y por qué el proceso modelado funciona de una forma determinada, lo cual exige que estén bien definidos los conceptos fundamentales del modelo, se expliquen sus componentes y las interrelaciones entre éstas, con énfasis en la actividad del docente y la actividad del alumno. Por ello los indicadores del poder explicativo son: 1) definición de los conceptos fundamentales[28], 2) explicación de la actividad del docente y 3) explicación de la actividad del alumno.

El ***alcance*** de un modelo didáctico se refiere a la amplitud del conjunto de situaciones en las que está presente el proceso modelado y a la distribución de estas situaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA). Por tal razón, los indicadores de esta dimensión son la frecuencia y la periodicidad con que tales situaciones se presentan.

El ***poder predictivo*** de un modelo didáctico es su capacidad para anticipar resultados en la actuación de los alumnos antes de su ocurrencia, gracias a la presencia de ciertas condiciones previas que proveen un contexto de actuación en una situación de aprendizaje. Por tal razón los indicadores del poder predictivo son la especificación, la concepción de la evaluación de la existencia y la recuperación o creación de estas condiciones previas en las distintas situaciones de aprendizaje, así como la descripción de la actuación del alumno cuando se dan las condiciones previas.

El poder descriptivo de un modelo didáctico expresa el grado en que el modelo representa el proceso. En la dimensión "***rigor y especificidad***" se analiza la misma relación, pero en el sentido inverso, de modo que con los conceptos fundamentales del modelo se puedan identificar y describir los estados del proceso modelado y sus relaciones en la actuación de los alumnos y alumnas, así como las acciones ejecutadas por el docente en su dirección. Los indicadores de esta dimensión son, pues, 1) claridad y precisión del lenguaje utilizado, 2) pertinencia de los conceptos fundamentales del modelo para identificar y describir los estados del proceso modelado y sus relaciones en la actuación de los alumnos y alumnas y 3) pertinencia de los conceptos fundamentales del modelo para identificar y describir la actuación del docente en la dirección del proceso modelado.

[28] Los requisitos de una definición son: 1) los conceptos que aparecen en el definiens (lo que define) deben estar definidos o ser conceptos básicos, 2) el sistema de características que componen el definiens debe permitir identificar el concepto y 3) este sistema no debe contener características que puedan deducirse de otras (redundantes). Los dos primeros requisitos son los básicos.

La ***posibilidad de refutar*** un modelo se refiere a su capacidad de contrastación en la práctica. Los indicadores de esta dimensión son: 1) descripción de las situaciones en que está presente el proceso modelado e 2) inclusión en el modelo de procedimientos para su implementación.

Aunque Brousseau (1986: 44) se ha referido al envejecimiento de las situaciones de enseñanza y aprendizaje, es justo considerar también su replicabilidad, así como el ***poder de replicación*** del modelo didáctico que las fundamenta, entendido este poder como la capacidad del modelo para su implementación en distintas circunstancias y con diferentes alumnos y docentes, bajo el criterio de que "[los] modelos no entran en crisis hasta que una parte apreciable de sus consecuencias [observables] lo hacen fracasar de forma clara y generalizada" (Ballester, 1999: tesis 4, párrafos 2 y 3). Los indicadores de esta dimensión son: 1) correspondencia del modelo con los programas de las asignaturas, 2) adaptación del modelo a las condiciones de enseñanza y aprendizaje, 3) correspondencia con la formación matemática básica[29] de los docentes y 4) correspondencia de la terminología utilizada con la formación básica[30] en MEM de estos.

3.1.3. Diseño de la medición de los indicadores, de las dimensiones y del constructo

La medición de los indicadores, de las dimensiones y del constructo se concibió según un modelo en que las variables estadísticas están distribuidas en tres niveles (anexo 41). En el primer nivel, sólo existen variables para indicadores y sus valores se obtienen mediante la asignación de cada experto, al responder los ítems de una encuesta. En el segundo nivel, existen variables para indicadores, dimensiones y constructo; los valores de las variables para indicadores no los asigna un experto específico, sino que son el resultado de la asignación de todos los expertos del grupo y se calculan mediante un procedimiento estadístico. En el tercer nivel se ubican las variables para índices, las cuales se han concebido para indicadores, dimensiones y constructo.

1) **Diseño de la medición de los indicadores. Variables del primer nivel**

A cada uno de los indicadores se le asoció una variable estadística, cuya escala de medición está compuesta por los números 1, 2, 3, 4 y 5, que representan, respectivamente, las categorías: inadecuado, poco adecuado, adecuado, bastante adecuado y muy adecuado.

[29] Formación matemática que reciben los docentes en el pregrado.

[30] Formación en didáctica de la Matemática que se ofrece en el pregrado.

Puesto que medir un indicador es asignar un valor de la escala a la variable estadística que lo representa, a partir de algún criterio (Ruiz, 2006); para la medición de los indicadores se utilizaron matrices de valoración (Acuña, 2002), que contienen los criterios utilizados (anexo 42).

2) **Diseño de la medición de los indicadores por el grupo de expertos. Medición de las dimensiones y el constructo. Variables de los niveles segundo y tercero**

La medición única de cada indicador a partir de las mediciones individuales ejecutadas por los expertos, se realizó por el procedimiento estadístico propio de la comparación por pares.

Para la medición de las dimensiones, a cada una de ellas se le asoció como variable estadística, el n-uplo formado por las variables de sus indicadores. De igual manera se procedió con el constructo, al cual se le asignó como variable, el 7-uplo compuesto por las variables relativas a sus dimensiones. De esta manera, la medición de las dimensiones y del constructo se realizó indirectamente.

Como cada variable de indicador se mide en una escala ordinal finita y el número de elementos de la escala de cada variable de dimensión, es el producto del número de elementos de las escalas de las variables de sus indicadores (anexo 41), se utilizó un índice (Zadu, 2004a; Campistrous, 2006; Ruiz, 2006) para introducir un orden en cada escala de variable de dimensión y facilitar la medición de las dimensiones y la interpretación de los resultados. Se procedió de forma análoga con la variable de constructo (anexo 43).

En el cálculo de los índices de dimensiones y de constructo, también se introdujeron índices para los indicadores, de manera que los valores 1, 2, 3, 4 y 5, que designan categorías, se convierten respectivamente, en los números 0, 25, 50, 75 y 100 (anexo 41).

Los índices correspondientes a los indicadores se denotaron con la letra I', seguida de un subíndice compuesto por dos dígitos; el primero de ellos denota el número de la dimensión y el segundo el del indicador. Los índices de las dimensiones se denotaron con la letra D' seguida de un subíndice, que designa el número de la dimensión. El índice del constructo se denotó con C'. El menor valor de estos índices es cero y el mayor es 100; el resto de los valores se encuentran distribuidos en intervalos de longitud 20 que forman una partición del intervalo [0, 100] (anexo 43).

Al utilizarse una escala tipo Likert (de cinco categorías) para los indicadores (Campistrous, 2006), todos ellos tienen igual peso en cada dimensión. Los coeficientes de ponderación de las variables de dimensiones en los índices, se determinaron utilizando la técnica de votación ponderada (Sociedad Latinoamericana para la Calidad, 2000), la cual se aplicó a los mismos expertos que evaluaron los indicadores (anexos 44).

Para una valoración de las dimensiones y del constructo; a las categorías inadecuado, poco adecuado, adecuado, bastante adecuado y muy adecuado, se les asociaron los intervalos de valores de índices [0, 20), [20, 40), [40, 60), [60, 80) y [80, 100], respectivamente; de manera que conociendo el valor del índice, se puede determinar la categoría de la dimensión o del constructo. También se calculó la probabilidad de que cada dimensión se sitúe en cada una de estas categorías (anexo 45).

3.1.4. Elaboración de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y fiabilidad. Recogida y procesamiento estadístico de los datos

Para la recogida de los datos se utilizó un cuestionario, diseñado según una escala tipo Likert, en el que cada ítem se corresponde con uno de los indicadores (anexo 46). La respuesta a cada ítem se corresponde con el valor de una variable de indicador del primer nivel y se asigna por el experto, siguiendo criterios de valoración preestablecidos.

Para la determinación de los valores de las variables de indicadores del segundo nivel se utilizó un sistema diseñado por el autor –en Excel para Windows– que los calcula automáticamente, mediante un procedimiento basado en el modelo de Torgerson (Campistrous y Rizo, 2000b). El sistema también calcula los valores de los índices para indicadores, dimensiones y constructo.

En el instrumento también se incluyó una pregunta abierta con el objetivo de acopiar otras opiniones de los expertos de forma cualitativa, así como sugerencias y cuestionamientos.

La fiabilidad y validez del tipo de cuestionario utilizado ha sido probado por otros investigadores en la elaboración y aplicación del procedimiento de comparación por pares. La validez de contenido se ha garantizado al emplear dimensiones validadas en la investigación antecedente, y tener en cuenta las opiniones de los expertos en la determinación de los indicadores y de los criterios para su medición.

3.1.5. Análisis de los resultados

El análisis de los resultados se realizó tanto a nivel de indicadores como a nivel de dimensiones y de constructo (anexos 48 y 49).

1) Análisis de los resultados a nivel de indicadores

Al analizar los resultados de la medición de los indicadores por el grupo de expertos (anexo 47), resultaron los juicios siguientes:

1. Los primeros 19 indicadores fueron evaluados de muy adecuados, lo que según los criterios de valoración (anexo 42) significa que:

    - Todas las características esenciales del proceso modelado se representan con profundidad en el modelo.
    - Todas las etapas del proceso modelado y sus relaciones esenciales se describen con la profundidad necesaria.
    - Todos los conceptos fundamentales se definen y las definiciones cumplen los requisitos que exige la ciencia.
    - Todas las acciones de la actividad del docente y de la actividad del alumno se explican con profundidad.
    - Las situaciones en que está presente el proceso modelado, aparecen en todos los temas de todas las asignaturas, de manera que emergen varias veces en cada tema y en los distintos momentos de su desarrollo.
    - En el modelo, para cada situación de aprendizaje, se especifican los tres tipos de condiciones previas (generales, particulares y singulares), se concibe su evaluación y su recuperación o creación. También se describe la actuación del alumno cuando se dan tales condiciones previas.
    - El lenguaje utilizado en el modelo siempre es claro y preciso, y todas las situaciones en que está presente el proceso modelado se describen con profundidad.
    - Los conceptos fundamentales del modelo son útiles y necesarios para identificar y describir los estados del proceso modelado y sus relaciones en la actuación de los

alumnos y alumnas, así como para identificar y describir la actuación del docente en la dirección de este proceso.

- En el modelo se incluyen los procedimientos necesarios para su implementación.
- La implementación del modelo sólo requiere, a lo sumo, de cambios metodológicos en los programas de las asignaturas de la disciplina Matemática y bastan las condiciones de enseñanza y aprendizaje existentes.

2. Los indicadores 20 y 21 fueron evaluados como bastante adecuados, lo cual significa:

- La implementación del modelo requiere de la formación matemática básica de los docentes, más algunos elementos que se pueden adquirir mediante autopreparación.
- La mayoría de los términos utilizados en el modelo se corresponden con la formación básica de los docentes en MEM y los términos nuevos son de fácil comprensión.

2) Análisis de los resultados a nivel de dimensiones y de constructo

En el cálculo de los índices para las dimensiones y el constructo objeto de evaluación resultó que a todas las dimensiones del modelo corresponde un índice ubicado en la categoría muy adecuado, aunque a la dimensión 7 corresponde el menor índice (87,5) y a la calidad del modelo corresponde un índice (97,6) situado en la categoría muy adecuado.

3) **Análisis de las respuestas a la pregunta abierta**

En las respuestas de los expertos a la pregunta abierta se ofrecen opiniones favorables al modelo. En relación con su poder de replicación estos expresaron preocupaciones relacionadas con: 1) el nivel de preparación de los profesores y profesoras que imparten la asignatura matemática en la actualidad en los preuniversitarios para aplicar el modelo, 2) la posibilidad de asegurar el nivel de partida necesario, teniendo en cuenta las características de los alumnos y alumnas que estudian actualmente en los preuniversitarios y 3) la compatibilidad de la aplicación del modelo con el uso de las video-clases y los software.

Sobre el nivel de preparación de los (las) docentes

Es cierto que actualmente el nivel de preparación de los profesores y profesoras que dirigen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los preuniversitarios es muy diverso, pues esta función la desempeñan tanto estudiantes en formación de la Carrera de Ciencias Exactas como otros docentes, incluidos los graduados de carreras donde la preparación matemática es limitada respecto a la necesaria.

También es innegable que esta limitación no sólo puede afectar la aplicación del modelo didáctico contenido en la tesis, sino también la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática al estilo más tradicional. La solución de la contradicción entre el nivel de preparación de los docentes y las exigencias de la aplicación del modelo, debe lograse mediante la ***preparación metodológica*** en y desde el departamento de ciencias exactas, apoyada en un material de estudio donde se exponga el contenido del modelo.

Además de la preparación metodológica desde el departamento, los docentes en formación de la Carrera de Ciencias Exactas deben ser preparados para aplicar el modelo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina “Matemática del Preuniversitario y su Metodología” que cursan desde el primer año.

Sobre la posibilidad del aseguramiento del nivel de partida

Debe tenerse en cuenta que las condiciones previas exigidas en el modelo −con excepción de las referidas en la elaboración de las técnicas facilitadoras de la integración conceptual− se deben asegurar también para y en el aprendizaje de distintos contenidos matemáticos y no constituyen un requisito exclusivo del modelo. Su aseguramiento debe garantizarse tanto en el preuniversitario como en los niveles educativos precedentes, incluida la Educación Primaria, pues de lo contrario el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria no cumpliría sus objetivos ni su encargo social.

Se sabe que la resolución y planteamiento de problemas son procesos a desarrollar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en todos los niveles de la educación general, en ellos están incluidas la comprensión de una tarea por resolver y la elaboración de preguntas, que son condiciones previas contenidas en el modelo.

Por otra parte, se conoce también que la formulación, argumentación y refutación de proposiciones −condiciones previas particulares contendidas en el modelo− son procesos cuyo desarrollo está previsto en los programas de Matemática de la educación general. En el sexto grado se introducen los conceptos de teorema y de demostración, y se demuestran algunos teoremas geométricos; en la Educación Secundaria Básica se desarrolla la habilidad para demostrar, fundamentalmente en contenidos relativos a las variables y a la geometría.

También en la Secundaria Básica se resuelven tareas en las que se debe determinar el valor de verdad de una proposición y argumentar la respuesta. Se desarrolla así la habilidad para argumentar. En algunos ítems de estas tareas se debe argumentar que una proposición es falsa, desarrollándose la habilidad para refutar proposiciones.

En vista de que las argumentaciones, demostraciones o refutaciones concebidas en el modelo, generalmente no requieren de una gran cadena de inferencias, las condiciones previas que se prevén no representan una ruptura con lo logrado en la Secundaria Básica.

También es cierto que la existencia de alumnos o alumnas con un bajo nivel de desarrollo de los conocimientos y habilidades exigidas en el modelo como condiciones previas, constituye un obstáculo de su aplicación. Por ejemplo, puede suceder que los diagramas de Venn los sepan construir sólo para dos conceptos. En ese caso debe ir aumentándose paulatinamente la exigencia de la tarea en correspondencia con el desarrollo de los alumnos y alumnas, siempre observando que esta exigencia no rebase los límites de su ZDP.

Sobre la compatibilidad del modelo con el uso de las video-clases y del software

En la tesis se considera que la categoría rectora del proceso de enseñanza-aprendizaje es el objetivo y que los métodos y medios se le subordinan. Desde esta perspectiva se conciben las video-clases como medios didácticos cuyo uso favorece el cumplimiento del objetivo del modelo y para lograrlo se recomienda:

- Incluir la aplicación del modelo en las nuevas video-clases que están en proceso de grabación, pues en las actuales la integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas es poco frecuente.
- Desarrollar las clases donde se utilicen las video-clases, de modo que se propicie la integración de conceptos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en las acciones anteriores y posteriores a la visualización del video.
- En las clases que el docente dirige sin el uso de video-clases, incluir tareas que conduzcan a la determinación y representación de relaciones conceptuales concebidas en el modelo o a la aplicación de las proposiciones que las representan.

Aunque los software disponibles en los preuniversitarios cubanos no contienen ningún módulo de uso específico, dirigido a la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, pueden utilizarse en este proceso, pues con ellos se pueden dibujar mapas de extensiones (Word, PowerPoint, Paint) y consultar definiciones y propiedades de los conceptos a integrar (Eureka/Temas).

3.2. **Experimentación del modelo en la práctica pedagógica**

En esta sección se exponen los resultados de la implementación del modelo en la práctica pedagógica mediante un pre-experimento.

3.2.1. Organización del pre-experimento

1) Diseño pre-experimental elegido

La implementación del modelo elaborado, concebida como la puesta en práctica de sus etapas, se realizó mediante un pre-experimento pedagógico en la modalidad de grupo único con medida pre y post (Borges, 2006: 174).

La elección de un diseño pre-experimental responde a que −debido a la variabilidad de las condiciones (Klingberg, 1972: 283; Torres, 2000: 59) del proceso de enseñaza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria de un centro a otro y de un grupo a otro en un mismo centro− resulta poco probable poder garantizar la premisa relativa a la igualación de grupos, propia de un diseño experimental, varias de cuyas modalidades se basan en la asignación aleatoria de sujetos a grupos de control y experimental.

2) Selección de la muestra y su justificación

Aunque el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier disciplina depende tanto de la actividad del docente como la del alumno, en esta investigación −teniendo en cuenta la hipótesis− se controló la primera para estudiar la segunda. Por ello se utiliza al alumno como unidad de análisis.

Para la realización del pre-experimento se seleccionó, intencionalmente, como muestra a un grupo-clase de décimo grado del preuniversitario “Eusebio Olivera” de Sancti Spíritus, al cual impartía la asignatura Matemática un docente que domina el contenido, tiene una formación básica en MEM y mostró disposición para participar en el estudio. Estos son los tres requisitos tenidos en cuenta para la selección de la muestra respecto al profesor.

Para tener control sobre la variable “preparación del profesor”, se realizaron varias sesiones dirigidas a su capacitación con el objetivo de que aplicara el modelo como está concebido, en correspondencia con las características del grupo.

3) **Operacionalización de la variable dependiente y de la hipótesis**

Al analizar la hipótesis de investigación se identifica como variable independiente la implementación del modelo didáctico y como variable dependiente, el nivel de integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

En el análisis de la caracterización del concepto de “integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas”, se identificaron tres dimensiones fundamentales de este concepto a tener en cuenta en su evaluación: 1) la dimensión afectivo-motivacional, 2) la dimensión comunicacional y 3) la dimensión cognitivo-instrumental.

La determinación de los indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional en el contexto de la investigación se realizó directamente (anexo 49), pero en la dimensión cognitivo-instrumental se ejecutó mediante el tránsito por varios niveles de concreción.

A partir de esta caracterización y del modelo didáctico expuesto en el capítulo II, la dimensión cognitivo-instrumental se descompuso en dos subdimensiones: 1) dominio de las técnicas dirigidas a la determinación y representación de relaciones conceptuales y 2) aplicación de proposiciones referidas a relaciones conceptuales estudiadas.

Para determinar los indicadores del “dominio de las técnicas”, se tuvieron en cuenta las operaciones a ejecutar por el alumno en la resolución de las tareas que exigen la determinación y representación de estas relaciones. Los indicadores considerados son: 1) denotar las extensiones de los conceptos, 2) considerar los posibles mapas de extensiones, 3) elegir a priori uno o varios mapas de extensiones como representaciones posibles de la relación conceptual, 4) construir un mapa simbólico, 5) determinar expresiones conjuntistas, 6) formular preguntas, 7) responder las preguntas formuladas, 8) construir un mapa de proposiciones conceptuales, 9) argumentar/demostrar las proposiciones conceptuales formuladas y 10) transferir información a un mapa de extensiones.

Aunque un alumno puede determinar y representar las relaciones conjuntistas o de cardinalidad entre las extensiones de dos conceptos sin utilizar expresiones simbólicas, se ha concebido un indicador donde estas intervienen, dada la importancia del uso de sistemas simbólicos de representación en Matemática.

Los indicadores de la aplicación de proposiciones son: 1) argumentar la veracidad de una proposición, 2) identificar un concepto y argumentar, 3) ejemplificar un concepto y argumentar y 4) citar no-ejemplos de un concepto y argumentar. En todos los casos se deben utilizar proposiciones que representan relaciones conceptuales estudiadas.

En la hipótesis se expresa la relación entre la variable dependiente y la independiente en términos de que la primera es una condición contribuyente de la segunda (Zadu, 2004c), lo cual significa que la aplicación del modelo didáctico debe producir cambios favorables en la integración conceptual al nivel de los indicadores. Desde esta perspectiva, la hipótesis de investigación se convierte en la hipótesis operativa siguiente:

La implementación del modelo didáctico elaborado, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática de la Educación Preuniversitaria, fomenta la actitud y la motivación, y mejora el desempeño cognitivo de los alumnos y alumnas en la resolución de tareas que exigen la determinación y representación de relaciones conceptuales clásicas y/o de cardinalidad y de tareas que demandan la aplicación de proposiciones sobre relaciones conceptuales clásicas estudiadas.

4) **El diseño de la medición. Las tareas evaluativas y el método de interpretación**

El triángulo de la evaluación está constituido por un modelo de cómo los alumnos y alumnas aprenden, tareas que estos deben resolver para demostrar su aprendizaje y un método de interpretación para hacer inferencias a partir de la evidencia.

En las dimensiones e indicadores de la "integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas", se sintetiza el modelo de cómo transcurre este proceso en los alumnos y alumnas. En el presente apartado se expone lo referido a las tareas y al método de interpretación.

Los tipos de tareas para la evaluación del proceso tienen su origen en los tipos de tareas para la elaboración y aplicación de las técnicas, analizados en los epígrafes 2.1.2 y 2.2.1 del capítulo II, y en los tipos de tareas para la aplicación de conocimientos sobre relaciones conceptuales estudiadas, presentados en la sección 2.3 del mismo capítulo.

Las tareas para la medición del dominio de las técnicas, cuya tipología se expone en la tabla 2 del capítulo II, se descomponen en tareas parciales que se corresponden con indicadores de la subdimensión 1.

La medición de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional se realizó en el propio proceso de integración conceptual mediante la observación del desempeño de los alumnos y alumnas en la actividad y la comunicación durante la resolución de las tareas dirigidas a ello (anexo 50).

El método de interpretación utilizado se basa en el uso de escalas ordinales y de procedimientos de medición mediante los cuales se asignan al constructo y a cada indicador y dimensión un valor de su escala. La escala de medición de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional y de sus indicadores, está compuesta por las categorías: bien, regular y mal, y la del constructo y la dimensión cognitivo-instrumental, está formada por los valores: muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto. Los indicadores de esta dimensión se midieron utilizando una escala ordinal que depende de los posibles estados de cada indicador.

La medición del constructo a partir de la medición de las dimensiones, así como la medición de las dimensiones a partir de sus indicadores se realizó utilizando índices. Los procedimientos de medición de la dimensión cognitivo-instrumental mediante pruebas, se basan en la aplicación de dos modelos estadísticos elaborados por el autor (anexo 51). El procesamiento de la información se realizó mediante la hoja de cálculo Excel.

En los modelos estadísticos se tiene en cuenta el nivel de desempeño cognitivo exigido por cada tarea, el cual depende del procedimiento general requerido para su resolución (identificar, determinar, argumentar, etc.). Por ejemplo, las tareas donde se da una colección de proposiciones y se pide ***identificar*** cuáles de ellas representan una relación conceptual dada, demandan un nivel más bajo que aquellas donde el alumno debe ***determinar*** las proposiciones.

El nivel de desempeño cognitivo exigido por las tareas dirigidas a la determinación y representación de relaciones conceptuales, depende además de otros factores, entre ellos: 1) el número de conceptos a relacionar, 2) el número de proposiciones conocidas por el alumno y 3) el tipo de relaciones a determinar.

En el primero de los modelos estadísticos se concibe el cálculo de índices individuales para representar el desempeño de los alumnos y alumnas por indicadores, subdimensiones y dimensión, teniendo en cuenta el peso relativo que tiene cada indicador en la subdimensión y cada subdimensión dentro de la dimensión cognitivo-instrumental.

Pero además, como las tareas dirigidas a la medición de la subdimensión "dominio de las técnicas" se descomponen en ***tareas parciales***, en el modelo se concibe el cálculo de un índice representativo del desempeño individual en cada una las tareas compuestas por estas tareas parciales, lo cual permite obtener un índice por tipo de tareas compuestas.

El segundo de los dos modelos está dirigido al cálculo de un índice individual relativo al desempeño de los alumnos y alumnas por directrices del contenido matemático.

Para el análisis de los datos a nivel de la muestra se utilizaron tablas de frecuencia y medidas de tendencia central.

5) La planificación del experimento y su relación con en el programa de la asignatura

Para representar simbólicamente el desarrollo del experimento, se denotó con X la implementación del modelo. La medición de la integración conceptual en los alumnos y alumnas, se realizó mediante cuatro pruebas (O_1, O_2, O_3 y O_4), complementadas con la observación de su desempeño durante la implementación del modelo (O_5) (anexo 50). Con estas pruebas, dirigidas a la dimensión cognitivo-instrumental, se midieron indicadores importantes de la subdimensión 1 y todos los indicadores de la subdimensión 2. Con la observación se midieron todos los indicadores de ambas subdimensiones. Las dos primeras pruebas (anexos 53 y 54) se administraron antes de implementar el modelo y las dos restantes (anexos 55 y 56) después de ello. El experimento se llevó a cabo según el esquema de la tabla 4.

Tabla 4: Representación del experimento		
Instrumentos	Estímulo/instrumento	Instrumentos
O_1 O_2	X	O_3O_4
	O_5	

En la primera prueba, algunos de los indicadores se midieron tanto a nivel de identificar como al nivel de construir y otros se evaluaron a nivel de construir. En la segunda prueba, las tareas del tipo "argumentar una proposición", se presentaron al nivel de identificar, aunque en las tareas del resto de los tipos se exigía elaborar argumentaciones.

El inicio del pre-experimento se concibió en el primer tema del programa para el décimo grado "Aritmética. Trabajo con variables. Ecuaciones", con cierre en el tema "Funciones lineales y cuadráticas. Inecuaciones y sistemas de ecuaciones" del mismo grado; de manera que durante el tiempo de su desarrollo fuera posible la aplicación del modelo y la realización de las mediciones previstas.

3.2.2. Desarrollo del pre-experimento

1) Evaluación de la integración conceptual antes de la implementación del modelo

Antes de la implementación del modelo se realizó una evaluación del estado de la integración conceptual en los alumnos y alumnas mediante dos pruebas. La primera dirigida a la medición del dominio de las técnicas y la segunda, a la aplicación de proposiciones relativas a relaciones entre conceptos estudiados.

La administración de las dos pruebas iniciales estuvo precedida de un aseguramiento del nivel de partida que propició la creación de condiciones favorables necesarias.

1a. Resultados obtenidos en el dominio de las técnicas

En el anexo 56 se muestra, para cada alumno, el índice relativo a indicadores de la subdimensión 1, obtenido a partir de la primera prueba, así como el índice promedio por indicador. En la figura 8, donde se representan los índices promedio, se observa que el menor (10,4) corresponde a las tareas parciales del tipo "argumentar/demostrar" y el más alto (54,8) a las pertenecientes al tipo "transferir información a un mapa de extensiones". Los dos índices promedio restantes, cuyos valores se ubican en la categoría "bajo" (28,5 y 36,5), corresponden respectivamente a las tareas parciales de los tipos "identificar/construir un mapa de proposiciones" y "construir un mapa simbólico".

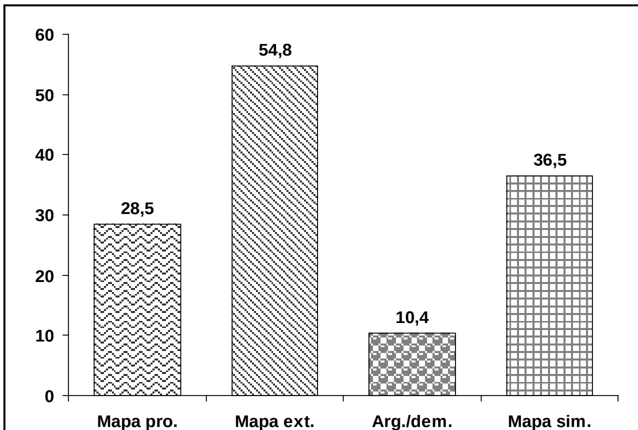


Fig. 8: Índices promedio relativos a indicadores de la subdimensión 1.

En cuanto a la distribución de los índices individuales por categoría del desempeño en la resolución de las tareas parciales relativas a los indicadores de la subdimensión 1 (anexo 57), se tiene que en “argumentar/demostrar”, existen 24 alumnos y alumnas (96,1 %) a los cuales corresponde un índice perteneciente a la categoría “bajo” o “muy bajo” y sólo uno alcanza un índice ubicado en una categoría superior a la media. En las tareas parciales del tipo “identificar/construir un mapa de proposiciones”, existen 19 alumnos y alumnas (73,1%) a los que corresponde un índice perteneciente a las categorías “bajo” o “muy bajo”, no situándose ninguno en la categoría “muy alto”. Un estado ligeramente más favorable, se presenta con las tareas parciales del tipo “construir un mapa simbólico”, pues a 14 estudiantes (61,9 %) corresponde un índice situado en las categorías “bajo”o “muy bajo”, aunque ningún caso se ubica en la categoría muy alto.

Al tipo de tarea “transferir información a un mapa de extensiones”, corresponde el estado más favorable, pues sólo a ocho alumnos y alumnas (20,7 %) se les asocia un índice perteneciente a las categorías “muy bajo” o “bajo” y a 12 casos (46,2 %) corresponden índices ubicados en las categorías “alto” o “muy alto”. Sin embargo, aunque en el modelo estadístico se pondera la resolución de las tareas según el nivel de desempeño cognitivo demandado por ellas, en las relativas a la transferencia de información a un mapa de extensiones, predominan las que exigen identificación con respecto a las que requieren de construcción.

En el anexo 58 se muestra, para cada alumno, el índice relativo a la subdimensión 1 y a sus tipos de tareas, obtenido a partir de la primera prueba mediante la aplicación del primer modelo estadístico. También se explicita el índice promedio por cada uno de los tipos de tareas, el cual se representa en la figura 9, utilizando una columna para cada uno de ellos y para la subdimensión.

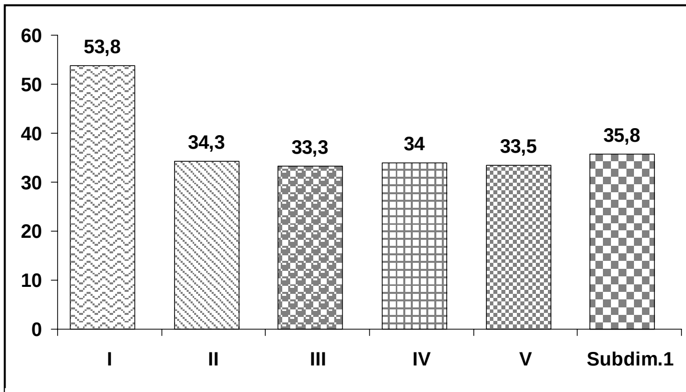


Fig. 9: Índices promedio relativos a la subdimensión 1 y a sus tipos de tareas.

Se observa en el gráfico, que a la subdimensión 1, es decir, al dominio de las técnicas, corresponde un índice promedio (35,8) ubicado en la categoría “bajo”. Aunque el tipo de tarea III es el que presenta el estado más desfavorable, también los tipos II, IV y V presentan un estado similar, pues a ellos corresponden índices promedio que se diferencian muy poco de éste y todos se ubican en la categoría “bajo”, lo cual demuestra que el número de conceptos involucrados no es el único factor influyente en el grado de dificultad de las tareas relacionadas con la integración conceptual. Al tipo de tarea I, corresponde el mayor índice promedio (53,8), el cual se ubica en la categoría “medio”.

En cuanto a la distribución de los índices individuales relativos a la subdimensión 1 por categorías del desempeño (anexo 59), se tiene que a 15 casos (57,7 %) corresponde un índice ubicado en las categorías “muy bajo” o “bajo”, no existiendo ningún alumno o alumna al que se le asocie un índice que pertenezca a la categoría “muy alto”; de manera que de los 26 integrantes del grupo-clase, existen 24 (92,3 %), cuyos índices están en la categoría “medio” o en una categoría inferior.

En el análisis de la relación de los resultados de la dimensión con las cuatro directrices del contenido matemático evaluadas (anexo 60), se observa que el índice promedio más bajo (33,5) corresponde a la directriz “geometría-trigonometría”, aunque en las directrices “la variable como número general” y “relaciones y funciones” existe un estado análogo. Si bien, la directriz “números y conjuntos numéricos” es la que presenta un estado más favorable, su índice promedio se ubica en la categoría “medio”.

1b. Resultados en la aplicación de proposiciones relativas a relaciones conceptuales estudiadas

En el anexo 61 se muestra, para cada estudiante, el índice relativo a la subdimensión 2 y a sus tipos de tareas, obtenido a partir de la segunda prueba. También aparece el índice promedio de cada tipo de tarea y de la subdimensión 2, los cuales se representan en la figura

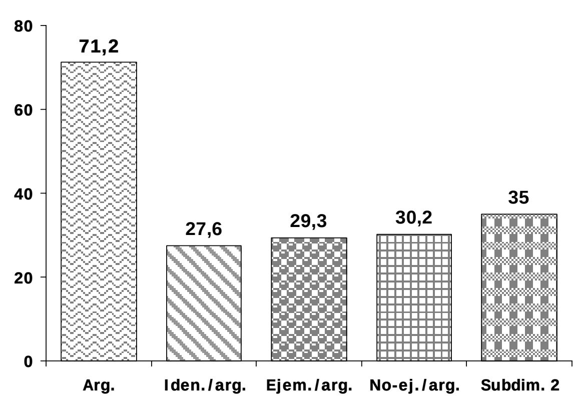


Fig.10: Índices promedio relativos a la subdim. 2 y a sus tipos de tareas.

10. En ésta se observa, que al tipo de tarea “argumentar una proposición”, corresponde un índice promedio de 71,2; al tipo de tarea “identificar un concepto y argumentar”, 27,6; al tipo de tarea “ejemplificar un concepto y argumentar”, 29,3 y al tipo de tarea “citar no-ejemplos de un concepto y argumentar”, corresponde un índice promedio de 30,2. El índice promedio de la dimensión es de 35,0; lo que refleja un nivel de desempeño bajo de los alumnos y alumnas del grupo en la aplicación de proposiciones expresivas de relaciones entre conceptos estudiados.

Aunque el mayor índice promedio corresponde al tipo de tarea “argumentar una proposición” (71,2), este hecho no significa que los alumnos del grupo hayan desarrollado la habilidad para argumentar en mayor grado que las habilidades necesarias para resolver las tareas del los otros tres tipos, pues las tareas propuestas exigían la identificación de una argumentación y no su elaboración. En efecto, el bajo índice promedio correspondiente a los tres tipos de tareas restantes se debe, en buena medida –como se observa en la matriz de valoración para la calificación de la prueba (anexo 53)– a las dificultades manifestadas por los alumnos y alumnas en la elaboración de una argumentación correcta.

Es significativo señalar, mediante el análisis de la tabla del anexo 62, que en el tipo de tarea “identificar un concepto y argumentar”, 22 alumnos y alumnas (84,6 %) alcanzan un índice correspondiente a las categorías “muy bajo” o “bajo” y ningún caso alcanza un índice perteneciente a una categoría superior a la “media”. Algo similar sucede con el resto de los tipos de tareas, pues en “ejemplificar un concepto y argumentar”, 21 alumnos y alumnas (80,8 %) alcanzan un índice perteneciente a categorías inferiores a la media, mientras que ello ocurre con 17 estudiantes (65,4 %) en el tipo de tarea “citar no-ejemplos de un concepto y argumentar”. De forma general, en la subdimensión ningún estudiante alcanza un índice correspondiente a una categoría superior a la media, existiendo 19 de ellos (73,1 %), cuyo índice se ubica como máximo en la categoría “bajo”.

Este bajo desempeño es un indicador de que los alumnos y alumnas del grupo tienen un conocimiento muy reducido de los significados de los conceptos incluidos en la prueba, pese a que estos aparecen frecuentemente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Secundaria Básica y en la Educación Preuniversitaria.

En cuanto a la relación de los resultados de la subdimensión con las cinco directrices del contenido matemático evaluadas (anexo 63), se observa que el índice promedio más bajo (26,5) corresponde a la directriz “relaciones y funciones”, lo cual debe ser objeto de atención debido a la importancia que ésta tiene en el aseguramiento del nivel de partida necesario para cursar muchas carreras universitarias.

Los resultados obtenidos en la prueba corroboran, en los marcos del grupo investigado, una de las dificultades señaladas por la Comisión Nacional de Matemática –citada en la introducción de esta tesis– acerca de que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática no se logra la comprensión conceptual del contenido matemático.

1c. Desempeño general en la dimensión cognitivo-instrumental

Los modelos estadísticos de medición aplicados (anexo 51), permitieron también realizar un análisis de la integración conceptual a nivel de la dimensión cognitivo-instrumental, utilizando un índice calculado para cada uno de los alumnos y alumnas sometidos al estudio, así como el índice promedio correspondiente. También se calculó un índice que caracteriza a la dimensión cognitivo-instrumental por directrices del contenido matemático (anexo 64).

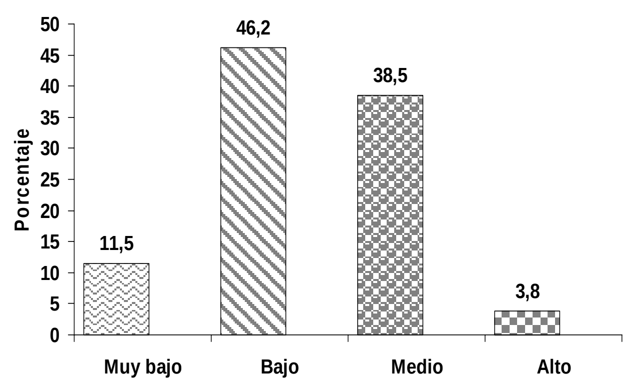


Fig. 11: Distribución del índice general por categoría.

El valor del índice promedio (35,6) indica que en el grupo investigado, la dimensión cognitivo-instrumental de la integración conceptual analizada se encuentra en la categoría “bajo”; de manera que como se infiere de la figura 11, donde se muestra el porcentaje de alumnos por categoría, a 12 de ellos (46,2 %) corresponde un índice perteneciente a la categoría “bajo”, y a 15 casos de los 26 investigados (69,2 %), se les asocia un índice ubicado en las categorías “muy bajo” o “bajo”. Es significativo observar, que a ningún alumno o alumna corresponde un índice situado en la categoría “muy alto” y a la categoría “alto” pertenece un solo caso (3,8 %).

El comportamiento de la dimensión cognitivo-instrumental por directrices del contenido matemático (anexo 64), es tal que el menor índice promedio (31,7) corresponde a "relaciones y funciones" y el más alto (39,6) a "números y conjuntos numéricos", aunque al resto de las directrices evaluadas corresponde un índice muy próximo al de "relaciones y funciones". En todos los casos el índice promedio se ubica en la categoría "bajo".

2) Descripción de la implementación del modelo didáctico

En este apartado se describe sintéticamente la implementación del modelo didáctico en correspondencia con lo declarado en el epígrafe 3.2.1, de manera que se incluye tanto lo relativo a la planificación como lo concerniente a la dinámica de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

2a. **Etapa de planificación**

Para la planificación a largo plazo se aplicó el procedimiento expuesto en el epígrafe 2.5.2 del capítulo II, de manera que se determinaron las distintas colecciones de conceptos que resultan de su implementación (anexo 65) y las clases donde se deben estudiar relaciones entre estos (anexo 66).

2b. **Descripción de la dinámica de la integración**

La administración de las dos pruebas iniciales facilitó la aplicación del modelo, pues algunas de las tareas incluidas en ellas se pudieron utilizar en la elaboración o ejercitación de las técnicas dirigidas a la integración conceptual o en la aplicación de proposiciones sobre relaciones conceptuales estudiadas.

Las técnicas facilitadoras de la integración conceptual se elaboraron siguiendo la secuencia 2 de la figura 7. La elaboración de las relativas a los mapas del tipo I se realizó según el modelo, utilizando dos tareas de estudio. En la primera de ellas se pedía determinar la relación entre los conceptos de "número natural" y "número entero", mientras que en la segunda, había que hacerlo con los conceptos de "número primo" y "número rectangular".

Después de elaboradas las técnicas relativas a los mapas del tipo I, se procedió a su ejercitación, utilizando tareas que exigían determinar la relación entre pares de conceptos correspondientes a las colecciones del anexo 65.

Aunque se observó el desempeño de cada alumno y alumna del grupo-clase en la resolución de estas tareas, para realizar una observación sistemática y continuada, se seleccionó de forma intencional una muestra compuesta por siete estudiantes, atendiendo a su rendimiento en las dos pruebas iniciales, La muestra quedó integrada por dos estudiantes de cada una de las categorías “muy bajo”, “bajo” y “medio” y por el único alumno cuyo índice corresponde a la categoría “alto”.

Los alumnos y alumnas de las categorías medio y alto comenzaban a actuar después de orientada la tarea desde principios, intentaban superar los obstáculos, mostraban alegría en su actuación, se estimulaban por los elogios y críticas de los otros y después de varias sesiones solicitaban otras tareas al término de la resolución de la orientada. El resto de los observados necesitaron de mucha ayuda en las primeras tareas e interrumpían su trabajo ante los obstáculos con mucha frecuencia. Sin embargo, después de resueltas varias tareas necesitaron de menos ayuda y les estimulaba la crítica y los elogios de los demás. En estos alumnos y alumnas se observó, con más frecuencia el intento de recordar las definiciones y propiedades de los conceptos, que su búsqueda en el libro de texto o libreta de notas.

En todos los casos se observó que los estudiantes denotaban las extensiones de los conceptos a integrar, consideraban los posibles mapas de extensiones y elegían, a priori, algunos de ellos como posibles representaciones de la relación conceptual a determinar. En las primeras tareas, y más marcado en los alumnos y alumnas de bajo o muy bajo desarrollo, se consideraban las notaciones de las extensiones como abreviaturas del nombre de los conceptos.

La determinación de proposiciones representativas de la relación conceptual, varió de un alumno a otro y en un mismo alumno se manifestó de formas distintas en diferentes momentos, pues se incorporaba a la resolución de las nuevas tareas lo aprendido en las precedentes. No se observó la utilización explícita de proposiciones conjuntistas y se mezcló el uso del lenguaje verbal con el de expresiones simbólicas de la teoría de conjuntos, aunque este último fue limitado en las primeras tareas.

Durante la observación se evidenciaron dificultades en la argumentación de las proposiciones en las primeras tareas, sobre todo en los alumnos y alumnas que mostraron desempeños muy bajos o bajos en las pruebas iniciales.

En todos los alumnos y alumnas se observaron los indicadores relativos a la dimensión comunicacional, durante la resolución de las tareas propuestas. Como más afectado se identificó el concerniente a la “descripción del proceso seguido”, pues presentaban dificultades en comunicarse utilizando la terminología y simbología matemática.

Después de que los alumnos y alumnas determinaron relaciones entre algunos pares de conceptos, se les propusieron tareas para la aplicación de estas relaciones, siguiendo las ideas desarrolladas en la sección 2.3 del capítulo II y se observó su desempeño utilizando la guía elaborada (anexo 50).

Los indicadores de la dimensión afectivo-motivacional experimentaron un mejoramiento con respecto a lo ocurrido en la ejercitación de las técnicas. En cuanto a la argumentación, en las primeras tareas los alumnos y alumnas de desarrollo “muy bajo” y “bajo”, no tuvieron en cuenta la exigencia y apelaban a la definición de los conceptos, en lugar de utilizar las proposiciones representativas de la relación clásica entre ellos. También se apreció en todos los estudiantes, con mucha frecuencia, el uso de argumentaciones incompletas mediante entimema. La comunicación se comportó muy similar a la observada en la resolución de las tareas relativas a la ejercitación de las técnicas.

La elaboración de las técnicas relativas a los mapas del tipo III se realizó del modo concebido en el modelo, mediante tres tareas de estudio. En la primera, se exigía determinar la relación conceptual clásica entre los pares que se pueden formar con los conceptos de número natural, número fraccionario y número racional; en la segunda se pedía determinar tal relación entre estos tres conceptos; mientras que en la tercera tarea se exigía determinar la relación entre los conceptos de número natural, número entero y número fraccionario.

Después de elaboradas las técnicas se procedió a su ejercitación utilizando tareas que involucraban conceptos subordinados al concepto de número real (anexo 65). Aquí también se observó el desempeño de los alumnos y alumnas (anexo 50), prestando atención a su motivación por resolver las tareas. Las dificultades en la comunicación se centraron fundamentalmente en el indicador relativo a la “descripción del proceso seguido”.

Las dificultades más significativas en la resolución de las tareas se presentaron cuando no bastaban las relaciones entre los pares de conceptos y se debían determinar proposiciones adicionales.

La elaboración de las técnicas relativas a los mapas del tipo II, se realizó de la manera concebida en el modelo, utilizando una tarea de estudio referida a los conceptos “número racional” y “número real”.

La ejercitación de estas técnicas se ejecutó con pares de conceptos subordinados al concepto de número real. Los indicadores relativos a las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional se comportaron como en las tareas relativas a los mapas del tipo I, las dificultades más significativas se presentaron en la determinación de las proposiciones relativas a la cardinalidad, al considerar suficiente un número muy limitado de ellas.

A los alumnos y alumnas les resultó interesante y contradictorio que el conjunto de los números pares tenga el mismo cardinal que el de los números naturales, a pesar de ser un subconjunto propio de éste.

La aplicación de las técnicas elaboradas a la determinación de relaciones conceptuales y su representación, se realizó con varias colecciones de conceptos (anexo 65), exigiéndose la determinación de relaciones de cardinalidad fundamentalmente en conceptos subordinados al concepto de número real. En la resolución de estas tareas mejoraron los indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional, aunque todavía los alumnos y alumnas de más bajo nivel de desarrollo, presentaron dificultades en describir el proceso seguido, así como al resolver tareas sobre la determinación de relaciones de cardinalidad.

3) Evaluación de la integración conceptual después de una implementación del modelo. Comparación con el estado inicial

En el presente apartado se realiza un análisis de los resultados de las dos pruebas que se administraron después de una implementación del modelo. También se realiza una comparación de estos con los obtenidos en las pruebas iniciales.

4a. Resultados en el dominio de las técnicas. Comparación con el estado inicial

En el anexo 67 se muestra, para cada estudiante, el índice relativo a tipos de tareas parciales de la subdimensión 1, obtenido a partir de la primera prueba que se administró después de aplicado el modelo, así como el índice promedio por tipo de tarea.

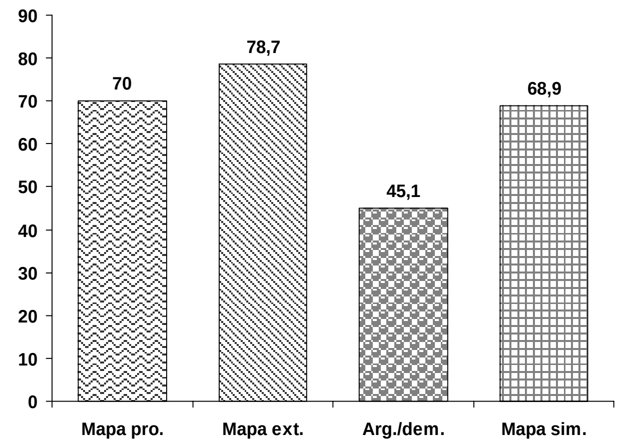


Fig. 12: Índices promedio relativos a indicadores de la subdimensión 1.

En la figura 12, donde se representan los índices promedio, se observa que el menor (45,1) corresponde a las tareas parciales del tipo "argumentar/demostrar" y el más alto (78,7) a las del tipo "identificar/construir un mapa de extensiones". Los dos índices promedio restantes, cuyos valores pertenecen a la categoría "alto" (70 y 68,9), conciernen respectivamente a las tareas parciales de los tipos "identificar/construir un mapa de proposiciones" y "construir un mapa simbólico".

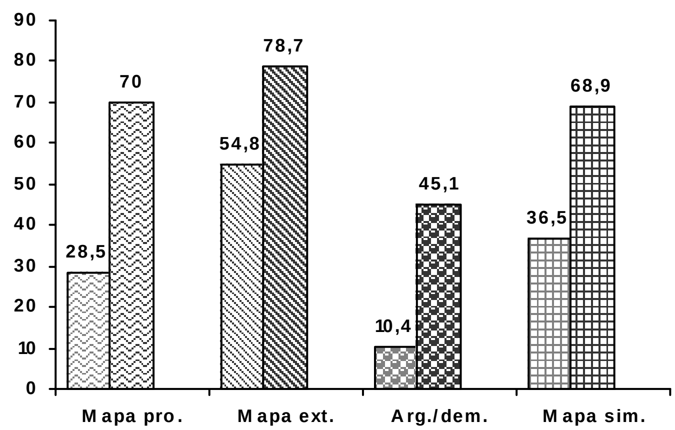


Fig. 13: Comparación de los índices promedio relativos a indicadores de la subdimensión 1.

Al comparar los resultados anteriores con los de la prueba inicial (Fig. 13), se observa, que en todos los tipos de tareas, existe un aumento significativo del índice promedio, siendo el tipo "identificar/construir un mapa de proposiciones", el de mayor incremento (41,5).

En cuanto a la distribución de los índices individuales por categoría del desempeño en la resolución de las tareas parciales de cada uno de los tipos de la subdimensión 1 (anexo 68), se tiene que en "argumentar/demostrar", existen 13 alumnos y alumnas (50 %) a los que corresponde un índice situado en la categoría "bajo" o "muy bajo" y sólo cuatro (15,3 %) alcanzan un índice ubicado en una categoría superior a la media. En las tareas parciales del subtipo "identificar/construir un mapa de proposiciones", existen 22 alumnos y alumnas (84,6 %) a los cuales concierne un índice colocado en las categorías "alto" o "muy alto", no situándose ninguno en la categoría "muy bajo". Un estado menos favorable, se presenta con las tareas parciales del tipo “construir un mapa simbólicos”, pues existen 19 estudiantes (73,1 %) a quienes corresponde un índice dispuesto en las categorías “alto”o “muy alto”, aunque ningún caso queda en la categoría “muy bajo”.

Esta distribución de los índices por categoría, supera los resultados obtenidos en la prueba inicial (anexo 57), pues disminuyó significativamente el número de alumnos y alumnas cuyos índices se ubican en las categorías “bajo” y “muy bajo”, aumentando el situado en las categorías “alto” y “muy alto”, a pesar de que el estado más desfavorable se presenta con las tareas parciales del tipo “argumentar/demostrar”.

En el anexo 69 se muestra, para cada estudiante, el índice relativo a la subdimensión 1 y a sus tipos de tareas, obtenido a partir de la prueba que se administró después de la implementación del modelo didáctico. Además en el anexo se expone el índice promedio por cada uno de los tipos de tareas, el cual se representa en la figura 14, utilizando una columna para cada uno de ellos y para la subdimensión.

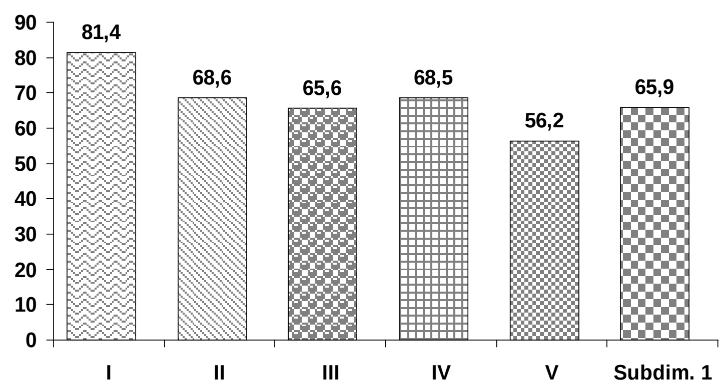


Fig.14: Índices promedio relativos a la subdimensión 1 y a sus tipos de tareas.

Al comparar los resultados anteriores con los de la prueba inicial (Fig. 15), se aprecia, que en todos los tipos de tareas existe un aumento del índice promedio, siendo el IV y II los de mayor incremento (34,5 y 34,3, respectivamente). En el índice promedio relativo a la subdimensión 1 se operó un incremento significativo (30).

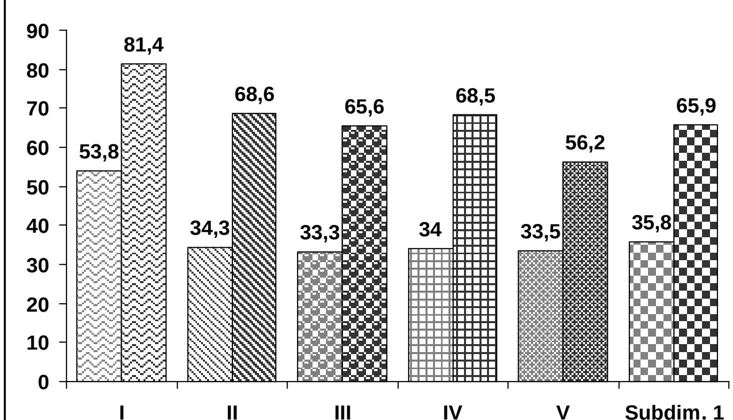


Fig. 15: Comparación de los índices promedio relativos a los tipos de tareas de la subdimensión 1.

En cuanto a la distribución de los índices individuales relativos a la subdimensión 1 por categorías del desempeño (anexo 70), a 18 casos (69,2 %) corresponde un índice ubicado en las categorías “muy alto” o “alto”, no existiendo ningún estudiante al que se le asocie un índice perteneciente a la categoría “muy bajo”; de manera que de los 26 integrantes del grupo-clase, existen 24 (92,3 %) cuyos índices están en la categoría “medio” o en una categoría superior.

Esta distribución de los índices, supera los resultados obtenidos en la prueba inicial (anexo 59), pues se redujo el número de estudiantes cuyos índices se ubican en las categorías “bajo” o “muy bajo”, aumentando el que se sitúa en las categorías “alto” o “muy alto”.

En el análisis de la relación de los resultados de la dimensión con las cuatro directrices del contenido matemático evaluadas (anexo 71), se observa que el índice promedio más bajo (56,2) corresponde a la directriz “geometría-trigonometría”, existiendo un mejor estado en el resto de las directrices, cuyos índices se ubican en la categoría “alto”. La directriz “números y conjuntos numéricos”, es la que presenta el estado más favorable.

Al comparar los resultados anteriores con los obtenidos en la prueba inicial (anexo 60), se aprecia, que en todas las directrices existe un aumento significativo del índice promedio, produciéndose el mayor (34,5) en la directriz “la variable como número general”.

4b. Resultados en la aplicación de proposiciones relativas a relaciones entre conceptos estudiados. Comparación con el estado inicial

En el anexo 72 se muestra, para cada estudiante, el índice relativo a la subdimensión 2 y a sus tipos de tareas, obtenido a partir de la cuarta prueba. También aparece el índice promedio relativo a cada tipo de tarea y a la subdimensión 2, los cuales se representan en la figura 16. En ésta se observa que al tipo de tarea “argumentar una proposición”, corresponde el mayor índice promedio (86,9), en tanto a “identificar un concepto y

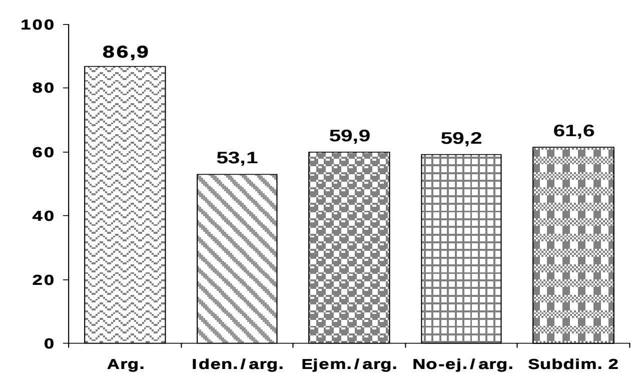


Fig. 16: Índices relativos a la subdimensión 2 y a sus tipos de tareas.

argumentar", corresponde el menor (53,1). Al resto de los tipos de tareas corresponden índices muy próximos. El índice promedio de la subdimensión (61,6) indica que en la aplicación de proposiciones expresivas de relaciones entre conceptos estudiados, los miembros del grupo manifiestan un nivel de desempeño ligeramente alto.

Aunque el mayor índice promedio corresponde al tipo de tarea, "argumentar una proposición" (86,9), este hecho –como en la segunda prueba– no significa que los alumnos y alumnas del grupo hayan desarrollado la habilidad para argumentar en mayor grado que las habilidades necesarias para resolver las tareas del los otros tres tipos, pues las tareas propuestas exigían la identificación de una argumentación y no su elaboración. Precisamente las dificultades en la construcción de una argumentación correcta, han incidido en el valor de los índices correspondientes al resto de los tipos de tareas.

Al comparar los resultados anteriores con los obtenidos en la prueba inicial (Fig. 17), se observa que en todos los tipos de tareas existe un incremento del índice, correspondiendo el mayor al tipo "ejemplificar/argumentar" (30,7), aunque con excepción de "argumentar una proposición", el incremento del índice es mayor que 20 en todos los casos.

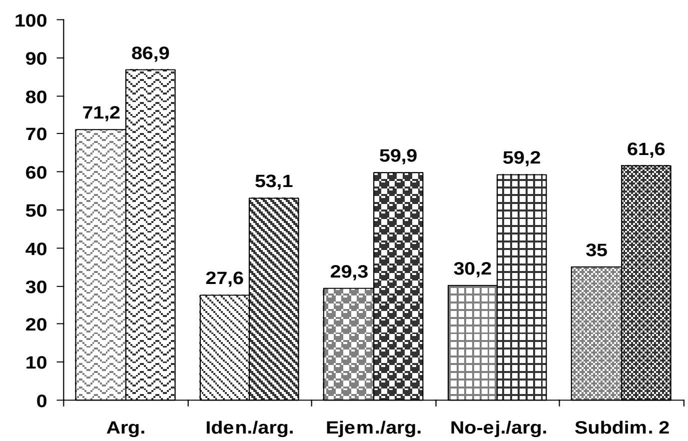


Fig. 17: Comparación de los índices promedio relativos a los tipos de tareas de la subdimensión 2.

Respecto a la distribución de los índices individuales relativos a la subdimensión 2 por las categorías del desempeño (anexo 73), a 15 casos (57,6 %) corresponde un índice ubicado en las categorías "muy alto" o "alto", no existiendo ningún alumno al que se le asocie un índice perteneciente a la categoría "muy bajo"; de manera que de los 26 integrantes del grupo-clase, existen 25 (92,2 %) cuyos índices están en la categoría "medio" o en una categoría superior.

Esta distribución de los índices por categoría, supera los resultados de la prueba inicial (anexo 62), pues disminuyó significativamente el número de estudiantes cuyos índices se ubican en las categorías “bajo” o “muy bajo”, aumentando el que se sitúa en las categorías “alto” o “muy alto”.

En cuanto a la relación de los resultados de la dimensión con las cinco directrices del contenido matemático evaluadas (anexo 74), se observa que el índice promedio más bajo (55,6) corresponde a la directriz “relaciones y funciones”. Al resto de las directrices corresponde un índice mayor que 60, el cual las ubica en la categoría “alto”.

Al comparar los resultados anteriores con los obtenidos en la prueba inicial (anexo 64), se aprecia, que en todas las directrices existe un aumento significativo del índice promedio, produciéndose el incremento mayor en la directriz “relaciones y funciones”, a pesar de que a ella corresponde el menor índice promedio.

4c. Desempeño general en la dimensión cognitivo-instrumental. Comparación con el estado inicial

Al igual que se hizo con las pruebas iniciales, en el análisis de los resultados de las pruebas que se administraron después de implementar el modelo didáctico, se utilizaron los modelos estadísticos de medición elaborados, para el cálculo de un índice relativo a cada alumno y alumna, respecto a la dimensión cognitivo-instrumental, un índice promedio y uno que caracteriza a esta dimensión por directrices del contenido matemático (anexo 75).

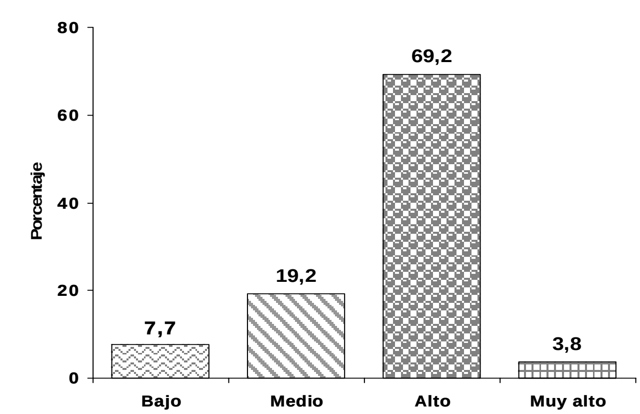


Fig. 18: Distribución del índice general por categoría.

El valor del índice promedio (64,7), indica que en el grupo investigado, la dimensión cognitivo-instrumental de la integración conceptual evaluada, como promedio, se encuentra en la categoría “alto”; de modo que como se infiere de la figura 18, donde se muestra el porcentaje de alumnos por categoría, a 18 de ellos (69,2 %) corresponde un índice perteneciente a la categoría “alto”, y a un caso de los 26 investigados (3,8 %), se le asocia un índice ubicado en la categoría “muy alto”. En la categoría “bajo” se sitúan sólo los índices referidos a dos estudiantes (7,7%) y a ninguno corresponde un índice dispuesto en la categoría “muy bajo”.

Si se comparan los resultados anteriores con los obtenidos en las pruebas iniciales (Fig. 19), se aprecia que el número de alumnos y alumnas a quienes corresponden índices situados en las categorías "bajo", "muy bajo" y "medio", se redujo; mientras aumentó el número, cuyos índices pertenecen a la categorías "alto" o "muy alto".

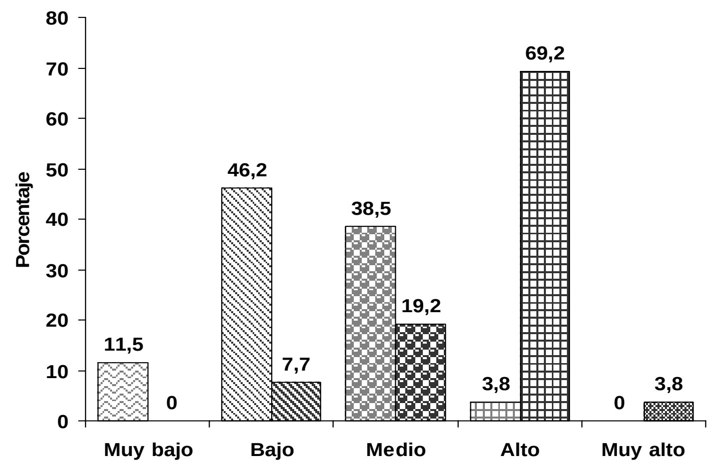


Fig. 19: Comparación de la distribución del índice general por categoría.

En cuanto al comportamiento de la integración conceptual por directrices del contenido matemático (anexo 75), se observa que el menor índice promedio (58,9) corresponde a "geometría-trigonometría" y el más alto (68,8) a "números y conjuntos numéricos". Al resto de las directrices evaluadas corresponde un índice superior a 60, ubicado en la categoría "alto".

Al comparar los resultados anteriores con los obtenidos en las pruebas iniciales (anexo 64), se aprecia, que en todas las directrices existe un aumento significativo del índice promedio, produciéndose el incremento mayor (32,6) en la directriz "relaciones y funciones".

En el pre-experimento se utilizaron fundamentalmente tareas que exigían la integración de dos o tres conceptos, quedando sin evaluar el desempeño de los alumnos y alumnas en casos más complejos, lo cual es pertinente en la medida que se vaya avanzando en el curso y en los grados de la Educación Preuniversitaria.

A partir de los resultados de la medición de las tres dimensiones de la integración conceptual expuestos en esta sección, se puede afirmar que la hipótesis de la investigación ha sido probada en los marcos del grupo estudiado. No se puede aseverar a partir del pre-experimento realizado, que los resultados obtenidos sean válidos en una muestra de mayor tamaño, pues se ha trabajado de manera intencional y ello imposibilita el uso de métodos de la inferencia estadística para obtener generalizaciones referidas a la población de alumnos y alumnas.

Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se han expuesto los resultados de la evaluación por expertos del modelo didáctico elaborado y de su implementación en la práctica mediante un pre-experimento pedagógico.

En la evaluación del modelo por expertos –realizada mediante el procedimiento de comparación por pares– se obtuvieron juicios de valor que ubican a 19 de los 21 indicadores utilizados, en la categoría muy adecuado y a los dos restantes en la categoría bastante adecuado. Ello implica, que todas las dimensiones fueron valoradas como muy adecuadas, valiendo la misma categoría para la calidad del modelo.

La implementación del modelo en la práctica pedagógica se realizó de la manera en que éste fue concebido, comprobándose su validez en los marcos del grupo de alumnos y alumnas sometidos al estudio.

Para la evaluación del estado inicial de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en los alumnos y alumnas estudiados, antes y después de la implementación del modelo, se tuvieron en cuenta los tres elementos que conforman el triángulo de la evaluación citados en el capítulo I.

De gran utilidad para hacer inferencias a partir de la evidencia, es el método de interpretación asociado a los dos modelos estadísticos elaborados, los cuales permitieron realizar un análisis de los resultados de cada una de las pruebas aplicadas, así como su comparación.

Mediante la implementación del modelo, quedó comprobada la hipótesis de investigación en el grupo estudiado con la muestra de tareas utilizadas.

CONCLUSIONES GENERALES

La integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas se concibe en la investigación realizada como la determinación y representación de estas relaciones y eventualmente de relaciones entre el cardinal (números de elementos) de las extensiones de los conceptos involucrados y de otros que emergen en este proceso.

Tanto en la metodología de la enseñanza de la Matemática que se utiliza en Cuba como en otros enfoques didácticos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, concebidos en el extranjero, se considera explícita o implícitamente la integración conceptual como un proceso muy relacionado con la comprensión conceptual del contenido. Tal es su importancia que ha sido incluido en el "*Proyecto de documento sobre las líneas directrices y competencias en la asignatura Matemática"*del MINED.

Aunque en la bibliografía consultada en el desarrollo de esta investigación se trata la integración conceptual a partir de las relaciones conceptuales clásicas, en las fuentes examinadas no se identificaron contribuciones que puedan ser utilizadas en la planificación y dinámica de este proceso en la Educación Preuniversitaria, según las exigencias actuales.

En la construcción de los fundamentos teóricos del modelo didáctico elaborado fueron de mucha utilidad: la teoría del conocimiento del materialismo dialéctico, la psicología histórico-cultural fundada por Vigotski, la pedagogía socialista, aportes de pedagogos cubanos acerca de la educación, la didáctica general construida sobre estas bases, la metodología de la enseñanza de la Matemática elaborada por especialistas de la otrora República Democrática Alemana y desarrollada por investigadores cubanos y la didáctica centrada en los conceptos, resultado del trabajo del Grupo de Educación Matemática de la Universidad Central de Las Villas. Tuvieron alguna utilidad otras teorías y tendencias didácticas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática que tienen un alcance internacional, como son la ingeniería didáctica, los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council for Teacher of Mathematics (NCTM) y las teorías de las funciones semióticas, antropológica, de las situaciones didácticas, de los campos conceptuales y de las representaciones múltiples.

En la investigación se elaboró una concepción de los conceptos matemáticos en la que se adicionaron a la extensión y al contenido, los significados y las representaciones como nuevas componentes. Esta idea es muy importante para explicar el proceso de desarrollo conceptual y pudiera ser muy útil en el estudio de otras relaciones conceptuales que no fueron investigadas.

En la tesis se expone una caracterización didáctica del concepto de integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, que constituyó una guía en la elaboración de un modelo didáctico de este proceso.

Los alumnos de la Educación Preuniversitaria que fueron diagnosticados antes de la implementación del modelo didáctico elaborado, demostraron desconocimiento de las técnicas facilitadoras de la integración conceptual investigada y poco dominio de los conocimientos que se obtienen como productos en este proceso. Ello se corresponde con la actuación y baja preparación de sus profesores y profesoras en el tema, con la baja frecuencia del proceso en las video-clases, el libro de texto y en el software educativo Eureka, destinado al aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria.

Son cuatro las etapas que componen el modelo didáctico elaborado, entre éstas existen relaciones diacrónicas y sincrónicas, pues no transcurren en una secuencia lineal. En la etapa de planificación se determinan las colecciones de los conceptos que deben ser integrados, se distribuyen éstas por clases y se proyecta cómo realizarlo; las tres etapas restantes representan la dinámica de la integración conceptual investigada en términos de la elaboración de técnicas facilitadoras, la determinación de relaciones conceptuales utilizando estas técnicas y la aplicación de conocimientos sobre las relaciones conceptuales determinadas, a la resolución de tareas.

El modelo didáctico elaborado constituye una contribución a la metodología de la enseñanza de la Matemática respecto al desarrollo conceptual de los alumnos y alumnos de la Educación Preuniversitaria y establece una vía para llevar a la práctica ideas importantes contenidas en el "*Proyecto de documento sobre las líneas directrices y competencias en la asignatura Matemática"* del MINED.

El modelo fue sometido a evaluación por expertos, quienes lo valoraron como muy adecuado. También se corroboró en la práctica pedagógica mediante un pre-experimento, en la modalidad de grupo único con medida pre y post. En todos los alumnos sometidos al estudio se evidenciaron cambios favorables en la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, los cuales confirmaron la hipótesis de investigación en la muestra estudiada.

La estructuración del modelo en correspondencia con una caracterización didáctica del concepto de “integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas”, los criterios favorables obtenidos en su evaluación por expertos y los resultados de su implementación, indican que fue cumplido el objetivo de la investigación.

RECOMENDACIONES

De la investigación realizada resultan las recomendaciones siguientes:

- Realizar un estudio con otros grupos con el objetivo de involucrar un mayor número de alumnos y alumnas, elevando la validez externa del modelo elaborado.
- Poner a disposición de la Comisión Nacional de Matemática los resultados de esta tesis.
- Incluir la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas, en los instrumentos de medición de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria.
- Elaborar un material didáctico con el contenido del modelo, que pueda ser utilizado para la preparación metodológica de los docentes en ejercicio, jefes de departamento, metodólogos y en la formación de nuevos docentes.

El autor de la tesis considera que en trabajos futuros se puede dar solución a problemas relacionados con las situaciones siguientes:

1. La identificación y definición de relaciones conceptuales importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, todavía requiere de investigación.
2. La integración conceptual basada en otras relaciones y especialmente en relaciones interdisciplinarias, requiere de estudio y es de capital importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria.
3. Aunque el modelo didáctico elaborado pudiera ser transferido a otros niveles educativos, tal afirmación sólo queda al nivel de una hipótesis.
4. La elaboración de software y otros medios didácticos que faciliten la integración conceptual investigada en la tesis, es una demanda que necesita de una respuesta científica.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Acuña, E (2002). *Rubistar, herramienta para construir matrices de valoración*. Colombia. Recuperado de http://www.eduteka.org/
2. Addine, F. y otros (1998). *Didáctica y optimización del proceso de enseñanza-aprendizaje* [versión electrónica]. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. La Habana.
3. Addine, F. y otros (2000). *Diseño Curricular* [versión electrónica]. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño**.** La Habana.
4. Addine, F., González, A. M. & Recarey, S. C. (2002). Principios para la dirección del proceso pedagógico. En G. García Batista (Ed.) *Compendio de Pedagogía* (pp. 80-101). La Habana: Pueblo y Educación.
5. Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. Tesis presentada en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Santiago de Cuba. Cuba.
6. Álvarez, C. (1992). *La escuela en la vida*. Colección Educación y Desarrollo. La Habana: Félix Varela.
7. Álvarez, C. (sf). *Metodología de la investigación científica* [versión electrónica]. Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel Gran". Santiago de Cuba.
8. Álvarez, C. (1998). *Pedagogía como ciencia* (*epistemología de la educación)* [versión electrónica]. La Habana.
9. Álvarez, C. (sf). *Pedagogía y didáctica* [versión electrónica]. La Habana.
10. Arias, L. (2003). *¿Tareas docentes, o tareas de enseñanza y tareas de aprendizaje?* Recuperado el 14 de septiembre de 2006, en http://www.monografias.com
11. Armas, N. De, Lorences, J. & Perdomo, J. M. (2003). *Conceptualización y caracterización de los aportes teórico-metodológicos como resultados científicos de la investigación*. No publicado. Santa Clara. ISP Félix Varela: Centro de Estudios de Ciencias Pedagógicas.
12. Arnaiz, I. (2005a). Modelo de actuación de los docentes para favorecer la aplicación integrada del contenido desde el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En, *Memorias del Evento Pedagogía 2005*. La Habana.
13. Arnaiz, I. (2005b). *Modelo de actuación de los docentes para favorecer la aplicación integrada del contenido desde el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática*. Resumen de la tesis de doctorado. No publicado. Ciego de Ávila. Cuba.
14. Arteaga, E. (2000). *El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en la enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Instituto Superior Pedagógico "Conrado Benítez García". Cienfuegos. Cuba.

15. Arteaga, E. (2002). Algunas consideraciones sobre las tareas docentes que propician la actividad creadora o descubridora del alumno. *Xixin*, *3 (1)*. Querétaro. Recuperado de http://www.uaq.mx/matematicas/redm

16. Arteaga, E. (2003). Las tareas de contenido y las tareas formales para el diagnóstico en la asignatura Matemática. *Xixin*, *3 (3)*. Querétaro. Recuperado de http://www.uaq.mx/matematicas

17. Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Rescherches en Didactique des Mathématiques*, *10 (23)*, 241-286.

18. Arzarello, F., Hefendehl, J-L., Hebeker, L & Turnau, S. (1999). Mathematics as cultural product. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education. Tomo I* (pp. 70-77) [versión electrónica]. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales

19. Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. (2000). *Psicología educativa. Un punto de vista cognitivo***.** México: Trillas.

20. Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la Teoría Brousseauniana. *Educación Matemática*, *13 (3)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de http://perl.ajusco.upn.mx/piem/publicaas.html

21. Ballester, Ll. (1999). La lógica situacional de K. Popper y la metodología de la investigación social y educativa. *RELIEVE, 5 (2)*. España. Recuperado de http://www.uv.es/RELIEVE

22. Ballester, S. (1999). Los ejercicios de nuevo tipo· *Educación, (97),* 25-30. La Habana: Pueblo y Educación.

23. Ballester, S. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*, *tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.

24. Ballester, S. y otros (2000). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*, *tomo II*. La Habana: Pueblo y Educación.

25. Ballester, S. y otros (2002). *El transcurso de las líneas directrices en los programas de Matemática y la planificación de la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.

26. Baranov, S. P., Bolotina, L. R. & Slastioni, V. A. (1989). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.

27. Batanero, C. (1997). Cuestiones metodológicas en la evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos y de su evolución. *Quadrante*, *6 (2)*, 25-43. Recuperado de http://www.sectormatematica.cl/articulo.htm

28. Beltrán, A. (2007, abril). *Los objetivos y las tareas de la investigación, su relación con la estructura de la tesis*. Recuperado el 14 de septiembre de 2007, en http://www.monografias.com

29. Beltrán, J. (1998). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

30. Bermúdez, R. & Pérez, L. M. (sf). *La teoría histórico-cultural de L. S. Vigotsky. Algunas ideas básicas acerca de la educación y el desarrollo psíquico* [versión electrónica]. La Habana. Cuba.

31. Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime*, *4 (3)*, 219-236. México.

32. Borges, A. (2006). *Diseños de investigación en psicología*. Curso para la formación de psicólogos. Recuperado de http://webpages.ull.es/users/aborges

33. Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent & M. Sierra (Eds.), *Actas del Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-28). Huelva. España. Recuperado el 19 de junio de 2006, en http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm

34. Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. Barcelona. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino

35. Braslavsky, C. (2001). Los desafíos de la educación para el Siglo XXI. Intervención de la directora de la Oficina Internacional de Educación de la UNESCO en las Jornadas de la Red Mediterránea. En Ministerio de Educación Cultura y Deporte (Ed.), *Red Mediterránea. BIE. Evaluación de reformas* (pp. 14-24). España. Recuperado de http://www.ince.mec.es

36. Brinkmann, A. (2001). Mathematical networks – conceptual foundation and graphical representation. En R. Soro (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs X, Proceedings of the MAVI-10. European Workshop* (pp. 7-16). University of Turku, Department of Teacher Education. Recuperado de http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MAVI/Proc10.pdf

37. Brinkmann, A. (2002). Über vernetzungen im mathematikunterricht - eine untersuchung zu linearen gleichungssystemen in der sekundarstufe I. Disertación doctoral. Instituto de Matemática. Universidad de Duisburg. Alemania. Recuperado de http://www.ub.uni-duisburg.de/ETD-db/theses/available/duett-09112002-195540/

38. Brinkmann, A. (2003a). Graphical knowledge display – mind mapping and concept mapping as efficient tools in mathematics education. *Mathematics Education Review*, *(16)*, 35-48. USA.

39. Brinkmann, A. (2003b, febrero). Mind mapping as a tool in mathematics education. *Mathematics Teacher*, *96 (2)*, 96-101. USA.

40. Brinkmann, A. (2005). Building structure in mathematics within teaching and learning processes- a study on teachers' input and students'achievement. Ponencia presentada en la Cuarta Conferencia Europea para la Investigación en Matemática Educativa (CERME 4). Recuperado de http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/3/Brinkmann.pdf

41. Brito, H. (1990). Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa teórica, metodológica y práctica. *Primer Coloquio sobre la Inteligencia*. ISP Enrique J. Varona. La Habana. Cuba.

42. Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de las didácticas de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7 (2)*, 33-115.

43. Brousseau, G. (1989a). *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? Primera parte* (Luis Puig, trad.). Université de Bordeaux. Francia. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales.

44. Brousseau, G. (1989b). *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? Segunda parte* (Luis Puig, trad.). Université de Bordeaux. Francia. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales.

45. Brousseau, G. (1999). Research in mathematics education: observation and … mathematics. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education*. *Tomo I* [versión electrónica]. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales

46. Burton, L. (1999). Mathematics and theirs epistemologies-and the learning of mathematics. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education. Tomo I* (pp. 87-102) [versión electrónica].

47. Buzón, M. & Silverio, M. (1986). Las ideas rectoras en el proceso de integración de los conocimientos. *Varona*, *VIII (16)*. La Habana.

48. Calderón, A. (1986). Reflexiones sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática (conferencia). En, *XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina y IX reunión de Educación Matemática.* Recuperado de http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/

49. Campistrous, L. (2006). *Análisis de datos en la investigación educativa*. Conferencia impartida en la Universidad de Ciencias Informáticas (UCI) [versión electrónica]. No publicado. La Habana.

50. Campistrous, L. & Rizo, C. (2000a). *Indicadores e investigación educativa (primera parte). Ciencias Pedagógicas, 1 (2).* Recuperado el 6 de octubre de 2006, en http://cied.rimed.cu/revista/12/portada/laportada1r2.html

51. Campistrous, L. y Rizo, C. (2000b). *Indicadores e investigación educativa (segunda parte). Ciencias Pedagógicas, 1 (3).* Recuperado el 6 de octubre de 2006, en http://cied.rimed.cu/revista/13/portada/laportada1r3.html

52. Campistrous, L. y otros (1989). *Matemática décimo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

53. Campistrous, L. y otros (1990). *Matemática onceno grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

54. Campistrous, L., Rivero, H., Durán, A. & Sandoval, A. (1991). *Matemática duodécimo grado*. *Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.

55. Cañizárez, E. (2005). *Alternativa didáctica dirigida a integrar el concepto de función lineal con el concepto de movimiento*. Trabajo de diploma en opción al título de Licenciado en Educación, carrera Matemática-Computación. No publicado. Sancti Spíritus.

56. Carmen, L. del (1999). *El análisis y secuenciación de los contenidos educativos.* Barcelona: Horsori.

57. Casas, L. M. (2002). *El estudio de la estructura cognitiva de los alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Extremadura. España. Recuperado de *http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/Casas02a.pdf*

58. Castellanos, B. (1999). *Perspectivas contemporáneas en torno al aprendizaje*. Maestría en Educación. Material de consulta. No publicado. ISP Enrique José Varona. La Habana. Cuba.

59. Castellanos, D. (1999). *El aprendizaje desarrollador y sus dimensiones*. Centros de Estudios Educacionales. ISP Enrique José Varona. La Habana.

60. Castellanos, D. (1999a). *La comprensión de los procesos del aprendizaje: apuntes para un marco conceptual*. Centros de Estudios Educacionales. ISP Enrique José Varona. La Habana.

61. Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. J. & Moreno, M. J. (2004). Aprendizaje y desarrollo. En G. García (Ed.), *Temas de introducción a la formación pedagógica general* (pp. 291-315). La Habana: Pueblo y Educación.

62. Castro, A. (2000). Enfoques en el abordaje de la categoría dificultad en el aprendizaje. *Ciencias Pedagógicas, 1 (3).* Recuperado el 6 de octubre de 2006, en *http://cied.rimed.cu/revista/13/portada/laportada1r3.html*

63. Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (95-124). Barcelona: Horsori.

64. Castro, E. y otros (1993). *La evaluación en matemáticas: revisión y estado de la cuestión*. Universidad de Granada. Granada. Recuperado de *http://cumbia.ath.cx/lr.htm*

65. Castro, E., Rico, L. & Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15 (3)*, 361-371.

66. Castro, S. y otros (1992). *Geometría*. La Habana: Pueblo y Educación.

67. Cazau, P. (2005). *Estilos de aprendizaje: generalidades*. Chile. Recuperado de *http://www.rmm.cl/index.php?ccsForm=Login*

68. Cerezal, J. & Fiallo, J. (2001). Los métodos teóricos en la investigación pedagógica. *Desafío Escolar, 5, segunda edición especial*, 22-33.

69. Cerezal, J., Fiallo, J., Ramírez, L. A., Valledor, R. & Ruiz, A. (2006). Material básico. Metodología de la investigación. En, *Maestría en Ciencias de la Educación. Fundamentos de las Ciencias de la Educación*. *Módulo II. Primera parte*. La Habana: Pueblo y Educación.

70. Chávez, J., Permuy, L. D. & Suárez, A. (2004). Las corrientes y tendencias de la pedagogía en el siglo XX [versión electrónica]. Maestría en ciencias de la educación. Módulo I. IPLAC. La Habana.

71. Chávez, J., Suárez, A. & Permuy, L. D. (2005). *Acercamiento necesario a la Pedagogía General*. La Habana: Pueblo y Educación.

72. Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2)*, 221-266. Francia.

73. Contreras, A. & Font, V. (2002). *¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?* Castellón. Recuperado de http://www-didactique.imag.fr

74. Córdova, C. (2003). *Consideraciones sobre metodología de la investigación* [versión electrónica]. No publicado. Universidad de Holguín: Centro de Estudios sobre Cultura e Identidad.

75. Corral, R. (2002). La zona de desarrollo próximo y la pedagogía universitaria. *Temas, 31*, 27-32. La Habana. Cuba.

76. Cortese, A. (sfa). El aprendizaje. En *Enciclopedia de desarrollo personal (*vol. 1, pp. 159-168) [versión electrónica].

77. Cortese, A. (sfb). El deseo. En *Enciclopedia de desarrollo personal (*vol. 1, pp. 19-27) [versión electrónica].

78. Cortese, A. (sfc). La motivación. En *Enciclopedia de desarrollo personal (*vol. 2, pp. 98-114) [versión electrónica].

79. Cortese, A. (sfd). La creatividad. En *Enciclopedia de desarrollo personal (*vol. 1, pp. 269-297) [versión electrónica].

80. Cruz, S. & Fuentes, H. (1998). *El modelo de actuación profesional: una propuesta viable para el diseño curricular de la educación superior*. No publicado. Santiago de Cuba. Universidad de Oriente.

81. Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.

82. Cuadrado, Z., Naredo, R. & Rizo, C. (1991). *Matemática duodécimo grado. Parte II*. La Habana: Pueblo y Educación.

83. Davídov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Moscú: Mir.

84. Davídov, V. & Slobódchikov, V. L. (1991). La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. En A. V. Mudrik (Ed.), *La educación y la enseñanza: una mirada al futuro* (pp. 118-145). Moscú: Progreso.

85. Delors, J. y otros (1996). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI*. España: Ediciones UNESCO.

86. Delval, J. (1984). *Crecer y pensar: la construcción del conocimiento en la escuela*. Barcelona: Laia.

87. Díaz-Barriga, F. (1990). *Metodología de diseño curricular para la educación superior*. México: Trillas.

88. Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 61-96). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

89. Douady, R. (1999). Relation function/al Álgebra: an example in high school (age 15-16). En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education*. Tomo I (pp. 113-124) [versión electrónica]. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales

90. Douady, R. & Parzysz, B. (1998). La geometría en el salón de clases. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *ICMI Study: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century. Capítulo 5* (pp. 159-192) (V. Hernández, Trad.). Kluwer Academic Publishers.

91. Dyke, F. V. (2003). Using graphs to introduce functions. *Mathemathics Teacher, 96 (2)*, 126-137. USA.

92. Escudero, T. (2003). Desde los tests hasta la investigación evaluativa actual. Un siglo, el XX, de intenso desarrollo de la evaluación en educación. *RELIEVE, 9 (1)*. España. Recuperado de http://www.uv.es/RELIEVE

93. Espinoza, L. & Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de una función: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias, 18 (3)*, 355-368. España.

94. Esteva, M. (2003a). Las categorías fundamentales de la pedagogía como ciencia. Sus relaciones mutuas. *Ciencias Pedagógicas, 4 (3).* Recuperado el 5 de junio de 2006, en http://cied.rimed.cu/revista/41/portada/laportada4r1.html

95. Esteva, M. (2003b). La relación entre la instrucción y la educación. Un problema pedagógico no resuelto. *Ciencias Pedagógicas, 2 (3)*. La Habana. Recuperado el 9 de junio de 2006, en http:/cied.rimed.cu/revista/23/portada/laportada2r3.html

96. Fauconnier, G. & Turner, M. (1998). Conceptual integration networks. *Cognitive Science, 22 (2)*, 133-188.

97. Feria, F. F. (2003). *El perfeccionamiento de la dinámica del proceso docente educativo en la disciplina Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.

98. Fiallo, J. (2001). *La interdisciplinariedad en el currículo: ¿utopía o realidad educativa?* Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana.

99. Flores, P. (1996). *Evaluación del profesor de matemáticas*. Universidad de Granada. Recuperado de http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman.

100. Flores, P., Moreno, A. & Sánchez, J. M. (1999). Conocimiento profesional del profesor de Matemática y oposiciones. *Thales*. Recuperado de http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman.

101. Fonseca, C. & Gascón, J. (2000). Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. En, *IV Simposio de la SEIEM. Boletín SI-IDM, 11*. Huelva. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huelva/Fonseca_Gascondoc

102. Fonseca, C. & Gascón, J. (2002a). Las organizaciones matemáticas en el paso de secundaria a la universidad. Análisis de los resultados de una prueba de matemáticas. En, *Boletín SI-IDM, 14*. Universidad de Vigo. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/castellon_2002/Gascon1.doc

103. Fonseca, C. & Gascón, J. (2002b). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la enseñanza secundaria. En, *Actas del VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 205-224). Logroño. España.

104. Font, V. (2000). Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria. *La Lettre de la Preuve,* 1-21. Francia. Recuperado de http://www-didactique.imag.fr

105. Font, V. (2001a). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *EMA, 6 (1)*, 180-200. Colombia.

106. Font, V. (2001b). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 14*, 1-35. Recuperado de http://www/vfont@d5.ub.es

107. Font, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la educación matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2)*, 249-279.

108. Font, V. (2004). Reflexión en la clase de didáctica de las matemáticas sobre una "situación rica". En E. Badillo, D. Couso, G. Perafrán & A. Adúriz-Bravo (Eds.), *Herramientas para la enseñanza de la Matemática y de las Ciencias Experimentales en el aula.* Bogotá: Magisterio. Recuperado de *http://www.webpersonal.net/vfont/*

109. Font, V. (2005). *Las representaciones en Educación Matemática*. Presentación electrónica para uso del doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. Recuperado de *http://www.ugr.es/~jgodino/*

110. Font, V., Godino, J. D. & D'Amore (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. Recuperado el 6 de octubre de 2007, en *http://www.ugr.es/~jgodino.*

111. Fuentes, H. (2002). *Aproximación a la didáctica de la educación superior desde una concepción holístico-configuracional*. No publicado. Universidad de Oriente. Santiago de Cuba.

112. Fuentes, H. C, Matos, E. C. & Cruz, S. S. (2004). *La diversidad en el proceso de investigación científica. Reto actual en la formación de investigadores*. No publicado. Santiago de Cuba. Universidad de Oriente: Centro Manuel Gran.

113. Fuentes, H. C., Cruz, S. & Álvarez, I. B. (1998). Modelo holístico-configuracional de la didáctica. *Biblioteca Digital I*. Ministerio de Educación de Cuba. La Habana. Cuba.

114. Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso particular del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. España. Recuperado de *http://www.uco.es/informacion/webs/seiem/Novedades/Tesis%20resumenes*

115. Garcés, W. (2000). *El sistema de tareas como modelo de actuación didáctica en la formación de profesores de Matemática-Computación*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Holguín.

116. García, J. A. (1999). *La didáctica de las matemáticas: una visión general*. España. Recuperado el 5 de julio de 2006, en *http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/didmat.htm*

117. García, F. (2000, febrero). Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. *Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales, 207*. Universidad de Barcelona. Barcelona. España. Recuperado de *http://www.ub.es/geocrit/garpe.htm*

118. García, F. J. & Gascón, J. (2006). Mathematical modelling as e tool for the connection of school mathematics. *ZDM, 38 (3)*, 226-246.

119. García, L. (2002). El modelo de escuela. En G. García Batista (Ed.), *Compendio de Pedagogía* (pp. 283-310). La Habana: Pueblo y Educación.

120. Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 6 (3)*, 125-141. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

121. Gascón, J. (2001, julio). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre prácticas docentes. *Relime, 4 (2),* 103-128. Recuperado el 19 de junio de 2006, en http://www.clame.org.mx/bdigital/relime/pdf/2001-4-2/2.pdf

122. Gascón, J., Muñoz, M., Sales, J. & Segura, R. (2004). Matemáticas en secundaria y universidad: razones y sinrazones de un desencuentro. En, *X Jornadas sobre Educación Matemática*. Santiago de Compostela. España. Recuperado de http://www.agapema.com/activ/act_formacion

123. Gelfman, E. & Kholodnaya, M. (1999). The role of ways information coding in estudents′ intellectual development. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education. Tomo II* (pp. 38-48) [versión electrónica]. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales .

124. Gesell, A. (1968). *El Adolescente de 10 a 16 años*. La Habana: Edición Revolucionaria.

125. Gil, G., Fernández, J., Rubio, F. & López, C. (2000a). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación. Proyecto PISA*. España. Recuperado de http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm.

126. Gil, G., Fernández, J., Rubio, F. & López, C. & Sánchez, S. (2000b). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. La evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el Proyecto PISA 2000*. España. Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte.

127. Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías en didáctica de la Matemática. *Quadrante*, *2 (1)*, 9-22.

128. Godino, J. D. (1996). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference, 2* (pp. 417-424). Valencia. España.

129. Godino, J. D. (2001a). *Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas*. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/doctorado/confrontacion.pdf

130. Godino, J. D. (2001b). *Análisis semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática*. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm.

131. Godino, J. D. (2002a). Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática. Material para el Doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino.

132. Godino, J. D. (2002b). Enfoque antológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22 (2-3)*, 237-284. Francia. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino.

133. Godino, J. D. (2002c). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Material para el uso en el Doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino.

134. Godino, J. D. (2002d, enero-febrero-marzo). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *UNO, (29)*. Barcelona. España: Grao.

135. Godino, J. D. (2005). *Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Teoría de las configuraciones didácticas*. Presentación electrónica. Doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino.

136. Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14 (3)*, 325-355.

137. Godino, J. D. & Batanero, C. (1995). Algunos problemas éticos en la elaboración de tesis doctorales. *Quadrante, 4 (2)*, 29-42.

138. Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática*. Guimaraes. Portugal. Recuperado de http://www.sectormatematica.cl/articulo.htm

139. Godino, J. D. & Batanero, C. (1999). The meaning of mathematics objects as analysis units for didactic of mathematics. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education*, *tomo II* (pp. 16-22) [versión electrónica]. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales

140. Godino, J. D., Batanero, C. & Navarro-Pelayo, V. (2003). Epistemología e instrucción matemática: implicaciones para el desarrollo curricular. En, *Investigaciones sobre fundamentos teóricos y metodológicos de la educación matemática* (pp. 105-122). Universidad de Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino.

141. Godino, J. D, Contreras, A. & Font, V. (2005). *Análisis de procesos de instrucción basados en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática*. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino.

142. Godino, J. D, Font, V., Contreras, A. & Wilhelmi, M. R. (2005). *Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Recuperado el 6 de octubre de 2006, en http://www.ugr.es/~jgodino.

143. Godino, J. D., Bencomo, M., Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino.

144. Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M. & Castro, C. (2007). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. Recuperado el 6 de octubre de 2007, en http://www.ugr.es/~jgodino.

145. Gómez, L. I. (2000). *Carta metodológica 1/2000*. Ministerio de Educación de Cuba. La Habana.

146. Gómez, M. A. (2005). *Una propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones, en el nivel preuniversitario*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Universidad de La Habana. La Habana. Cuba.

147. Gómez, P. (2001). Desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas & J. D. Godino, *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 165-179). Almería. España.

148. Gómez, P. (2006). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España.

149. Gómez, P. & Rico, L. (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Recuperado de http://cumbia.ath.cx/lr.htm

150. González, H. (1993, abril). Un criterio para clasificar habilidades matemáticas. *Educación Matemática*, *5 (1)*, 46-56. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

151. González, J. L. (1999). Didactical analysis: a non empirical qualitatives method for research in matehamatics education. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education*. *Tomo II* (pp. 245-255) [version electrónica]. Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales

152. González, V. y otras (1995). *Psicología para educadores.* La Habana: Pueblo y Educación.

153. González Rodríguez, B. E. (2001). *La preparación del profesor para la utilización de la modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

154. González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de Matemática. *Paradigma*, *XXI*. Venezuela.

155. Griffiths, A. (2000, enero-abril). Las matemáticas ante el cambio de milenio. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *3 (1)*, 23-41. Recuperado de http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/

156. Guétmanova, A. (1989). *Lógica*. Moscú: Progreso.

157. Guétmanova, A., Petrov, V. & Panov, M. (1991). *Lógica en forma simple sobre lo complejo*. Moscú: Progreso.

158. Gutiérrez, A. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas & J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-94). Almería. España.

159. Gutiérrez, R. B (sf). Precisiones metodológicas para el trabajo con los objetivos formativos [versión electrónica]. Instituto Superior Pedagógico “Félix Varela”. Santa Clara. Cuba.

160. Guzmán, M. de (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámides.

161. Guzmán. M. de (1998). Matemáticas y estructura de la naturaleza. En F. Mora Teruel & J. M. Segovia Arana (coord.), *Ciencia y Sociedad. Desafíos del Conocimiento ante el Tercer Milenio* (pp. 327-357). Recuperado de http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/

162. Guzmán. M. de & Navarro, M. (1993). *Profesiones. Conocer y ejercer las matemáticas*. España: Acento. Recuperado de http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/

163. Hasni, A. (2005). *L’interdisciplinarité et l’intégration dans l’enseignement et dans la formation à l’enseignement: est-ce possible et à quelles conditions?* Faculté d’éducation Université de Sherbrooke. Canadá. Recuperado el 10 de diciembre de 2005 del sitio Web de la Universidad de Sherbrooke: http://www.educ.usherb.ca/crie

164. Hernández, T. y otras (2005). Desempeño profesional y evaluación de los profesores de las universidades pedagógicas cubanas: necesidad y realidad. En, *Actas del Evento Pedagogía 2005*. La Habana.

165. Hernández, V. & Villalba, M. (sf). *George Polya*. Recuperado de http://www.sectormatematica.cl/articulo.htm

166. Herrera, J. I. (2000). *La concepción histórico-cultural y la educación inicial y preescolar* [versión electrónica]. Conferencia dictada en la Facultad de Educación Infantil. ISP Silverio Blanco. No publicada. Sancti Spíritus.

167. Herrera, J. I. & Álvarez, A. (2004). Un acercamiento necesario al diagnóstico pedagógico. *Ícone Educação*, *10 (1)*, 99-130. Minas Gerais. Brasil.

168. Hit, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 165-178). Granada: Editorial Universidad de Granada. Recuperado de http://cumbia.ath.cx/ugr/phmc/PDF/Hitt.pdf

169. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo de España (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. Recuperado de http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm

170. Inglada, N. & Font, V. (2003). *Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental*. Universidad de Barcelona. Barcelona. España. Recuperado de http://www.webpersonal.net/vfont/.

171. Jungk, W. (1978). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1*. La Habana: Pueblo y Educación.

172. Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2*. *Primera parte*. La Habana: Pueblo y Educación.

173. Jungk, W. (1981). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2*. *Segunda Parte*. La Habana: Pueblo y Educación.

174. Junker, B. W. (1999). *Some statistical models and computational methods that may be useful for cognitively-relevant assessment*. Learning Research and Development Center. USA. Recuperado de http://www.stat.cmu.edu/~brian/nrc/cfa/

175. Klingberg, L. (1972). *Introducción a la didáctica general*. La Habana: Pueblo y Educación.

176. Kolmogórov, A. N. & Fomín, S. V. (1978). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Moscú: Mir.

177. Labarrere, A. (1987). *Bases psicopedagógicas de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La Habana: Pueblo y Educación.

178. Labarrere, A. y otros (1995). *El adolescente cubano: una aproximación al estudio de su personalidad*. La Habana: Pueblo y Educación.

179. Landman, G. W. (2005). Las definiciones en matemática y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19* (pp. 528-552). México: CLAME.

180. Larios, V. (2000). *Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Querétaro. Tesis de maestría. Recuperado de http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm0r.html

181. Larios, V. (2002). Demostraciones y conjeturas en la escuela media. *Xixin*, *3 (2)*. Querétaro. México. Recuperado de http://www.uaq.mx/matematicas/redm

182. Lenoir, Y. (2004). La interdisciplinaridad en la escuela: ¿un fantasma, una realidad, una utopía? *Praxis, 5*, 85-101. Chile. Recuperado de http://www.revistapraxis.cl/ediciones/numero5/lenoir_praxis5.html

183. Lenoir, Y. (2005). *El enfoque interdisciplinario: otra forma de concebir la acción de formación*. Conferencia ofrecida en la universidad de Monterrey. México. Recuperado de http://www3.educ.usherbrooke.ca/crie/Publications/Communications

184. Lenoir, Y. & Hasni, A. (2004). La interdisciplinaridad: por un matrimonio abierto de la razón, de la mano y del corazón. *Revista Iberoamericana de Educación, 35*, 167-185. Recuperado de http://www.oei.es/revista.htm

185. Leontiev, A. N. (1979). *La actividad en la psicología*. La Habana: Editorial de Libros para la Educación.

186. Leontiev, A. N. (1981). *Actividad, conciencia, personalidad*. La Habana: Pueblo y Educación.

187. Lissabet Rivero, J. L. (1998). *La utilización del método de evaluación de expertos en la valoración de los resultados de las investigaciones educativas*. Recuperado de http://www.ilustrados.com

188. Llinares, S. (1999). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educação (Ed.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália, Actas da Escola de Verão de 1999* (pp. 109-132).

189. Llivina, M., Castellanos, D., Hernández, R. & Arencibia, V. (2000). Aproximación al aprendizaje desarrollador de la Matemática. *Memorias del Evento Universidad 2000*. La Habana. Cuba.

190. López, J. y otros (sf). Algunos aspectos de la dirección pedagógica de la actividad cognoscitiva de los escolares. La Habana.

191. López, J. y otros (2003). Marco conceptual para la elaboración de una teoría pedagógica. En G. García Batista (Ed.), *Compendio de Pedagogía* (pp. 45-60). La Habana: Pueblo y Educación.

192. López, J., Miranda, O. L., Cobas, M., Valera, O. & Chávez, J. (2000). *Fundamentos de la educación*. La Habana: Pueblo y Educación.

193. Machado, E. (2005, abril). El problema científico en la investigación pedagógica. Estudio preliminar desde una visión dialéctico-materialista. Recuperado el 14 de septiembre de 2007, en http://www.monografias.com

194. Marimón, J. A. (2004). *Aproximación al estudio del modelo como resultado científico*. No publicado. Santa Clara. ISP Félix Varela: Centro de Estudios de Ciencias Pedagógicas.

195. Marquès, P. (2000). *Medios didácticos y recursos educativos*. Barcelona. Recuperado de http//dewey.uab.es/pmarques

196. Martí, J. (1963). Los indios en los Estados Unidos. En, *Obras completas, tomo 10*. La Habana: Editorial Nacional de Cuba. (Trabajo original publicado en 1885).

197. Martín, J. F. (2001). Enseñanza de procesos de pensamiento: metodología, metacognición y transferencias. *RELIEVE, 2 (2_2)*. Salamanca. España. Recuperado de http://www.uv.es/RELIEVE

198. Martínez, Y. (2003). *Una variante del diseño de la integración de conocimientos matemáticos en torno al concepto de triángulos semejantes*. Trabajo de diploma en opción al título de Licenciado en Educación, carrera Matemática-Computación. No publicado. Sancti Spíritus.

199. Martínez. M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales. Universidad de Barcelona. Barcelona. España. Recuperado de http://www.tdx.cbuc.es/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0611104-162344//mms1de3.pdf

200. Martinet, M. A., Raymond, D. & Gauthier, C. (2004). *Formación de docentes. Orientaciones. Competencias profesionales*. Recuperado de http://www.educ.usherbrooke.ca/crie

201. Mederos, O. (2002a). *El enfoque histórico-cultural y los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos*. No publicado. UCLV. Santa Clara. Cuba.

202. Mederos, O. (2002b). *La formación, desarrollo y generalización de conceptos en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática*. Conferencia dictada en el RELME 16. La Habana.

203. Mederos, O. (2005). *Las hipótesis y su operativización*. No publicado. Centros de Estudios Pedagógicos. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

204. Mederos, O. (2006). *El proceso de desarrollo conceptual*. No publicado. Centros de Estudios Pedagógicos. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

205. Mederos, O. (En prensa). Los modelos y la modelación mediante ecuaciones de primer grado. *Números*. La Laguna. España.

206. Mederos, O. & González, B. E. (1997). Una variante metodológica para el estudio de los conceptos a partir de su definición. *Boletín de Matemática, Nueva Serie, IV*, 85-100. Colombia.

207. Mederos, O. & González, B. E. (2000). *Procedimiento para el estudio de los conceptos*. No publicado. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

208. Mederos, O. & González, B. E. (2005). *La modelación en la Educación Matemática*. Saltillo. México: Universidad Autónoma de Coahuila.

209. Mederos, O. & Martínez, J. E. (2005, diciembre). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. *Números, 62,* 53-64. Islas Canarias. España.

210. Mederos, O. & Martínez, A. (1997). Las operaciones de generalización y restricción de conceptos. *Boletín de Matemática, Nueva Serie, IV*, 101-113. Colombia.

211. Mederos, O. & Ruiz, A. M. (2003). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa "RELME"*, *16 (1)*. La Habana.

212. Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM, 38 (3)*, 269-280.

213. Microsoft Corporation (2004). Conducta. En *Enciclopedia Encarta*. *Edición de Lujo*. USA.

214. Microsoft Corporation (2004). Historia de la Educación. En *Enciclopedia Encarta. Edición de Lujo*. USA.

215. Meel, D. E. (2003, julio). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime, 6 (3),* pp. 221-271.

216. Ministerio de Educación de Cuba (1989). *Programa de Matemática Décimo Grado* [versión electrónica]. La Habana: Pueblo y Educación.

217. Ministerio de Educación de Cuba (1990). *Licenciatura en Educación. Carrera Matemática-Computación*. La Habana: Pueblo y Educación.

218. Ministerio de Educación de Cuba (2003). *Carrera de Profesor de Ciencias Exactas para la Educación Media Superior* [versión electrónica]. La Habana.

219. Ministerio de Educación de Cuba (2004a). *Programa de Matemática. Décimo grado* [versión electrónica]. La Habana.

220. Ministerio de Educación de Cuba (2004b). *Programa de Matemática. Onceno grado* [versión electrónica]. La Habana.

221. Ministerio de Educación de Cuba (2004c). *Programa de Matemática*. *Duodécimo grado* [versión electrónica]. La Habana.

222. Ministerio de Educación de Cuba (2004d). *Video-clases. Matemática décimo grado*. *Clases 1-2-3*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Superior Pedagógico Silverio Blanco. Sancti Spíritus. Cuba.

223. Ministerio de Educación de Cuba (2004e). *Video-clases. Matemática décimo grado*. *Clases 8-11-12*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Superior Pedagógico Silverio Blanco. Sancti Spíritus. Cuba.

224. Ministerio de Educación de Cuba (2004f). *Video-clases. Matemática duodécimo grado*. *Clases 1-2-4*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Superior Pedagógico Silverio Blanco. Sancti Spíritus. Cuba.

225. Ministerio de Educación de Cuba (2004g). *Video-clases. Matemática décimo grado. Clases 26-27-28*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Superior Pedagógico Silverio Blanco. Sancti Spíritus. Cuba.

226. Ministerio de Educación de Cuba (2004h). *Guía para el profesor. TV Educativa*. La Habana: Pueblo y Educación.

227. Ministerio de Educación de Cuba (2004i). Programa de Matemática de octavo grado. En, *Programas de octavo grado. Secundaria básica* (pp. 2-37). La Habana: Pueblo y Educación.

228. Ministerio de Educación de Cuba (2004j). Programa de Matemática de noveno grado. En, *Programas de noveno grado. Secundaria básica* (pp. 2-35). La Habana: Pueblo y Educación.

229. Ministerio de Educación de Cuba (2004k). *Orientaciones para llenar la "guía de observación de las clases de video y de las teleclases* [versión electrónica]. No publicado. La Habana.

230. Ministerio de Educación de Cuba (2005a). *Programas Décimo grado de la Educación Preuniversitaria y primer año de la Educación Técnica y Profesional* [versión electrónica]. La Habana.

231. Ministerio de Educación de Cuba (2005b). *Programa de Matemática undécimo grado y segundo año de la ETP* [versión electrónica]. La Habana.

232. Ministerio de Educación de Cuba (2005c). *Programas de Matemática duodécimo grado* [versión electrónica]. La Habana.

233. Ministerio de Educación de Cuba (2006). *Estrategia para la enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática* [versión electrónica]. La Habana.

234. Ministerio de Educación de Cuba (2006a). *Documento de trabajo del director de preuniversitario* [versión electrónica]. La Habana.

235. Ministerio de Educación de Cuba (2007, septiembre). *Proyecto de documento sobre las líneas directrices y competencias en la asignatura Matemática.* [versión electrónica]. La Habana.

236. Montes de Oca, N. & Machado, E. (2006). La formación y desarrollo de habilidades en el proceso docente-educativo. Recuperado de http://www.monografias.com/trabajos15/habilidades-docentes/habilidades-docentes.shtml

237. Moraes, E. (2001). Reflexiones acerca del concepto de integración. En S. Picaroni (Ed.), *Las redes conceptuales en la integración de conocimientos*. Montevideo. Recuperado de http://www.anep.edu.ug/gerenciagrl/areas_inte/areas_pdf/2001

238. Müller, H. (1984). *Inferencias y demostraciones en la enseñanza de la Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

239. Mullis, A. y otros (2002). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Madrid: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Recuperado de http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm

240. Muñoz, F. y otros (1991). *Matemática noveno grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

241. Muñoz, F., Agüero, J., López, E., Guerra, M. & Marrero, J. G. (1989). *Matemática. Séptimo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

242. Muñoz, F., Agüero, J., Montes de Oca, E., Arias, D. & López, E. (1990). *Matemática octavo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

243. Muñoz, J. M. y otros (2002). Evaluación docente vs. evaluación de la calidad. *RELIEVE*, *8 (2)*. Recuperado de http://www.uv.es/RELIEVE.

244. National Academy Press (2001). Contributions of measurement and statistical modeling to assessment. En, J.W. Pellegrino, N. Chudowsky, and Robert Glaser (Eds.), *knowing what students know: the science and design of educational assessment* (pp. 111-172). Recuperado el 8 de marzo de 2005, en http://www.nap.edu/catalog/10019.html

245. National Academy Press (2002). *¿Cómo aprende la gente?: cerebro, mente, experiencia, y escuela. Capítulo I*. (T. Nelson Oviedo, trad.). Recuperado el 24 de junio de 2004, en http://www.eduteka.org/

246. National Academy Press (2004a). *How people learn? Brain, mind, experience, and school.* Washington. Recuperado el 22 de septiembre de 2004, en http://www.National Academy Press.edu/catalog/

247. National Academy Press (2004b). *How students learn mathematics in the classroom. Washington. USA.* Recuperado el 8 de marzo de 2005, en http://books.National Academy Press.edu/catalog/11101.html.

248. National Academy Press (2004c). Saber qué saben los estudiantes: la ciencia y el diseño de la evaluación educativa. *Resumen ejecutivo del libro* "*Knowing what students know: the science and design of educational assessment*" (T. Nelson Oviedo, trad.). Recuperado de http://www.eduteka.org/

249. National Council for Teacher of Mathematics (2000a). *Executive Summary. Principles and Standards for School Mathematics*. Recuperado de http://standards.nctm.org

250. National Council for Teacher of Mathematics (2000b). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA. Recuperado de http://standards.nctm.org/

251. Nieves, M. L. (1994). *El diagnóstico como proceso de evaluación-intervención: nueva concepción*. No publicado. Ministerio de Educación. La Habana. Cuba.

252. Nogales, F. V. (2003). Estrategias Educativas. *Quaderns Digitals*. Centre d'Estudis Vall de Segó. Valencia. España. Recuperado el 5 de julio de 2006, en http://www.quadernsdigitals.net/

253. OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación*. España: Santillana.

254. Omelianovsky, M. E. y otros (1985). *La dialéctica y los métodos científicos generales de investigación*. *Tomo I*. La Habana: Ciencias Sociales.

255. Ossa, M. (2003). Pautas para citar textos y hacer listas de referencias según las normas de la American Psychological Association. *EMA*, *8 (3)*, 335-349. Colombia.

256. Pehkonen, E. & Furinghetti, F. (2001). Problems on the use of the concepts “belief” and “conception”. En R. Soro (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs X, Proceedings of the MAVI-10 European Workshop* (pp.7-16). University of Turku, Department of Teacher Education.

257. Peltier, M.-L. (1993). Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia. *Educación Matemática, 5 (2)*, 4-10. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

258. Pérez, A. (1998). Los procesos de enseñanza-aprendizaje: análisis didáctico de las principales teorías del aprendizaje. En J. Gimeno & A. Pérez, *Comprender y transformar la enseñanza* (pp. 34-62). Madrid: Morata.

259. Pérez, L. (1997). *La evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje*. México: La Academia.

260. Pérez, L. y otros (2004). *La personalidad: su diagnóstico y su desarrollo*. La Habana: Pueblo y Educación.

261. Pérez, O. (2005). Los modelos estadísticos en las investigaciones educativas. En, *Memorias del Evento Pedagogía 2005* (pp. 22-139). La Habana.

262. Pérez, O. (2006, julio) ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? *Relime*, *9 (2)*, 267-297.

263. Pérez, O. (2007). Esquema conceptual, referencial y operativo sobre los modelos estadísticos en las investigaciones educativas. En, *Cursos del Evento Pedagogía 2007*. Curso 87. La Habana: Órgano Editor Educación Cubana.

264. Pérez, R. (1994). *El currículo y sus componentes*. Recuperado del sitio Web del Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad Central de Las Villas [versión electrónica]. *http://www.fed.uclv.edu.cu/ceed/pages/BibliotecaVirtual/Libros*

265. Pérez, G., García, G., Nocedo, I. & García, M. L. (1996). *Metodología de la investigación educacional*. *Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.

266. Petrovsky, A. V. (sf). *Psicología pedagógica y de las edades*. La Habana: Pueblo y Educación.

267. Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

268. Pitzsch, G. y otros (1982). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 3*. La Habana: Pueblo y Educación.

269. Poggioli, L. (2005). *Estrategias cognoscitivas: una perspectiva teórica*. Caracas. Venezuela**.** Recuperado de *http://200.74.229.60/poggioli/poggioli.htm*

270. Pozo, J. I. (1998). El aprendizaje y la enseñanza de hechos y conceptos. En P. Gil (Ed.), *Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes* (pp. 19-79). España: Santillana.

271. Puig, L. (1997). *La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Valencia. España. Recuperado de http://www.uv.es/~didmat/luis/textos.htm

272. Puig, L. (1997). *Signos, textos y sistemas matemáticos de signos*. España. Universidad de Valencia. Valencia. España. Recuperado de http://www.uv.es/~didmat/luis/textos.htm

273. Puig, L. (2000). Análisis fenomenológico. En G. Castrillón (Ed.), *Ingeniería didáctica* (pp. 192-224) [versión electrónica]. Santiago de Cali. Colombia. (Trabajo original publicado en 1997).

274. Puig, S. (2003). *La medición de la eficiencia del aprendizaje de los alumnos. Una aproximación a los niveles de desempeño cognitivo* [versión electrónica]. No publicado. ICCP. La Habana. Cuba.

275. Ramírez, L. A. & Toledo, A. M. (2005). *Algunas consideraciones acerca del método de evaluación utilizando el criterio de expertos*. Recuperado de http://www.ilustrados.com

276. Ramos, A. B. & Font, V. (2004). *Creencias y concepciones del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. España. Recuperado de http://www/vfont@d5.ub.es

277. RAND (2003). *Mathematical proficiency for all students*. Santa Mónica. USA. Recuperado de http://www.rand.org/

278. Rangel, Y. L. (2002). *Dirección del aprendizaje y desarrollo profesional*. Sancti Spíritus. Cuba: Luminaria.

279. Ravitch, D. (1996). *Estándares nacionales en educación. Versión resumida de Nancy Morrison* (V. Knapp, trad). Chile. (Trabajo original publicado en 1995).

280. Real Academia Española (2006). Integración. En, *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición*. Recuperado el 8 de marzo de 2006, en http://www.rae.es/

281. Rebollar, A. (2000). *Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Santiago de Cuba.

282. Remedios, J. M. & Hernández, T. (2005). Desempeño y evaluación de los docentes desde los modos de actuación profesional. En, *Memorias del Evento Pedagogía 2005*. La Habana.

283. Rico, L. (1995a). Didáctica de la Matemática como campo de problemas. Las Palmas. Recuperado de http://www.ugr.es/~dpto_did/

284. Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una Empresa Docente. Recuperado de http://www.ugr.es/~dpto_did/

285. Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículum de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

286. Rico, L. (1997b). *Didáctica de la Matemática en el bachillerato. Aprendizaje de la Matemática*. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~dpto_did/

287. Rico, L. (1999). *Educación Matemática, investigación y calidad*. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~dpto_did/

288. Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 180-194). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~dpto_did/

289. Rico, L., Castro, E. & Romero, I. (1997). *Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas*. Recuperado de http://www.ugr.es/~dpto_did/

290. Rico, L. & Sierra, M. (1999). *Didáctica de la Matemática e investigación*. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~dpto_did/

291. Rico, P & Silvestre, M. (2002). Proceso de enseñanza-aprendizaje. En G. García Batista (Ed.), *Compendio de Pedagogía* (pp. 68-79). La Habana: Pueblo y Educación.

292. Rico, P. & Silvestre, M. (2001). Hacia la remodelación del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Ciencias Pedagógicas*, *2 (1)*. Recuperado el 9 de junio de 2006, en http://cied.rimed.cu/revista/21/portada/laportada2r1.html

293. Rizo, C. y otros (1990a). *Matemática 6*. La Habana: Pueblo y Educación.

294. Rizo, C., García, G., Lorenzo, L., García, M. & Suárez, C. (1990b). *Matemática 5*. La Habana: Pueblo y Educación.

295. Rodríguez, M. & Bermúdez, R. (1996). *La personalidad del adolescente*. La Habana: Pueblo y Educación.

296. Rojo, M. (2002). *Acerca del conocimiento*. No publicado. Material para el uso en la Maestría en Ciencias de la Educación. UH-CELAEE. La Habana. Cuba.

297. Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent & M. Sierra (Eds.), *Actas del Cuarto Simposio de la Sociedad Española de investigación en Educación Matemática* (pp. 35-46). Huelva. España. Recuperado de http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm

298. Rosental, M. & Iudin, P. (1981). *Diccionario filosófico*. La Habana: Editora Política.

299. Rubinstein (1977). *Principios de psicología general*. La Habana: Pueblo y Educación.

300. Ruiz, A. M. (2003). *Procedimiento didáctico para el diseño de la integración de conocimientos matemáticos en décimo grado*. Tesis en opción al título de Master en Didáctica de la Matemática. No publicada. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín. Cuba.

301. Ruiz, A. M. (2005). *Software para la aplicación del procedimiento de comparación por pares en la investigación pedagógica* [versión electrónica]. No publicado. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.

302. Ruiz, A. M. (2006). Procedimientos y medios para relacionar constructos, dimensiones, indicadores y medición en la investigación pedagógica (curso post-evento). En A. Chinea, J. Medina & I., Cabezas (Eds.), *Actas del Evento Provincial Pedagogía 2007*. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus. Cuba.

303. Ruiz, A. M. y otros (2004). *Metodología para evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario*. Resultado del proyecto de investigación Mapren-Pre. No publicado. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.

304. Ruiz, A. M. y otros (2005). *Caracterización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los preuniversitarios de la provincia Sancti Spíritus*. Resultado del proyecto de investigación Mapren-Pre. No publicado. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.

305. Ruiz, J. C., Algarabel, S., Dasí, C. & Bitarque, A. (1998). El papel de los diagramas en la organización del conocimiento: evidencia desde el pathfinder y el escalamiento multidimensional. *Psicológica (19)*, 367-386. Valencia. España. Recuperado de http://www.uv.es/psicologica/articulos3.98/ruiz.pdf.

306. Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas & J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 47-62). Almería. España. Recuperado el 9 de junio de 2006, en http://www.uco.es/informacion/webs/seiem/Pub-actas.html

307. Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa* 4 (*1*). México. Recuperado de http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contents-amestoy.html

308. Santana, H. (1998). *La evaluación del aprendizaje de la Matemática*. Material para el Diplomado en Educación Matemática. No publicado. ISP Enrique José Varona. La Habana.

309. Schoenfeld, A. H. (2000). Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática (J. D.Godino, trad.). Universidad de Granada. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino. (Trabajo original publicado en *Notices of the AMS*, *47 (6),* en el año 2000).

310. Schwank, I., Gelfman, E. & Nardi, E. (1999). Mathematical thinking and learning as cognitive processes. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education. Tomo II* [version electrónica] (pp. 16-22). Recuperado de http://fractus.mat.uson.mx/Papers/#locales

311. Seago, N. M. (2004). Using video of classroom practice as a tool to study and improve teaching. En National Academy Press (Ed.), *Mathematics Education in the Middle Grades* (pp. 63-75). National Academy Press. Washington. USA. Recuperado el 22 de septiembre de 2004, en http://www.National Academy Press.edu

312. Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 13-57.

313. Sfard, A. y otros (1997). Learning mathematics through conversation: is it as good as they say?. Third International Conference of History, Philosophy and Science Teaching. Canadá.

314. Sfard, A. (1998). Balancing the unbalanceable: the NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics. Paper to be presented at the Conference on the Foundations to NCTM Standards. Georgia. Atlanta. Recuperado de http://www.msu.edu/~sfard

315. Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being -or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Coob, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizin and communicating in mathematics classrooms* (pp. 38-75). London: Lawrence Erlbaum.

316. Shuare, M. (1990). *La psicología soviética tal como yo la veo*. Moscú: Progreso.

317. Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologías de las matemáticas y de la Educación Matemática (Juan D. Godino, trad.). En A. J. Bishop y otros (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

318. Sierra, R. A. (2002). Modelación y estrategia: algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. En G. García Batista (Ed.), *compendio de pedagogía* (pp. 311- 328). La Habana: Pueblo y Educación.

319. Sierra, R. A. (2004). *Modelo teórico para el diseño de una estrategia pedagógica en la educación primaria y secundaria*. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. No publicada. La Habana.

320. Sierra, T. & Gascón, J. (2002). Organizaciones matemáticas para el diseño de un proceso de estudio en torno a la numeración. *Boletín SI-IDM, 14*. Castellón. Recuperado en http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/

321. Sigarreta, J. M. (2001). *Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.

322. Sigarreta, J. M. & Laborde, J. M. (2005). Modelo didáctico para la formación axiológica a través de la resolución de problemas matemáticos. *Matemática, Educación e Internet*. Recuperado el 27 de abril de 2006, en http://www.itcr.ac.crjrevistamater.

323. Silvestre, M. & Rizo, C. (2001). Aprendizaje y diagnóstico. En, *Seminario Nacional para el Personal Docente* (pp. 2-5). La Habana: Pueblo y Educación.

324. Silvestre, M. & Zilberstein, J. (2002). *Hacia una didáctica desarrolladora*. La Habana: Pueblo y Educación.

325. Sociedad Latinoamericana para la Calidad (2000). *Herramientas de priorización: tomar decisiones entre distintas opciones*. Recuperado el 9 de junio de 2006, en http://www.ongconcalidad.org

326. Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). Didactical Complexity of Computational Environments for the Learning of Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 4*, 1–26. Netherlands.

327. Talízina, N. F. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Moscú: Progreso.

328. Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández, A. & Rico, L. (2003). Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en Educación Matemática (1976-1998). *RELIEVE, 10 (1)*. España.

329. Torres, P. (1994). La didáctica de los matemáticos en la escuela cubana actual: origen, fundamentos, estructura y proyecciones. *Educación Matemática, 6 (3)*, 82-89. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

330. Torres, P. (2000a). *La instrucción heurística de la Matemática Escolar* [versión electrónica]. No publicado. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. La Habana.

331. Torres, P. (2000b). *La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI*: *logros y retos*. ISPEJV. La Habana: Impresión Ligera.

332. Torres, P. (2004). ¡Tutor!… ¿qué hago para redactar? *Ciencias Pedagógicas, 5 (3)*. Recuperado el 9 de junio de 2006, en http://cied.rimed.cu/revista/53/portada/revista_53.htm

333. Torres, P y otros (1999). Estrategia de trabajo para el mejoramiento del aprendizaje de la Matemática en los preuniversitarios habaneros. En, *Actas del Congreso Pedagogía '99*. La Habana.

334. Turner, M. (2005). Mathematics and narrative. Recuperado el 17 de julio de 2007 de http://www.thalesandfriends.org/en/papers/pdf/turner_paper.pdf

335. Valdés, H. (1999). *La evaluación del desempeño profesional del docente* [versión electrónica]. La Habana. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Cuba.

336. Valdés, H. (2004). Indicadores e índices. *Ciencias Pedagógicas, 5 (3).* Recuperado el 9 de junio de 2006, en http://cied.rimed.cu/revista/53/portada/revista_53.htm

337. Valdés, H. (2007). Docimología: de la Teoría Clásica del Test a la Teoría de Respuesta al Ítem. En, *Cursos del Evento Pedagogía 2007*. Curso 10. La Habana: Órgano Editor Educación Cubana.

338. Valdés, H., Pérez, F. & Pérez, F. (2003). *Tecnología para la determinación de indicadores para evaluar la calidad de un sistema educativo* [versión electrónica]. No publicado. ICCP. Ministerio de Educación. Cuba.

339. Valdés, H. & Torres, P. (2005). El diagnóstico pedagógico y la evaluación de la calidad de la educación. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (pp. 9-11). La Habana: Pueblo y Educación.

340. Valle, A. D. (2007, en prensa). *Metamodelos de la investigación pedagógica* [versión electrónica]. ICCP. La Habana.

341. Vallecillos, A. (2001). Cuestiones metodológicas en la investigación educativa. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas & J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-131). Almería. España.

342. Vecino, F. (2000). *Recomendaciones metodológicas para la elaboración de las tesis de doctor en ciencias de determinada especialidad* [versión electrónica]. Instrucción ministerial. La Habana.

343. Vecino, F. (2001). *Normas para la redacción y presentación de las tesis de doctor en ciencias de determinada especialidad* [versión electrónica]. Instrucción ministerial. La Habana.

344. Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10 (2)*, 133-170.

345. Vigotski, L.S. (1978). *Mind in Society. The development of higher psychological proceses*. Harvard University Press.

346. Vigotski, L. S. (1981). *Pensamiento y lenguaje*. La Habana: Edición Revolucionaria.

347. Vigotski, L. (1989a). Pensamiento y lenguaje. En Y. Guippenréiter (Ed.), *El proceso de formación de la psicología marxista* (pp. 164-209). Moscú: Progreso.

348. Vigotski, L. (1989b). El problema de la enseñanza y del desarrollo mental en la edad escolar. En Y. Guippenréiter (Ed.), *El proceso de formación de la psicología marxista* (pp. 210-220). Moscú: Progreso.

349. Vigotski, L. (1989c). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. En Y. Guippenréiter (Ed.), *El proceso de formación de la psicología marxista* (pp. 87-155). Moscú: Progreso.

350. Vigotski, L. S. (1989d). *Obras completas*. Tomo V. La Habana: Pueblo y Educación.

351. Villavicencio, M. (2003). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de significado. *Cartilla No. 7*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e7

352. Villavicencio, M. (2004a). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de práctica reflexiva. *Cartilla No. 9*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e9

353. Villavicencio, M. (2004b). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de significación (relevancia). *Cartilla No. 11*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e11.

354. Villavicencio, M. (2004c). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de interacción social. *Cartilla No. 12*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e12.

355. Villavicencio, M. (2004d). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de interacción verbal/simbólica. *Cartilla No. 13*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e13/

356. Villavicencio, M. (2004e). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de un discurso bien definido. *Cartilla No. 14*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e14

357. Villavicencio, M.(2004f). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de pertenencia. *Cartilla No. 15*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e15

358. Villavicencio, M. (2004g). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de estructura. *Cartilla No. 8*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e8/

359. Villavicencio, M. (2004h). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de dificultad. *Cartilla No. 10*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e10

360. Villavicencio, M. (2004i, febrero). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de balance. *Cartilla No. 16*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e16

361. Villegas, E. & Placeres, L. (2004). El tratamiento de conceptos y definiciones: situación típica de la enseñanza de las ciencias. En M. Álvarez (Comp.), *Interdisciplinariedad: una aproximación desde la enseñanza-aprendizaje de las ciencias* (pp. 205-227). La Habana: Pueblo y Educación.

362. Wenzelburger, E. (1990). Curriculum and Evaluation Standars for School Mathemathics National Council for Teacher of Mathematics 1988. Reseña bibliográfica. *Educación Matemática*, *2 (1)*, 67-71. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

363. Zilberstein, J. (2000). Reflexiones acerca de qué es un resultado científico en la investigación educativa y qué vías son las más propicias para introducirlo. *Ciencias Pedagógicas, 1 (2).* Recuperado el 6 de octubre de 2006, en http://cied.rimed.cu/revista/12/portada/laportadaa1r2.html

364. Zilberstein, J. & Valdés, H. (2001). *Aprendizaje escolar, diagnóstico y calidad educativa*. Segunda edición. México: Ediciones CEIDE.

365. Zadu, I. (2004a). Indicadores e índices. Argentina. Recuperado de http://server2.southlink.com.ar/vap/INDICADORES.htm

366. Zadu, I. (2004b). El diseño de la investigación. Argentina. Recuperado de http://server2.southlink.com.ar/vap/DISENO%20DE%20LA%20INV.htm

367. Zadu, I. (2004c). El problema de la causalidad. Argentina. Recuperado de http://server2.southlink.com.ar/vap/DISENO%20DE%20LA%20INV.htm

368. Zaskis, R. (2001, marzo). Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Relime, 4 (1)*, 63-92. Recuperado el 19 de junio de 2006, en http://www.clame.org.mx/bdigital/relime/pdf/2001-4-1/4.pdf

Anexo 1

Encuesta

Compañero (a), con el objetivo de llevar adelante una investigación relacionada con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario, que se ejecuta como tesis de doctorado en Ciencias Pedagógicas, se necesita su colaboración en esta encuesta. Recabamos de usted la mayor objetividad posible, insistiéndole en que la encuesta tiene carácter anónimo y que la información suministrada sólo se utilizará con fines científicos.

Cuestionario.

1. Señale con un número natural del 1 al 5, según los criterios que se indican abajo, el grado de prioridad que le da a los siguientes aspectos cuando usted planifica una unidad:

   __ a) Ejercitación de los procedimientos matemáticos que serán objeto de evaluación en la prueba de ingreso a la Educación Superior.

   __ b) Elaboración de tareas dirigidas a la determinación de relaciones conceptuales por parte de los alumnos.

   __ c) Resolución de ejercicios y problemas como los que aparecen en la prueba de ingreso.

   __ d) Ejercitación de los procedimientos matemáticos estudiadas en grados precedentes donde los alumnos han demostrado tener dificultades.

   __ e) Análisis de la estructura del contenido del grado.

   __ f) Análisis de la estructura del contenido de grados precedentes que se trata nuevamente en el grado.

   1: nunca doy prioridad, 2: casi nunca doy prioridad, 3: a veces doy prioridad, 4: casi siempre doy prioridad, 5: siempre doy prioridad.

2. Marque con una “X” las afirmaciones que más se corresponden con su actuación en la planificación de tareas para la sistematización e integración de conocimientos:

   __ a) Uso de los ejercicios y esquemas que aparecen en el libro de texto y las video-clases.

   __ b) Análisis de la estructura del contenido cuyo estudio se profundiza en el grado y fue estudiado en grados precedentes.

   __ c) Análisis de la estructura del contenido del grado.

   __ d) Elaboración de nuevos ejercicios a partir de su experiencia.

   __ e) Elaboración de nuevos ejercicios a partir de un análisis de la estructura del contenido.

   __ f) Los ejercicios integradores se planifican para las últimas clases de la unidad.

Anexo 2

Guía de entrevista.

Objetivo.

Acopiar opiniones sobre el nivel de dominio que tienen los profesores de Matemática del preuniversitario acerca de la integración conceptual y de las vías para lograrla.

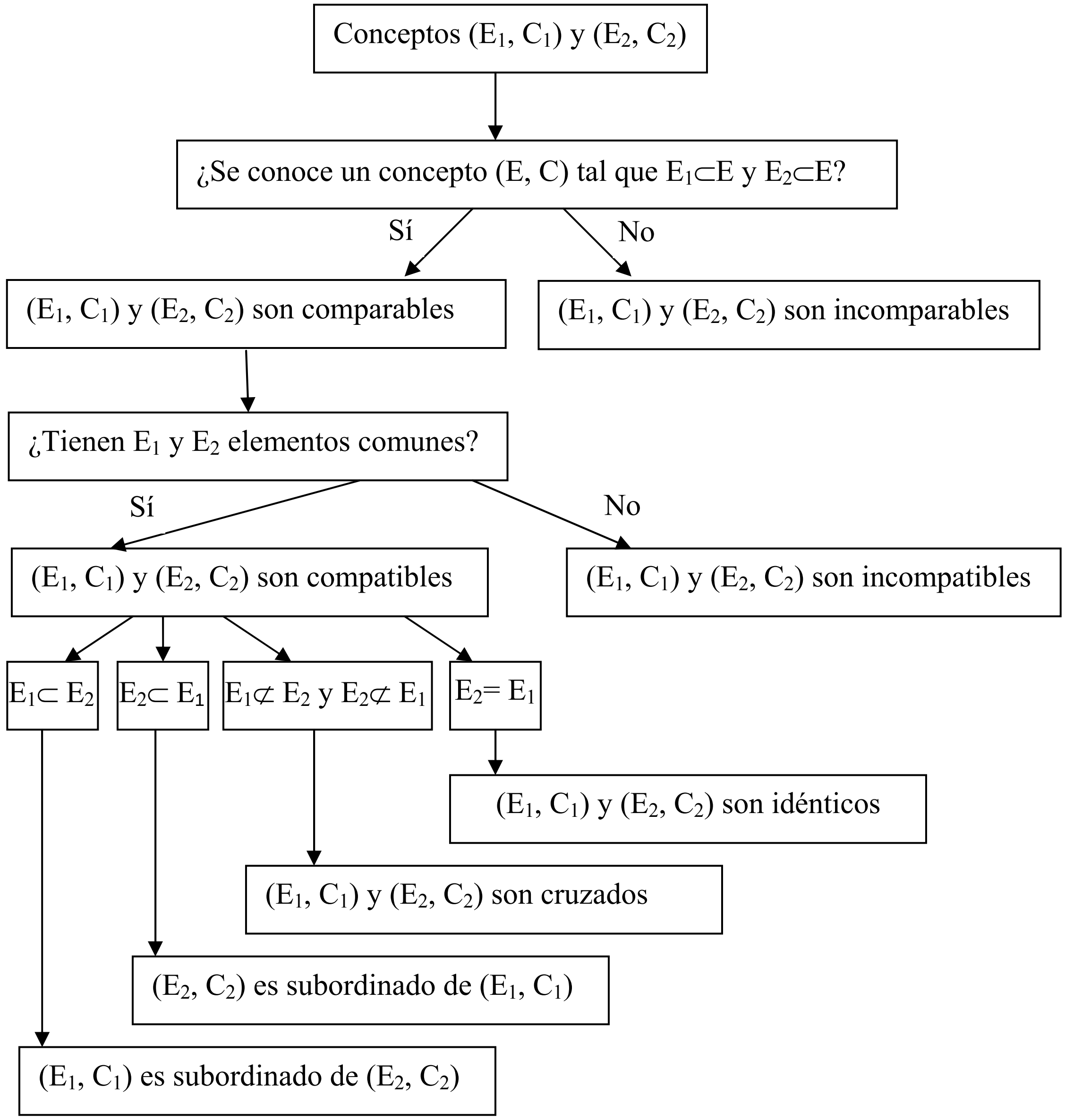
Preguntas a realizar.

1. ¿Qué frases utilizaría para referirse a la esencia de la integración conceptual?
2. ¿En qué momentos del desarrollo de una unidad considera que es factible el logro de la integración conceptual?
3. ¿Cómo procede para que sus alumnos integren conceptos matemáticos frecuentemente?
4. ¿Qué tipos de tareas considera como ejemplos típicos para lograr la integración de conceptos matemáticos?
5. ¿Qué factores lo limitan para lograr la integración de conceptos matemáticos en sus alumnos?

Anexo 3: Publicaciones y trabajos presentados en eventos científicos relativos al tema.

Título del trabajo	Categoría	Revista, sitio Web o evento	Lugar y fecha
Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. Análisis de un libro de texto.	Artículo	Revista Números	Islas Canarias, en prensa
Modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en la Educación Preuniversitaria.	Artículo	Boletín de la Sociedad Nacional de Matemática y Computación (SCMC)	Holguín, 2007
Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos.	Artículo	Revista Números, No. 67, julio de 2007	Islas Canarias
Mapas relativos a los conceptos como medios para facilitar estrategias de organización y elaboración.	Ponencia	XXXIX Congreso de la SMM	Tabasco, México, 2006
Bases teóricas para facilitar el trabajo didáctico en función de lograr una mayor integración del conocimiento de los alumnos.	Ensayo	Sitio Web del Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad Central de Las Villas	Santa Clara, 2006
La integración del concepto de función lineal con el concepto de movimiento en el preuniversitario: aspiración y realidad.	Artículo	Revista Pedagogía y Sociedad, No. 13	Sancti Spíritus, 2005
La integración del concepto de función lineal con el concepto de movimiento en el preuniversitario.	Artículo	Boletín de la SCMC	La Habana, 2005
La integración del concepto de función lineal con el concepto de movimiento en el preuniversitario.	Ponencia	Compumat 2005	La Habana, 2005
La gestión de la integración de conocimientos en torno al concepto de razón entre longitudes.	Ponencia	Tercer Compumat de las Provincias Centrales.	Santa Clara, 2004
Procedimiento didáctico para el diseño de la integración de conocimientos matemáticos en el preuniversitario.	Artículo	Boletín de la SCMC	Sancti Spíritus, 2003
Procedimiento didáctico para el diseño de la integración de conocimientos matemáticos en el preuniversitario.	Ponencia	Compumat 2003	Sancti Spíritus, 2003
La formación, desarrollo y generalización de conceptos y la integración conceptual.	Curso	Compumat 2003	Sancti Spíritus, 2003

Anexo 4



Relaciones conceptuales clásicas.

Anexo 5

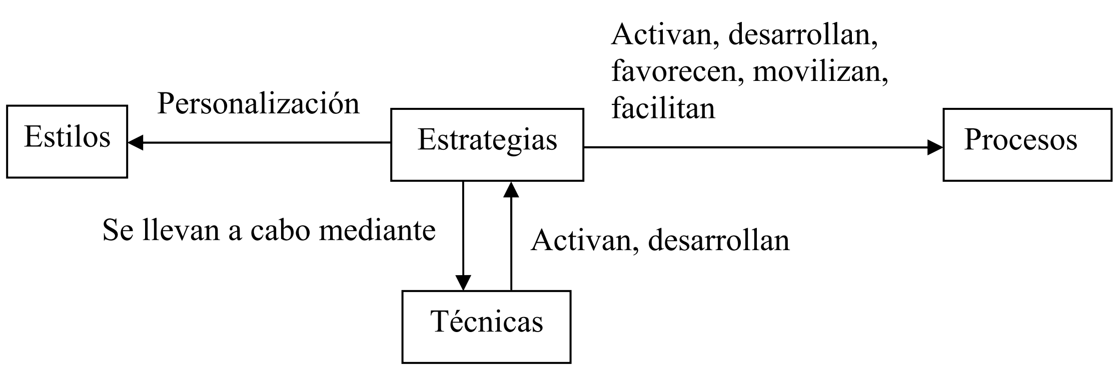
Directrices de los conocimientos matemáticos, y las habilidades y hábitos asociados		
Relativas a las formas del conocimiento	Relativas a las relaciones	Relativas al conocimiento matemático específico
1. Preguntas y problemas. 2. Conceptos y operaciones conceptuales. 3. Proposiciones. 4. Razonamientos. 5. Procedimientos.	1. Comunicación. 2. Representaciones. 3. Conexiones.	1. Números y conjuntos. 2. Magnitudes. 3. La variable como número general. 4. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas. 5. Relaciones y funciones. 6. Geometría-trigonometría. 7. Estadística, combinatoria y probabilidad.

Anexo 6

Los procesos del aprendizaje según diferentes autores (Beltrán, 1998: 44)

<table>
<tr><th>Gagné</th><th>Cook-Mayer</th><th colspan="2">Tomas y Rohwer</th><th>Shuell</th><th>Beltrán</th></tr>
<tr><td>Expectativas</td><td>Selección</td><td rowspan="5">Cognitivos</td><td>Selección</td><td>Expectativas</td><td>Sensibilización</td></tr>
<tr><td>Atención</td><td>Adquisición</td><td>Comprensión</td><td>Atención</td><td>Atención</td></tr>
<tr><td>Codificación</td><td>Construcción</td><td>Memoria</td><td>Codificación</td><td>Adquisición</td></tr>
<tr><td>Almacenamiento</td><td rowspan="6">Integración</td><td>Recuperación</td><td>Comparación</td><td>Personalización y control</td></tr>
<tr><td>Recuperación</td><td>Integración</td><td>Generación de hipótesis</td><td>Recuperación</td></tr>
<tr><td>Transfer</td><td rowspan="4">Autocontrol</td><td>Control del tiempo</td><td>Repetición-práctica</td><td>Transfer</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td>Control del esfuerzo</td><td>Feedback (retroalimentación)</td><td rowspan="3">Evaluación</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Refuerzo</td><td rowspan="2">Control volitivo</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Combinación-integración-síntesis</td></tr>
</table>

Anexo 7



Relaciones entre estilos, estrategias, técnicas y procesos del aprendizaje.

Anexo 8

Tipos de mapas de extensiones		
Relaciones que representan	Número de conceptos involucrados	
	Dos	Más de dos
Conjuntistas	I	III
Conjuntistas y de cardinalidad	II	IV

Anexo 9

Ejemplo de conversión de proposiciones sobre relaciones conceptuales en proposiciones sobre relaciones entre conjuntos.	
Proposiciones sobre conceptos	Proposiciones sobre conjuntos
Existen triángulos rectángulos que no son escalenos.	Existen elementos de TR que no pertenecen a TE.
Existen triángulos escalenos que no son triángulos rectángulos.	Existen elementos de TE que no pertenecen a TR.
Existen triángulos rectángulos que son escalenos.	Existen elementos que pertenecen tanto a TR como a TE.

Anexo 10

Tipos de juicios que expresan las proposiciones necesarias para construir mapas de extensiones de dos conceptos.			
Proposición	Tipo de juicio	Proposición	Tipo de juicio
pa_1	Universal negativo (E)	pb_3	Particular afirmativo (I)
pa_2	Universal negativo (E)	pb_4	Particular afirmativo (I)
pb_1 (pc_1)	Particular negativo (O)	pc_2 (pe_1)	Universal afirmativo (A)
pb_2 (pd_1)	Particular negativo (O)	pd_2 (pe_2)	Universal afirmativo (A)

Anexo 11

Relaciones entre las proposiciones necesarias para construir mapas de extensiones de dos conceptos.												
Prop.	a		b				c		d		e	
	pa1	pa2	pb1	pb2	pb3	pb4	pc1	pc2	pd1	pd2	pe1	pe2
pa1	=	⇔	⇒	⇒	C	C	⇒	C	⇒	C	C	C
pa2	⇔	=	⇒	⇒	C	C	⇒	C	⇒	C	C	C
pb1	ND	ND	=	ND	ND	ND	=	ND	ND	C	ND	C
pb2	ND	ND	ND	=	ND	ND	ND	C	=	ND	C	ND
pb3	C	C	ND	ND	=	⇔	ND	ND	ND	ND	ND	ND
pb4	C	C	ND	ND	⇔	=	ND	ND	ND	ND	ND	ND
pc1	ND	ND	=	ND	ND	ND	=	ND	ND	C	ND	C
pc2	C	C	ND	C	⇒	⇒	ND	=	C	ND	=	ND
pd1	ND	ND	ND	=	ND	ND	ND	C	=	ND	C	ND
pd2	C	C	C	ND	⇒	⇒	C	ND	ND	=	ND	=
pe1	C	C	ND	C	⇒	⇒	ND	=	C	ND	=	ND
pe2	C	C	C	ND	⇒	⇒	C	ND	ND	=	ND	=

Anexo 12

Mapas de extensiones correspondientes a cada proposición					
Proposición	Casos posibles	Proposición	Casos posibles	Proposición	Casos posibles
pa1 (pa2)	a	pc2 (pe1)	c y e	pb1 (pc1)	a, b y c
		pd2 (pe2)	d y e	pb2 (pd1)	a, b y d
				pb3 (pb4)	b, c y d

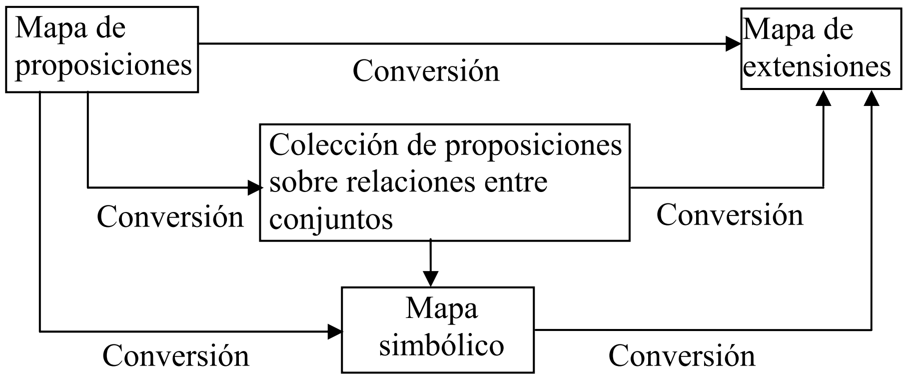
Anexo 13

Mapas simbólicos relativos a los mapas de extensiones de la figura 2.			
Mapa de extensiones	Mapa simbólico con el uso de:		
	La intersección	La diferencia	La inclusión
a	$E_1 \cap E_2 = \varnothing$	$E_1 \backslash E_2 = E_1$ ($E_2 \backslash E_1 = E_2$)	
b	$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, $E_1 \cap E_2 \neq E_1$ y $E_1 \cap E_2 \neq E_2$	$\varnothing \neq E_1 \backslash E_2 \neq E_1$ y $E_2 \backslash E_1 \neq \varnothing$ ($E_1 \backslash E_2 \neq \varnothing$ y $\varnothing \neq E_2 \backslash E_1 \neq E_2$)	
c	$E_1 \cap E_2 = E_2$ y $E_1 \cap E_2 \neq E_1$	$E_1 \backslash E_2 \neq \varnothing$ y $E_2 \backslash E_1 = \varnothing$	$E_2 \subset E_1$ y $E_1 \not\subset E_2$
d	$E_1 \cap E_2 = E_1$ y $E_1 \cap E_2 \neq E_2$	$E_1 \backslash E_2 = \varnothing$ y $E_2 \backslash E_1 \neq \varnothing$	$E_1 \subset E_2$ y $E_2 \not\subset E_1$
e	$E_1 \cap E_2 = E_1$ y $E_1 \cap E_2 = E_2$	$E_1 \backslash E_2 = \varnothing$ y $E_2 \backslash E_1 = \varnothing$	$E_1 \subset E_2$ y $E_2 \subset E_1$

Anexo 14

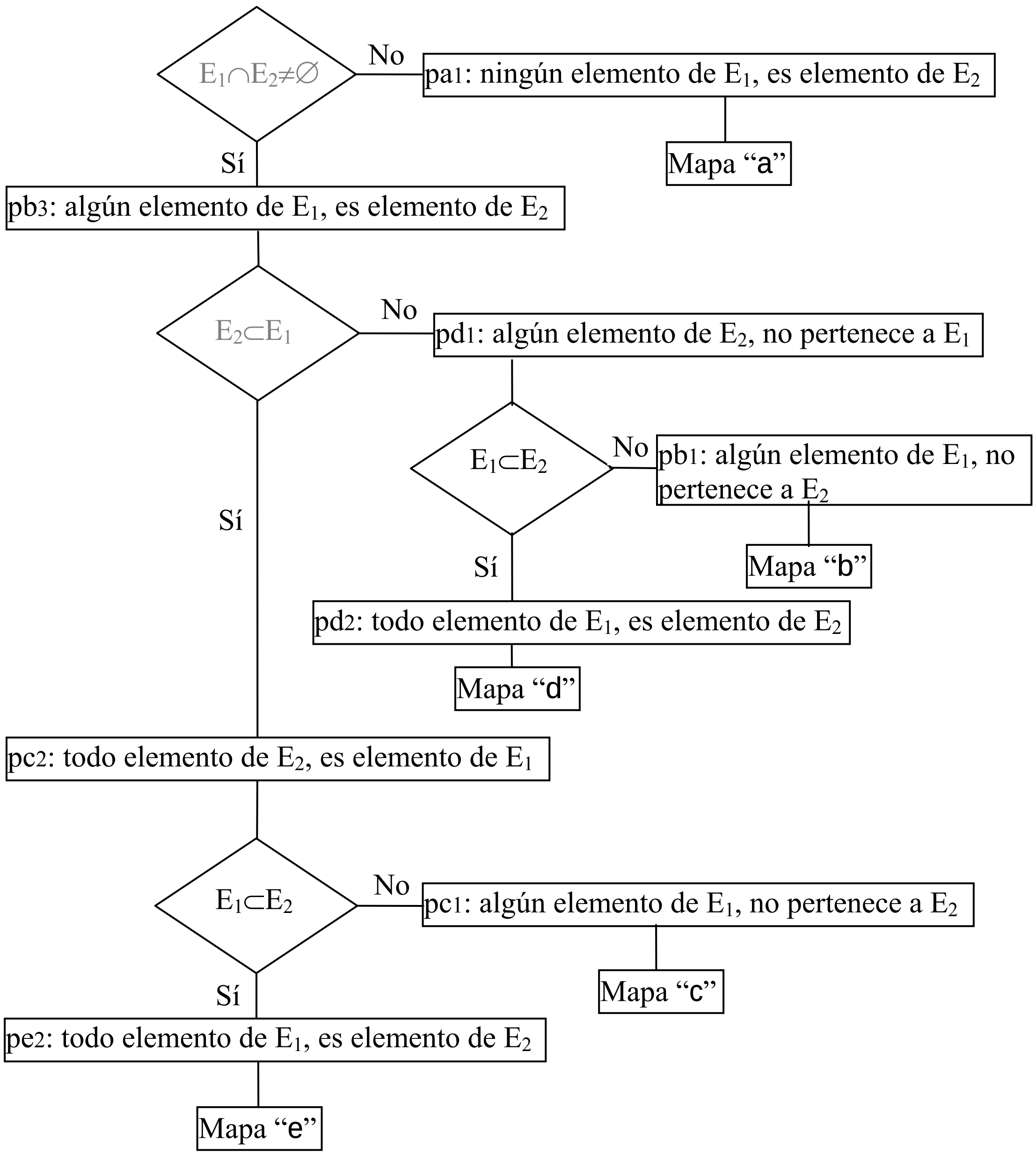
Expresiones simbólicas correspondientes a proposiciones sobre conjuntos.				
Mapa de ext.	Proposiciones	Expresión con el uso del signo $\cap$	Expresión con el uso del signo $\backslash$	Expresión con el uso del signo $\subset$
a	pa1: ningún elemento de E_1, es elemento de E_2.	$E_1 \cap E_2 = \varnothing$	$E_1 \backslash E_2 = E_1$	
	pa2: ningún elemento de E_2, es elemento de E_1.	$E_2 \cap E_1 = \varnothing$	$E_2 \backslash E_1 = E_2$	
b	pb1: algún elemento de E_1, no pertenece a E_2.	$E_1 \cap E_2 \neq E_1$	$E_1 \backslash E_2 \neq \varnothing$	$E_1 \not\subset E_2$
	pb2: algún elemento de E_2, no pertenece a E_1.	$E_1 \cap E_2 \neq E_2$	$E_2 \backslash E_1 \neq \varnothing$	$E_2 \not\subset E_1$
	pb3: algún elemento de E_1, es elemento de E_2.	$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$	$E_1 \backslash E_2 \neq E_1$	
	pb4: algún elemento de E_2, es un elemento de E_1.	$E_2 \cap E_1 \neq \varnothing$	$E_2 \backslash E_1 \neq E_2$	
c	pc1: algún elemento de E_1, no pertenece a E_2.	$E_1 \cap E_2 \neq E_1$	$E_1 \backslash E_2 \neq \varnothing$	$E_1 \not\subset E_2$
	pc2: todo elemento de E_2, es elemento de E_1.	$E_1 \cap E_2 = E_2$	$E_2 \backslash E_1 = \varnothing$	$E_2 \subset E_1$
d	pd1: algún elemento de E_2, no pertenece a E_1.	$E_1 \cap E_2 \neq E_2$	$E_2 \backslash E_1 \neq \varnothing$	$E_2 \not\subset E_1$
	pd2: todo elemento de E_1, es elemento de E_2.	$E_1 \cap E_2 = E_1$	$E_1 \backslash E_2 = \varnothing$	$E_1 \subset E_2$
e	pe1: todo elemento de E_2, es elemento de E_1.	$E_1 \cap E_2 = E_2$	$E_2 \backslash E_1 = \varnothing$	$E_2 \subset E_1$
	pe2: todo elemento de E_1, es elemento de E_2.	$E_1 \cap E_2 = E_1$	$E_1 \backslash E_2 = \varnothing$	$E_1 \subset E_2$

Anexo 15



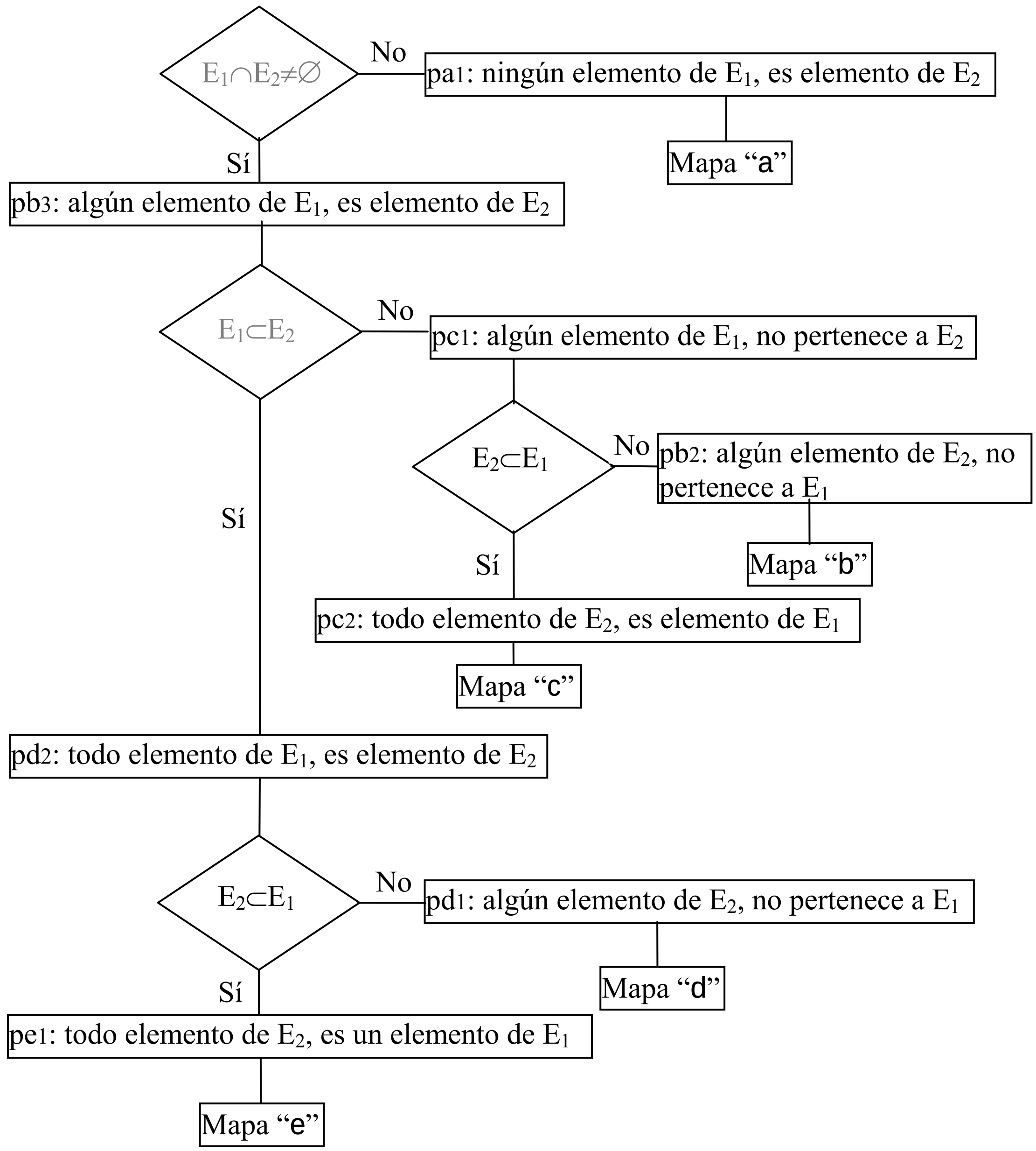
Conversión de un mapa de proposiciones en un mapa de extensiones.

Anexo 16



Interrelación entre preguntas, proposiciones y mapas de extensiones.

Anexo 17



Interrelación entre preguntas, proposiciones y mapas de extensiones.

Anexo 18

Colecciones de pares de conjuntos, cuyos cardinales se deben comparar para construir mapas de extensiones del tipo II		
Mapa	Alternativa	Comparaciones a realizar
a	1	E_1 y E_2
b	1	E_1 y E_2, E_1 y $E_1 \setminus E_2$, E_1 y $E_1 \cap E_2$
	2	E_1 y E_2, E_1 y $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \setminus E_2$ y $E_1 \cap E_2$
	3	E_1 y E_2, E_1 y $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ y $E_1 \cap E_2$
	4	E_1 y E_2, E_2 y $E_2 \setminus E_1$, E_2 y $E_1 \cap E_2$
	5	E_1 y E_2, E_2 y $E_2 \setminus E_1$, $E_2 \setminus E_1$ y $E_1 \cap E_2$
	6	E_1 y E_2, E_2 y $E_1 \cap E_2$, $E_2 \setminus E_1$ y $E_1 \cap E_2$
c	1	E_1 y E_2, E_2 y $E_1 \setminus E_2$
	2	E_1 y E_2, E_1 y $E_1 \setminus E_2$
d	1	E_1 y E_2, E_1 y $E_2 \setminus E_1$
	2	E_1 y E_2, E_2 y $E_2 \setminus E_1$

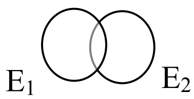
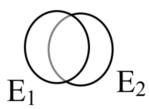
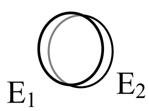
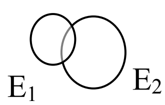
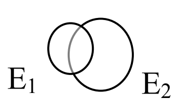
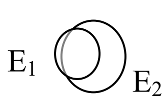
Anexo 19

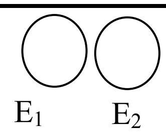
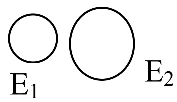
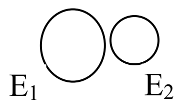
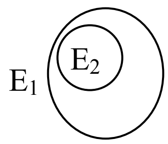
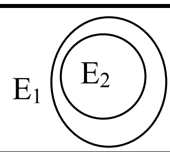
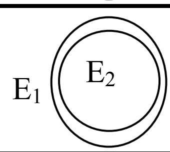
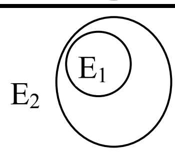
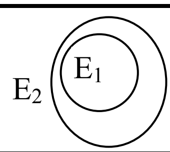
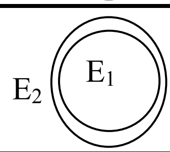
Proposiciones sobre relaciones de cardinalidad entre dos extensiones		
Not.	Representación	
	Conjuntista	Simbólica
pc1	En E_1 existen tantos elementos como en E_2.	card E_1=card E_2
pc2	El número de elementos de E_1 es menor que el de E_2.	card E_1<card E_2
pc3	El número de elementos de E_1 es mayor que el de E_2.	card E_1>card E_2
pc4	En E_1 existen tantos elementos como en $E_1\backslash E_2$.	card E_1=card $E_1\backslash E_2$
pc5	El número de elementos de E_1 es mayor que el de $E_1\backslash E_2$.	card E_1>card $E_1\backslash E_2$
pc6	En E_1 existen tantos elementos como en $E_2\backslash E_1$.	card E_1=card $E_2\backslash E_1$
pc7	El número de elementos de E_1 es menor que el de $E_2\backslash E_1$.	card E_1<card $E_2\backslash E_1$
pc8	El número de elementos de E_1 es mayor que el de $E_2\backslash E_1$.	card E_1>card $E_2\backslash E_1$
pc9	En E_1 existen tantos elementos como en $E_1\cap E_2$.	card E_1=card $E_1\cap E_2$
pc10	El número de elementos de E_1 es mayor que el de $E_1\cap E_2$.	card E_1>card $E_1\cap E_2$
pc11	En E_2 existen tantos elementos como en $E_1\backslash E_2$.	card E_2=card $E_1\backslash E_2$
pc12	El número de elementos de E_2 es menor que el de $E_1\backslash E_2$.	card E_2<card $E_1\backslash E_2$
pc13	El número de elementos de E_2 es mayor que el de $E_1\backslash E_2$.	card E_2>card $E_1\backslash E_2$
pc14	En E_2 existen tantos elementos como en $E_2\backslash E_1$.	card E_2=card $E_2\backslash E_1$
pc15	El número de elementos de E_2 es mayor que el de $E_2\backslash E_1$.	card E_2>card $E_2\backslash E_1$
pc16	En E_2 existen tantos elementos como en $E_1\cap E_2$.	card E_2=card $E_1\cap E_2$
pc17	El número de elementos de E_2 es mayor que el de $E_1\cap E_2$.	card E_2>card $E_1\cap E_2$
pc18	En $E_1\backslash E_2$ existen tantos elementos como en $E_1\cap E_2$.	card $E_1\backslash E_2$=card $E_1\cap E_2$
pc19	El número de elementos de $E_1\backslash E_2$ es menor que el de $E_1\cap E_2$.	card $E_1\backslash E_2$<card $E_1\cap E_2$
pc20	El número de elementos de $E_1\backslash E_2$ es mayor que el de $E_1\cap E_2$.	card $E_1\backslash E_2$>card $E_1\cap E_2$
pc21	En $E_2\backslash E_1$ existen tantos elementos como en $E_1\cap E_2$.	card $E_2\backslash E_1$=card $E_1\cap E_2$
pc22	El número de elementos de $E_2\backslash E_1$ es menor que el de $E_1\cap E_2$.	card $E_2\backslash E_1$<card $E_1\cap E_2$
pc23	El número de elementos de $E_2\backslash E_1$ es mayor que el de $E_1\cap E_2$.	card $E_2\backslash E_1$>card $E_1\cap E_2$

Anexo 20

Proposiciones sobre relaciones de cardinalidad		
Not.	Representación	
	Conjuntista	Simbólica
pc1	Existe una función biyectiva de E_1 en E_2.	card E_1=card E_2
pc2	No existe una biyección de E_1 en E_2, pero existe una de E_1 en un subconjunto propio de E_2	card E_1<card E_2
pc3	No existe una biyección de E_2 en E_1; pero existe una de E_2 en un subconjunto propio de E_1.	card E_1>card E_2
pc4	Existe una función biyectiva de E_1 en $E_1\backslash E_2$.	card E_1=card $E_1\backslash E_2$
pc5	No existe una biyección de $E_1\backslash E_2$ en E_1, pero existe una de $E_1\backslash E_2$ en un subconjunto propio de E_1.	card E_1>card $E_1\backslash E_2$
pc6	Existe una función biyectiva de E_1 en $E_2\backslash E_1$.	card E_1=card $E_2\backslash E_1$
pc7	No existe una biyección de E_1 en $E_2\backslash E_1$, pero existe una de E_1 en un subconjunto propio de $E_2\backslash E_1$.	card E_1<card $E_2\backslash E_1$
pc8	No existe una biyección de $E_2\backslash E_1$ en E_1, pero existe una de $E_2\backslash E_1$ en un subconjunto propio de E_1.	card E_1>card $E_2\backslash E_1$
pc9	Existe una función biyectiva de E_1 en $E_1\cap E_2$.	card E_1=card $E_1\cap E_2$
pc10	No existe una biyección de $E_1\cap E_2$ en E_1, pero existe una de $E_1\cap E_2$ en un subconjunto propio de E_1.	card E_1>card $E_1\cap E_2$
pc11	Existe una función biyectiva de E_2 en $E_1\backslash E_2$.	card E_2=card $E_1\backslash E_2$
pc12	No existe una biyección de E_2 en $E_1\backslash E_2$, pero existe una de E_2 en un subconjunto propio de $E_1\backslash E_2$.	card E_2<card $E_1\backslash E_2$
pc13	No existe una biyección de $E_1\backslash E_2$ en E_2, pero existe una de $E_1\backslash E_2$ en un subconjunto propio de E_2.	card E_2>card $E_1\backslash E_2$
pc14	Existe una función biyectiva de E_2 en $E_2\backslash E_1$.	card E_2=card $E_2\backslash E_1$
pc15	No existe una biyección de $E_2\backslash E_1$ en E_2, pero existe una de $E_2\backslash E_1$ en un subconjunto propio de E_2.	card E_2>card $E_2\backslash E_1$
pc16	Existe una función biyectiva de E_2 en $E_1\cap E_2$.	card E_2=card $E_1\cap E_2$
pc17	No existe una biyección de $E_1\cap E_2$ en E_2, pero existe una de $E_1\cap E_2$ en un subconjunto propio de E_2.	card E_2>card $E_1\cap E_2$
pc18	Existe una función biyectiva de $E_1\backslash E_2$ en $E_1\cap E_2$.	card $E_1\backslash E_2$=card $E_1\cap E_2$
pc19	No existe una biyección de $E_1\backslash E_2$ en $E_1\cap E_2$, pero existe una de $E_1\backslash E_2$ en un subconjunto propio de $E_1\cap E_2$.	card $E_1\backslash E_2$<card $E_1\cap E_2$
pc20	No existe una biyección de $E_1\cap E_2$ en $E_1\backslash E_2$, pero existe una de $E_1\cap E_2$ en un subconjunto propio $E_1\backslash E_2$.	card $E_1\backslash E_2$>card $E_1\cap E_2$
pc21	Existe una función biyectiva de $E_2\backslash E_1$ en $E_1\cap E_2$.	card $E_2\backslash E_1$=card $E_1\cap E_2$
pc22	No existe una biyección de $E_2\backslash E_1$ en $E_1\cap E_2$, pero existe una de $E_2\backslash E_1$ en un subconjunto propio de $E_1\cap E_2$.	card $E_2\backslash E_1$<card $E_1\cap E_2$
pc23	No existe una biyección de $E_1\cap E_2$ en $E_2\backslash E_1$, pero existe una de $E_1\cap E_2$ en un subconjunto propio de $E_2\backslash E_1$.	card $E_2\backslash E_1$>card $E_1\cap E_2$

Anexo 21

Mapas de extensiones del tipo II y colecciones de proposiciones sobre relaciones de cardinalidad correspondientes a mapas del tipo II			
Mapas de extensiones		Alternativa	Colecciones de proposiciones sobre relaciones de cardinalidad, según anexo 19
I	II		
b		1	pc1, pc4 y pc10
		2	pc1, pc4 y pc20
		3	pc1, pc10 y pc20
		4	pc1, pc14 y pc17
		5	pc1, pc14 y pc23
		6	pc1, pc17 y pc23
		1	pc1, pc4 y pc9
		2	pc1, pc4 y pc18
		3	pc1, pc9 y pc18
		4	pc1, pc14 y pc16
		5	pc1, pc14 y pc21
		6	pc1, pc16 y pc21
		1	pc1, pc5 y pc9
		2	pc1, pc5 y pc19
		3	pc1, pc9 y pc19
		4	pc1, pc15 y pc16
		5	pc1, pc15 y pc22
		6	pc1, pc16 y pc22
		1	pc2, pc4 y pc10
		2	pc2, pc4 y pc20
		3	pc2, pc10 y pc20
		4	pc2, pc14 y pc17
		5	pc2, pc14 y pc23
		6	pc2, pc17 y pc23
		1	pc2, pc4 y pc9
		2	pc2, pc4 y pc18
		3	pc2, pc9 y pc18
		4	pc2, pc14 y pc16
		5	pc2, pc14 y pc21
		6	pc2, pc16 y pc21
		1	pc2, pc5 y pc9
		2	pc2, pc5 y pc19
		3	pc2, pc9 y pc19
		4	pc2, pc15 y pc16
		5	pc2, pc15 y pc22
		6	pc2, pc16 y pc22

Mapas de extensiones del tipo II y colecciones de proposiciones sobre relaciones de cardinalidad correspondientes a mapas del tipo I			
Mapas de extensiones		Alternativa	Colecciones de proposiciones sobre relaciones de cardinalidad, según anexo 19
I	II		
a		1	pc1
		1	pc2
		1	pc3
c		1	pc3 y pc12
		2	pc3 y pc4
		1	pc1 y pc11
		2	pc1 y pc4
		1	pc1 y pc13
		2	pc1 y pc5
d		1	pc2 y pc7
		2	pc2 y pc14
		1	pc1 y pc6
		2	pc1 y pc14
		1	pc1 y pc6
		2	pc1 y pc15

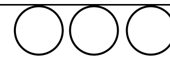
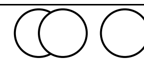
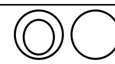
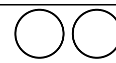
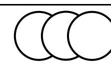
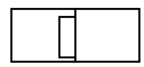
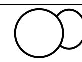
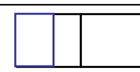
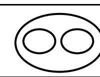
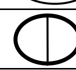
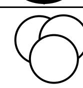
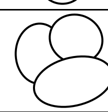
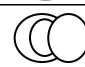
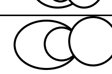
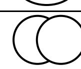
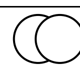
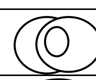
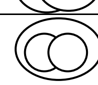
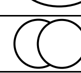
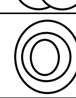
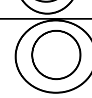
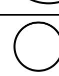
Anexo 22: casos probables para mapas de extensiones de tres conceptos

No.	E_1-E_2	E_2-E_3	E_1-E_3	No.	E_1-E_2	E_2-E_3	E_1-E_3	No.	E_1-E_2	E_2-E_3	E_1-E_3
1	a	a	a	43	b	d	c	85	d	b	e
2	a	a	b	***44***	***b***	***d***	***d***	***86***	***d***	***c***	***a***
3	a	a	c	45	b	d	e	***87***	***d***	***c***	***b***
4	a	a	d	46	b	e	a	88	d	c	c
5	a	a	e	47	b	e	b	89	d	c	d
6	a	b	a	48	b	e	c	90	d	c	e
7	***a***	***b***	***b***	49	b	e	d	91	d	d	a
8	a	b	c	50	b	e	e	92	d	d	b
9	a	b	d	51	c	a	a	93	d	d	c
10	a	b	e	52	c	a	b	94	d	d	d
11	a	c	a	***53***	***c***	***a***	***c***	95	d	d	e
12	a	c	b	54	c	a	d	96	d	e	a
13	a	c	c	55	c	a	e	97	d	e	b
14	a	c	d	56	c	b	a	98	d	e	c
15	a	c	e	***57***	***c***	***b***	***b***	99	d	e	d
16	a	d	a	***58***	***c***	***b***	***c***	100	d	e	e
17	a	d	b	59	c	b	d	101	e	a	a
18	a	d	c	60	c	b	e	102	e	a	b
19	***a***	***d***	***d***	61	c	c	a	103	e	a	c
20	a	d	e	62	c	c	b	104	e	a	d
21	a	e	a	63	c	c	c	105	e	a	e
22	a	e	b	64	c	c	d	106	e	b	a
23	a	e	c	65	c	c	e	107	e	b	b
24	a	e	d	66	c	d	a	108	e	b	c
25	a	e	e	***67***	***c***	***d***	***b***	109	e	b	d
26	b	a	a	68	c	d	c	110	e	b	e
27	***b***	***a***	***b***	69	c	d	d	111	e	c	a
28	b	a	c	70	c	d	e	112	e	c	b
29	b	a	d	71	c	e	a	113	e	c	c
30	b	a	e	72	c	e	b	114	e	c	d
31	***b***	***b***	***a***	73	c	e	c	115	e	c	e
32	***b***	***b***	***b***	74	c	e	d	116	e	d	a
33	***b***	***b***	***c***	75	c	e	e	117	e	d	b
34	***b***	***b***	***d***	76	d	a	a	118	e	d	c
35	b	b	e	77	d	a	b	119	e	d	d
36	b	c	a	78	d	a	c	120	e	d	e
37	***b***	***c***	***b***	79	d	a	d	121	e	e	a
38	***b***	***c***	***c***	80	d	a	e	122	e	e	b
39	b	c	d	81	d	b	a	123	e	e	c
40	b	c	e	***82***	***d***	***b***	***b***	124	e	e	d
41	b	d	a	83	d	b	c	125	e	e	e
42	***b***	***d***	***b***	***84***	***d***	***b***	***d***				

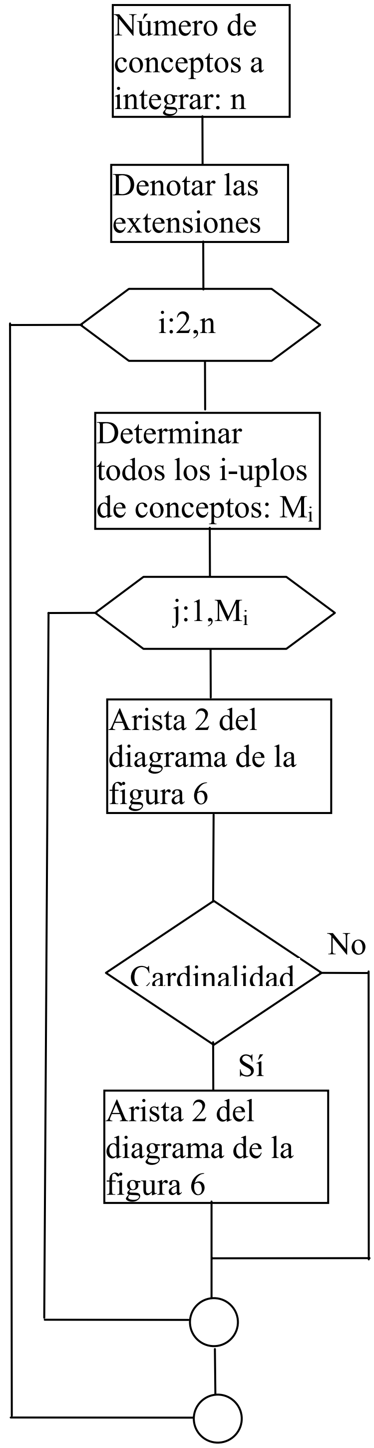
Anexo 23

Casos posibles para mapas de extensiones de tres conceptos							
No.	Tipo de mapa de cada par de extensiones			No.	Tipo de mapa de cada par de extensiones		
	E_1-E_2	E_2-E_3	E_1-E_3		E_1-E_2	E_2-E_3	E_1-E_3
1	a	a	a	28	c	a	a
2	a	a	b	29	c	a	b
3	a	a	c	***30***	***c***	***a***	***c***
4	a	a	d	***31***	***c***	***b***	***b***
5	a	a	e	***32***	***c***	***b***	***c***
6	a	b	a	33	c	c	c
7	***a***	***b***	***b***	***34***	***c***	***d***	***b***
8	***a***	***b***	***d***	35	c	d	c
9	a	c	a	36	c	d	d
10	a	d	a	37	c	d	e
11	a	d	b	38	c	e	c
12	***a***	***d***	***d***	39	d	a	a
13	a	e	a	40	d	b	a
14	b	a	a	***41***	***d***	***b***	***b***
15	***b***	***a***	***b***	***42***	***d***	***b***	***d***
16	b	a	c	***43***	***d***	***c***	***a***
17	***b***	***b***	***a***	***44***	***d***	***c***	***b***
18	***b***	***b***	***b***	45	d	c	c
19	***b***	***b***	***c***	46	d	c	d
20	***b***	***b***	***d***	47	d	c	e
21	b	b	e	48	d	d	d
22	b	c	a	49	d	e	d
23	***b***	***c***	***b***	50	e	a	a
24	***b***	***c***	***c***	51	e	b	b
25	***b***	***d***	***b***	52	e	c	c
26	***b***	***d***	***d***	53	e	d	d
27	b	e	b	54	e	e	e

Anexo 24

Formas posibles del mapa de extensiones de tres conceptos			
Forma	Casos que incluye, según anexo 23	Número de casos	Diagrama
1	1	1	
2	2, 6 y 14	3	
3	3, 4, 9, 10, 28 y 39	6	
4	5, 13 y 50	3	
5	***7, 15 y 17***	3	
6	***7, 15, 17***	3	
7	***8, 11, 16, 22, 29 y 40***	6	
8	***8, 11, 16, 22, 29 y 40***	6	
9	***12***, ***30*** y ***43***	3	
10	***12***, ***30*** y ***43***	3	
11	***18***	1	
12	***18***	1	
13	***19, 20, 23, 25, 31*** y ***41***	6	
14	***19, 20, 23, 25, 31*** y ***41***	6	
15	21, 27 y 51	3	
16	***24***, ***34*** y ***42***	3	
17	***24***, ***34*** y ***42***	3	
18	***26***, ***32*** y ***44***	3	
19	***26***, ***32*** y ***44***	3	
20	33, 35, 36, 45, 46 y 48	6	
21	37, 38, 47, 49, 52 y 53	6	
22	54	1	

Anexo 25



Procedimiento general para la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

Anexo 26

Relación entre el tipo de tarea y el momento donde se propone		
Tipo de tarea	Momento del proceso de enseñanza-aprendizaje	Ejemplo
I y IV	Los alumnos se han apropiado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje precedente de todas las proposiciones suficientes para representan la relación (las relaciones). La construcción del mapa de extensiones les permite recuperarlas y organizarlas.	1. Relación entre los conceptos de número natural y número fraccionario en el preuniversitario. 2. Relaciones entre los conceptos de triángulo, triángulo rectángulo, triángulo acutángulo y triángulo obtusángulo en el preuniversitario.
II y V	Los alumnos se han apropiado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje precedente de algunas de las proposiciones suficientes para representar la relación (las relaciones), pero existen algunas que deben ser objeto de construcción.	1. Relación entre los conceptos de parábola y gráfico de una función, después de formado el primero en el tema “curvas de segundo orden” en onceno grado. 2. Relaciones entre los conceptos de función, función lineal y función periódica, después de la formación de este último concepto en onceno grado.
III y VI	Los alumnos no conocen ninguna de las proposiciones suficientes para representar la relación (las relaciones). Esta situación se puede presentar cuando se quieren determinar las relaciones entre los conceptos obtenidos como resultado de varias clasificaciones de un mismo concepto o inmediatamente después de la formación de un concepto.	1. Relación entre los conceptos de función par y función inyectiva en onceno grado. 2. Relación entre los conceptos de función par, función inyectiva y función monótona creciente en onceno grado.

Anexo 27

Ejemplo 1: dos conceptos, todas las proposiciones son conocidas por el alumno (tarea de tipo I).

Desde la Secundaria Básica has estudiado el concepto de función. En décimo grado trabajaste con las funciones lineales y las funciones cuadráticas y en esta clase has conocido el concepto de función exponencial.

Construye un mapa de extensiones que represente la relación entre los conceptos de función y función exponencial. Deja escritas las preguntas y proposiciones que formulaste, así como los razonamientos que realizaste.

Este ejemplo es factible después de la formación del concepto de función exponencial en onceno grado.

Ejemplo 2: dos conceptos, algunas proposiciones son conocidas por el alumno (tarea de tipo II).

En décimo grado estudiaste el concepto de función cuadrática, así como los gráficos de funciones cuadráticas a los cuales se les asignó el nombre de parábolas. Ahora has estudiado el concepto de parábola como lugar geométrico.

Construye un mapa de extensiones que represente la relación entre los conceptos de gráfico de una función cuadrática y parábola. Deja escritas las preguntas y proposiciones que formulaste, así como los razonamientos que realizaste.

Esta tarea se puede utilizar después de la formación del concepto de parábola en onceno grado.

Ejemplo 3: dos conceptos, las proposiciones no son conocidas por el alumno (tarea de tipo III).

En la Secundaria Básica estudiaste el concepto de igualdad de dos triángulos, el cual has recuperado en el estudio de esta unidad. Ahora te has apropiado del concepto de semejanza de dos triángulos.

Construye un mapa de extensiones que represente la relación entre los conceptos de “triángulos iguales” y “triángulos semejantes”. Deja escritas las preguntas y proposiciones que formulaste, así como los razonamientos que realizaste.

Esta tarea se puede utilizar en décimo grado, después de la formación del concepto de triángulos semejantes.

Ejemplo 4: más de dos conceptos, todas las proposiciones son conocidas por el alumno (tarea de tipo IV).

Durante la Secundaria Básica has estudiado los conceptos de monomio, binomio y polinomio.

Construye un mapa de extensiones que represente las relaciones entre los conceptos siguientes y deja escritas las preguntas, proposiciones y razonamientos que utilices.

a) Monomio y polinomio.

b) Binomio y polinomio.

c) Monomio y binomio.

d) Monomio, binomio y polinomio.

Esta tarea se puede proponer en la primera unidad de décimo grado.

Ejemplo 5: varios conceptos, todas las relaciones son desconocidas por el alumno (tarea del tipo VI).

En esta unidad has estudiado los conceptos de función inyectiva, función sobreyectiva y función biyectiva.

a) Construye un mapa de extensiones que represente las relaciones entre los pares posibles que pueden formarse con estos tres conceptos. Deja escritas las preguntas, proposiciones y razonamientos que hayas utilizado.

b) Construye un mapa de extensiones único donde se representen las relaciones entre los tres conceptos.

Anexo 28

Casos probables de conocimiento de las técnicas				Casos probables de la tenencia de habilidades para aplicar las técnicas			
No.	Tipo de mapa			No.	Tipo de mapa		
	I	II	III		I	II	III
1	N	N	N	1	N	N	N
2	N	N	S	2	N	N	S
3	S	N	N	3	S	N	N
4	N	S	N	4	N	S	N
5	N	S	S	5	N	S	S
6	S	S	N	6	S	S	N
7	S	N	S	7	S	N	S
8	S	S	S	8	S	S	S

Anexo 29

Situaciones probables sobre el nivel de dominio de las técnicas						
No.	Conocimiento de la técnica específica			Habilidades en el uso de la técnica específica		
	I	II	III	I	II	III
1	N	N	N	N	N	N
2	N	N	N	S	N	N
3	N	N	N	N	S	N
4	N	N	N	S	S	N
5	N	N	N	S	N	S
6	N	N	N	S	S	S
7	S	N	N	N	N	N
8	S	N	N	S	N	N
9	S	N	N	N	S	N
10	S	N	N	S	S	N
11	S	N	N	S	N	S
12	S	N	N	S	S	S
13	N	S	N	N	N	N
14	N	S	N	S	N	N
15	N	S	N	N	S	N
16	N	S	N	S	S	N
17	N	S	N	S	N	S
18	N	S	N	S	S	S
19	S	S	N	N	N	N
20	S	S	N	S	N	N
21	S	S	N	N	S	N
22	S	S	N	S	S	N
23	S	S	N	S	N	S
24	S	S	N	S	S	S
25	S	N	S	N	N	N
26	S	N	S	S	N	N
27	S	N	S	N	S	N
28	S	N	S	S	S	N
29	S	N	S	S	N	S
30	S	N	S	S	S	S
31	S	S	S	N	N	N
32	S	S	S	S	N	N
33	S	S	S	N	S	N
34	S	S	S	S	S	N
35	S	S	S	S	N	S
36	S	S	S	S	S	S

Anexo 30

Situaciones posibles sobre el nivel de dominio de las técnicas						
No.	Conocimiento de la técnica específica			Habilidades en el uso de la técnica específica		
	I	II	III	I	II	III
1	N	N	N	N	N	N
2	S	N	N	N	N	N
3	S	N	N	S	N	N
4	N	S	N	N	N	N
5	N	S	N	N	S	N
6	S	S	N	N	N	N
7	S	S	N	S	N	N
8	S	S	N	N	S	N
9	S	S	N	S	S	N
10	S	N	S	N	N	N
11	S	N	S	S	N	N
12	S	N	S	S	N	S
13	S	S	S	N	N	N
14	S	S	S	S	N	N
15	S	S	S	N	S	N
16	S	S	S	S	S	N
17	S	S	S	S	N	S
18	S	S	S	S	S	S

Anexo 31

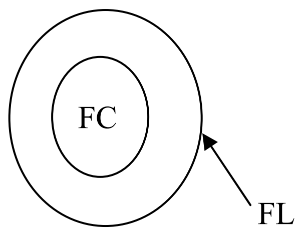
<table>
<tr><td colspan="4">Relación entre la transformación de una situación en otra, objetivo parcial y tipo de tarea a resolver (secuencia 1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Transf.</td><td rowspan="2">Objetivo parcial</td><td colspan="2">Tipos de tareas</td></tr>
<tr><td>Según criterio, tabla 2, p. 60</td><td>Según la exigencia</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1→2</td><td rowspan="2">Elaborar técnicas dirigidas a determinar la relación clásica entre dos conceptos, utilizando la relación conjuntista entre sus extensiones y representar la relación conceptual de forma verbal, gráfica y simbólica.</td><td>Tarea 1, tipo I</td><td rowspan="2">Abiertas</td></tr>
<tr><td>Tarea 2, tipo II o III</td></tr>
<tr><td>2→3</td><td>Determinar la relación clásica entre dos conceptos, utilizando la relación conjuntista entre sus extensiones y representar la relación conceptual de forma verbal, gráfica y simbólica.</td><td>I, II y III</td><td>Abiertas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3→7</td><td rowspan="2">Elaborar técnicas dirigidas a determinar relaciones de cardinalidad entre dos conceptos y representar estas relaciones de forma verbal, gráfica o simbólica.</td><td>Tarea 1, tipo I, II o III</td><td>Abierta</td></tr>
<tr><td>Tarea 2, tipo II o III</td><td>Cerrada a relaciones conjuntistas y de cardinalidad</td></tr>
<tr><td>7→9</td><td>Determinar relaciones de cardinalidad entre dos conceptos y representar estas relaciones de forma verbal, gráfica o simbólica.</td><td>I, II y III</td><td>Cerradas a relaciones conjuntistas y de cardinalidad</td></tr>
<tr><td rowspan="3">9→16</td><td rowspan="3">Elaborar técnicas dirigidas a determinar las relaciones clásicas entre más de dos conceptos, utilizando las relaciones conjuntistas entre sus extensiones y representar las relaciones conceptuales de forma verbal, gráfica y simbólica.</td><td>Tarea 1, tipo I</td><td rowspan="3">Cerradas a relaciones conjuntistas</td></tr>
<tr><td>Tarea 2, tipo IV</td></tr>
<tr><td>Tarea 3, tipo IV o V</td></tr>
<tr><td>16→18</td><td>Determinar las relaciones clásicas entre más de dos conceptos, utilizando las relaciones conjuntistas entre sus extensiones y representar estas relaciones conceptuales de forma verbal, gráfica y simbólica.</td><td>IV, V y VI</td><td>Cerrada a relaciones conjuntistas</td></tr>
</table>

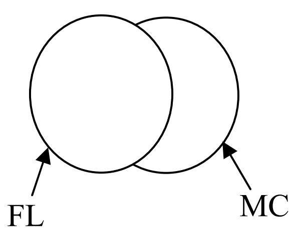
Anexo 32

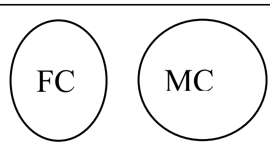
Relación entre la transformación de una situación en otra, objetivo parcial y tipo de tarea a resolver (secuencia 2)

Transf.	Objetivo parcial	Tipos de tareas	
		Según criterio, tabla 2, p. 60	Según la exigencia
1→2	Elaborar técnicas dirigidas a determinar la relación clásica entre dos conceptos, utilizando la relación conjuntista entre sus extensiones y representar la relación conceptual de forma verbal, gráfica y simbólica.	Tarea 1, tipo I	Abiertas
		Tarea 2, tipo II o III	
2→3	Determinar la relación clásica entre dos conceptos utilizando la relación conjuntista entre sus extensiones y representar la relación conceptual de forma verbal, gráfica y simbólica.	I, II y III	Abiertas
3→11	Elaborar técnicas dirigidas a determinar las relaciones clásicas entre más de dos conceptos, utilizando las relaciones conjuntistas entre sus extensiones y representar las relaciones conceptuales de forma verbal, gráfica y simbólica.	Tarea 1, tipo I	Abiertas
		Tarea 2, tipo IV	
		Tarea 3, tipo IV o V	
11→12	Determinar las relaciones clásicas entre más de dos conceptos, utilizando las relaciones conjuntistas entre sus extensiones y representar estas relaciones conceptuales de forma verbal, gráfica y simbólica.	IV, V y VI	Abiertas
12→17	Elaborar técnicas dirigidas a determinar relaciones de cardinalidad entre dos conceptos y representar estas relaciones de forma verbal, gráfica o simbólica.	Tarea 1, tipo I, II o III	Abierta
		Tarea 2, tipo II o III	Cerrada a relaciones conjuntistas y de cardinalidad
17→18	Determinar relaciones de cardinalidad entre dos conceptos y representar estas relaciones de forma verbal, gráfica o simbólica.	I, II y III	Cerradas a relaciones conjuntistas y de cardinalidad

Anexo 33

Mapas correspondientes a los conceptos de función constante y función lineal		
Mapa de extensiones	Mapa de proposiciones	Mapa simbólico
	8. Toda función constante es una función lineal. **9.** Existen funciones lineales que no son funciones constantes.	8. $FC \subset FL$ **9.** $FL \not\subset FC$

Mapas correspondientes a los conceptos de función lineal y función monótona creciente		
Mapa de extensiones	Mapa de proposiciones	Mapa simbólico
	**1.** Existen funciones lineales que no son monótonas crecientes. 2. Existen funciones lineales que son monótonas crecientes. **3.** Existen funciones monótonas crecientes que no son funciones lineales.	1. $FL \cap MC \neq FL$, 2. $FL \cap MC \neq \varnothing$ y 3. $FL \cap MC \neq MC$

Mapas correspondientes a los conceptos de función constante y función monótona creciente		
Mapa de extensiones	Mapa de proposiciones	Mapa simbólico
	Ninguna función constante es monótona creciente.	$FC \cap MC = \varnothing$

Anexo 34

En la tabla siguiente se dan dominios numéricos y números. En el caso de los incisos 1, 2, 3 y 4, marca con una X en todas aquellas casillas que correspondan a un dominio al que el número pertenece. En los incisos 5 y 6, escribe un número que pertenezca a los dominios numéricos marcados y no pertenezca a los que están en blanco. Argumenta en cada caso.

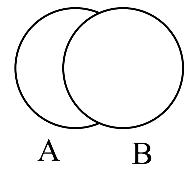
	Número	Dominio numérico					
		N	Z	Q_+	Q	I (irracionales)	$\Re$
1)	- 7						
2)	4						
3)	$\sqrt{20}$						
4)	$\frac{3}{4}$						
5)					X		X
6)						X	X

Anexo 35

Condiciones previas del nivel de partida para la transformación de cada situación de aprendizaje			
Transf.	Condiciones previas		
	Generales	Particulares	Singulares
1→2	g1: Interpretar una tarea por resolver. g2: Formular preguntas.	p1: Formular, argumentar, demostrar y refutar proposiciones matemáticas. p2: Representar relaciones entre conjuntos mediante diagramas de Venn. p3: Realizar conversiones entre proposiciones sobre relaciones conceptuales, proposiciones conjuntistas y expresiones simbólicas de la teoría de conjuntos.	s1: Citar ejemplos y no-ejemplos del concepto. s2: Argumentar la inclusión o no de un elemento en las extensiones de los conceptos.
2→3	g1 y g2	p1, p2, p3 y p4: Describir el procedimiento a seguir para construir un mapa de extensiones del tipo I.	s1 y s2
3→7 y 12→17	g1 y g2	p5: Construir un mapa de extensiones del tipo I. p6: Comparar el cardinal de dos conjuntos. p7: Realizar conversiones entre distintas representaciones de relaciones de cardinalidad.	s1 y s2
7→9 y 17→18	g1 y g2	p8: Construir mapas de extensiones del tipo I. p9: Describir el procedimiento a seguir para construir un mapa de extensiones del tipo II.	s1 y s2
9→16 y 3→11	g1 y g2	p1, p2, p3 y p8	s1 y s2
16→18 y 11→12	g1 y g2	p1, p2, p3, p8 y p10: Describir el procedimiento a seguir para construir un mapa de extensiones del tipo III.	s1 y s2

Anexo 36

El diagrama representa la relación que existe entre dos conjuntos de personas que viven en una región.



A: conjunto de personas que practican natación.

B: conjunto de personas que hablan inglés.

Coloque verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

1__ Algunas personas que practican natación, no hablan inglés.

2__ Algunas personas que hablan inglés, no practican natación.

3__ Todas las personas que practican natación, hablan inglés.

4__ Todas las personas que hablan inglés, practican natación.

5__ Ninguna persona que practica natación, habla inglés.

6__ Ninguna persona que habla inglés, practica natación.

7__ Algunas personas practican natación y hablan inglés.

8__ Existen personas que hablan inglés y no practican natación.

9__ Existe igual cantidad de personas que practican natación y no hablan inglés como de personas que hablan inglés y no practican natación.

10__ El número de personas que practican natación y hablan inglés, es menor que el de las personas que hablan inglés y no practican natación.

Anexo 37

Matriz de relaciones entre los conceptos comparables con respecto al concepto de función, en décimo grado								
Conceptos	1	2	3	4	5	6	7	8
1		0	0	0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
3				1	1	0	0	0
4					0	0	0	0
5						0	0	0
6							0	0
7								0
8								

Descriptor
1: función
2: función numérica
3: función lineal
4: función constante
5: función idéntica
6: función monótona creciente
7: función monótona decreciente
8: función cuadrática

Anexo 38

Estimado/a educador/a, apelando a su gentileza y voluntad de colaborar le solicitamos varios datos que son necesarios para la aplicación del método de evaluación por expertos de un modelo didáctico elaborado como resultado de una tesis de doctorado.

1. Datos generales

Nombres y apellidos: ____

Función que desempeña: 1__ Profesor/a 2__ Metodólogo/a 3__ Responsable de aprendizaje 4__ Jefe/a de departamento 5 __ Otra. Especificar: ____________________

Funciones anteriores a la actual en relación con el proceso de enseñanza de la Matemática en el preuniversitario: 1__ Profesor/a 2__ Metodólogo/a 3__ Responsable de aprendizaje 4__ Jefe/a de departamento 5 __ Otras. Especificar: _________________

Grado científico y título académico: 1__ Doctor/a 2 __ Master 3__ Ninguno

Estudios que realiza: 1__ Doctorado 2 __ Maestría 3 __ Otros 4 __ Ninguno

Categoría doc.: 1__ Instructor 2__ Asistente 3__ Prof. auxiliar 4__ Prof. titular 5__ No

Años de experiencia en funciones relacionadas con la enseñanza de la Matemática: ___

Años de experiencia en funciones relacionadas con la enseñanza de la Matemática en el preuniversitario (profesor/a, metodólogo/a, responsable de aprendizaje, etc.): ___

Años de experiencia como profesor/a de Matemática en preuniversitario: ___

2. En la tabla aparece una escala que le permitirá expresar el nivel de conocimiento que usted considera poseer, para valorar un modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de relaciones conceptuales en la Educación Preuniversitaria. Marque con una “X” en la casilla que considere. El cero (0) corresponde al mínimo y el 10 al máximo.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3. Si usted tuviera que argumentar sus criterios acerca de un modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de relaciones conceptuales en la Educación Preuniversitaria, tendría que apelar a sus conocimientos, intuición, experiencia, etc. Señale con una X la influencia que tienen los elementos expuestos en la tabla en la argumentación de los criterios que usted puede ofrecer sobre el tema.

Fuentes de argumentación	Alta	Media	Baja
Análisis teóricos realizados por usted.			
Experiencia como profesor.			
Trabajos consultados de autores nacionales.			
Trabajos consultados de autores extranjeros.			
Su propio conocimiento sobre el estado actual del problema en el extranjero.			
Su intuición.			

Anexo 39

Puntajes correspondientes a las fuentes de argumentación			
Fuentes de argumentación	Alta	Media	Baja
Análisis teóricos realizados por el sujeto.	0,3	0,2	0,1
Experiencia.	0,5	0,4	0,2
Trabajo de autores nacionales consultados.	0,05	0,04	0,02
Trabajo de autores extranjeros consultados.	0,05	0,04	0,02
Conocimiento sobre el estado actual del problema en el extranjero.	0,05	0,04	0,02
Intuición.	0,05	0,04	0,02

Anexo 40

Coeficiente de competencia de los posibles expertos									
Sujeto	kc	Argumentación							k
		Anál. t.	Exper.	Aut. nac.	Aut. ext.	Prob. ext.	Intuic.	ka	
1	0,6	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,74
2	0,6	0,2	0,4	0,04	0,04	0,04	0,04	0,76	0,68
3	0,9	0,2	0,5	0,05	0,04	0,04	0,05	0,88	0,89
4	0,8	0,2	0,5	0,05	0,04	0,02	0,05	0,86	0,83
5	0,8	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,84
6	0,8	0,2	0,5	0,04	0,04	0,02	0,04	0,84	0,82
7	0,7	0,2	0,5	0,04	0,04	0,02	0,04	0,84	0,77
8	0,9	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,89
9	1	0,3	0,5	0,05	0,05	0,05	0,04	0,99	0,995
10	0,9	0,3	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,97	0,94
11	0,7	0,2	0,5	0,04	0,02	0,02	0,04	0,82	0,76
12	0,7	0,2	0,5	0,05	0,04	0,02	0,04	0,85	0,78
13	0,8	0,3	0,5	0,05	0,04	0,04	0,05	0,98	0,89
14	0,8	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,04	0,86	0,83
15	0,9	0,3	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,97	0,94
16	0,9	0,3	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,97	0,94
17	0,8	0,2	0,5	0,04	0,04	0,02	0,04	0,84	0,82
18	0,9	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,89
19	0,9	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,89
20	0,9	0,3	0,5	0,05	0,05	0,04	0,05	0,99	0,95
21	0,9	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,89
22	0,8	0,2	0,5	0,04	0,02	0,02	0,04	0,82	0,81
23	0,9	0,3	0,5	0,05	0,04	0,04	0,05	0,98	0,94
24	0,8	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,84
25	0,9	0,3	0,5	0,05	0,04	0,04	0,05	0,98	0,94
26	0,9	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,89
27	0,8	0,1	0,5	0,02	0,02	0,02	0,05	0,71	0,76
28	0,7	0,1	0,5	0,02	0,02	0,02	0,04	0,7	0,70
29	0,8	0,1	0,5	0,02	0,02	0,02	0,05	0,71	0,76
30	0,7	0,1	0,5	0,02	0,02	0,02	0,04	0,7	0,70

Anexo 41

Modelo estadístico basado en el procedimiento de comparación por pares

1. Subíndices

i: dimensión, j: indicador, k: experto.

2. Valores de subíndices

p: número de dimensiones del constructo ($i: \overline{1, p}$), n_i: número de indicadores de la dimensión i ($j: \overline{1, n_i}$) y m: número de expertos ($k: \overline{1, m}$).

3. Variables estadísticas

Del primer nivel

I_{ijk}: variable relativa al valor que el experto k asigna al indicador j de la dimensión i en la encuesta.

A cada variable se le asigna un valor en la escala $E(I_{ijk}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Los elementos de este conjunto se corresponden con las categorías: inadecuado, poco adecuado, adecuado, bastante adecuado y muy adecuado, respectivamente.

Del segundo nivel

I_{ij}: variable relativa al valor que el grupo de expertos asigna al indicador j de la dimensión i. Este valor se calcula mediante el procedimiento estadístico de la comparación por pares (Ramírez, 1999; Campistrous y Rizo, 2000b) y depende de los I_{ijk}.

$E(I_{ij}) = E(I_{ijk}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

D_i: variable relativa a la dimensión i, $D_i = (I_{i1}, I_{i2}, \ldots, I_{in_i})$.

$E(D_i) = E(I_{i1}) \times E(I_{i2}) \times \ldots \times E(I_{in_i})$

Del tercer nivel

I'_{ij} **:** índice relativo al indicador j de la dimensión i**,**

$E(I'_{ij}) = \{0, 25, 50, 75, 100\}$

D'_i **:** índice relativo a la dimensión i.

$$D'_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} I'_{ij}}{n_i}, \quad E(D'_i) \subset [0, 100]$$

C': índice relativo al constructo.

$C' = \frac{\sum_{i=1}^{p} C_i D_i'}{\sum_{i=1}^{p} C_i}$, $E(C') \subset [0, 100]$, C_i es el coeficiente de ponderación de la dimensión i en el constructo y se puede calcular utilizando el procedimiento de la votación ponderada, de manera que su valor es la suma de los votos que otorgan los expertos a la dimensión i.

4. **Relación entre las variables**

$$
\begin{array}{lll}
I_{ijk} & & \text{Primer nivel} \\
\downarrow & & \\
I_{ij} \rightarrow D_i & & \text{Segundo nivel} \\
\downarrow \quad\;\; \downarrow & & \\
I'_{ij} \rightarrow D'_i \rightarrow C' & & \text{Tercer nivel}
\end{array}
$$

Anexo 42

Matriz de valoración para la medición de los indicadores de la dimensión "poder descriptivo" de un modelo didáctico					
Indicador	Categoría				
	Inadecuado (1)	Poco adecuado (2)	Adecuado (3)	Bastante adecuado (4)	Muy adecuado (5)
1	No existe relación entre el modelo y las características esenciales del proceso modelado	Existe alguna relación entre el modelo y el proceso, pero en el modelo no se representa la esencia del proceso modelado	En el modelo se representa la esencia del proceso de integración, pero dos o más de sus características esenciales se desarrollan con poca profundidad	Todas las características esenciales del proceso modelado se representan en el modelo, pero una de ellas se desarrolla con poca profundidad	Todas las características esenciales del proceso modelado se representan con profundidad en el modelo
2	No se describen las etapas del proceso modelado	Algunas etapas del proceso modelado no se describen o se describen todas con limitaciones	Todas las etapas del proceso modelado se describen , pero la descripción de algunas es limitada	Todas las etapas del proceso modelado se describen, pero la descripción de una es limitada	Todas las etapas del proceso modelado se describen con la profundidad necesaria
3	No se conciben relaciones entre las etapas o las que se conciben no cubren el rango de las esenciales	Se conciben las relaciones esenciales entre las etapas, pero la descripción es muy pobre o no se realiza	Se conciben las relaciones esenciales entre las etapas, pero la descripción de algunas es limitada	Se conciben las relaciones esenciales entre las etapas, pero la descripción de una es limitada	Se conciben y describen con la amplitud necesaria las relaciones esenciales entre las etapas

Matriz de valoración para la medición de los indicadores de la dimensión "poder explicativo" de un modelo didáctico					
Indicador	Categoría				
	Inadecuado (1)	Poco adecuado (2)	Adecuado (3)	Bastante adecuado (4)	Muy adecuado (5)
1	No se definen los conceptos fundamentales o ello se hace, pero las definiciones no cumplen los requisitos básicos exigidos por la lógica	Se definen sólo algunos de los conceptos fundamentales o se definen todos, pero algunas definiciones no cumplen los requisitos básicos exigidos por la lógica	Se definen los conceptos fundamentales, todas las definiciones cumplen los requisitos básicos, pero algunas utilizan un sistema esencial con características redundantes	Se definen los conceptos fundamentales, todas las definiciones cumplen los requisitos básicos, pero una utiliza un sistema esencial con características redundantes	Se definen los conceptos fundamentales y las definiciones cumplen los requisitos exigidos por la lógica
2	No se explica la actividad del docente	Se explican sólo algunas acciones de la actividad del docente	Se explican todas las acciones de la actividad del docente, pero en algunas de ellas la explicación es limitada	Se explican todas las acciones de la actividad del docente, pero la explicación de una de ellas es limitada	Se explican todas las acciones de la actividad del docente con profundidad
3	No se explica la actividad del alumno	Se explican sólo algunas acciones de la actividad del alumno	Se explican todas las acciones de la actividad del alumno, pero en algunas de ellas la explicación es limitada	Se explican todas las acciones de la actividad del alumno, pero la explicación de una de ellas es limitada	Se explican todas las acciones de la actividad del alumno con profundidad

Matriz de valoración para la medición de los indicadores de la dimensión “alcance” de un modelo didáctico					
Indicador	Categoría				
	Inadecuado (1)	Poco adecuado (2)	Adecuado (3)	Bastante adecuado (4)	Muy adecuado (5)
1	Las situaciones se presentan sólo en un tema de una asignatura de la disciplina	Las situaciones se presentan sólo en varios temas de una asignatura de la disciplina	Las situaciones se presentan sólo en varios temas de algunas asignaturas de la disciplina	Las situaciones se presentan sólo en algunos temas de todas las asignaturas de la disciplina	Las situaciones se presentan en todos los temas de todas las asignaturas de la disciplina
2	Las situaciones se presentan sólo una vez en cada tema	Las situaciones se presentan sólo una vez en varios temas y algunas veces en el resto	Las situaciones se presentan varias veces en cada tema, pero se concentran en un momento de su desarrollo (inicio, intermedio, final)	Las situaciones se presentan varias veces en cada tema, pero concentradas en dos momentos de su desarrollo	Las situaciones se presentan varias veces en cada tema y en los distintos momentos de su desarrollo

Matriz de valoración para la medición del "poder predictivo" de un modelo did.					
Indicador	Categoría				
	Inadecuado (1)	Poco adecuado (2)	Adecuado (3)	Bastante adecuado (4)	Muy adecuado (5)
1	No se especifican condiciones previas (CP)	Se especifican las CP referidas a algunas situaciones	Se especifican las CP, de uno o dos tipos, referidas a cada una de las situaciones	Se especifican las CP referidas a todas las situaciones, para algunas situaciones, las de uno o dos tipos y para el resto, las de los tres tipos	Se especifican las condiciones previas, de los tres tipos, referidas a cada situación
2	No se concibe la evaluación de la existencia de CP	Se concibe la evaluación de la existencia de CP referidas a algunas situaciones	Se concibe la evaluación de la existencia de las CP, de uno o dos tipos, referidas a cada una de las situaciones	Se concibe la evaluación de la existencia de las CP referidas a todas las situaciones, para algunas situaciones, las de uno o dos tipos y para el resto, las de los tres tipos	Se concibe la evaluación de la existencia de las CP, de los tres tipos, referidas a cada situación
3	No se concibe la recuperación o creación de CP	Se concibe la recuperación o creación de CP referidas a algunas situaciones	Se concibe la recuperación o creación de CP, de uno o dos tipos, referidas a cada una de las situaciones	Se concibe la recuperación o creación de CP referidas a todas las situaciones, para algunas situaciones, las de uno o dos tipos y para el resto, las de los tres tipos	En todas las situaciones se concibe la recuperación o creación de CP de los tres tipos
4	No se describe la actuación del alumno	Se describe la actuación del alumno, sólo en una etapa	Se describe la actuación del alumno, sólo en algunas etapas	Se describe la actuación del alumno en la mayoría de las etapas	Se describe la actuación del alumno en todas las etapas

Matriz de valoración para la medición de los indicadores de la dimensión “rigor y especificidad” de un modelo didáctico					
Indicador	Categoría				
	Inadecuado (1)	Poco adecuado (2)	Adecuado (3)	Bastante adecuado (4)	Muy adecuado (5)
1	El lenguaje utilizado nunca es claro y preciso	El lenguaje utilizado es claro y preciso muy pocas veces	El lenguaje utilizado es a veces claro y preciso	El lenguaje utilizado es claro y preciso la mayoría de las veces	El lenguaje utilizado siempre es claro y preciso
2	Todos los conceptos o la mayoría de ellos, no son útiles para identificar y describir los estados y sus relaciones	Algunos conceptos no son útiles para identificar y describir estados y sus relaciones y faltan conceptos necesarios	Todos los conceptos son útiles para identificar y describir los estados y sus relaciones, pero faltan algunos conceptos necesarios	La mayoría de los conceptos son útiles para identificar y describir los estados y sus relaciones, pero se utilizan algunos no necesarios	Todos los conceptos son útiles para identificar y describir los estados y sus relaciones y se utilizan los necesarios
3	Todos los conceptos o la mayoría de ellos, no son útiles para identificar y describir la actuación del docente	Algunos conceptos no son útiles para identificar y describir la actuación del docente	Todos los conceptos son útiles para identificar y describir la actuación del docente, pero faltan algunos conceptos necesarios	La mayoría de los conceptos son útiles para identificar y describir la actuación del docente, pero se utilizan algunos no necesarios	Todos los conceptos son útiles para identificar y describir la actuación del docente y se utilizan los necesarios

Matriz de valoración para la medición de los indicadores de la dimensión "posibilidad de refutación" de un modelo didáctico					
Indic.	Categoría				
	Inadecuado (1)	Poco adecuado (2)	Adecuado (3)	Bastante adecuado (4)	Muy adecuado (5)
1	No se especifican las situaciones en que está presente el proceso modelado	Se especifican las situaciones en que está presente el proceso, pero éstas no se describen o ello se hace en muy pocos casos	Se especifican las situaciones en que está presente el proceso y varias de ellas se describen	Se especifican y describen las situaciones en la mayoría de los casos	Se especifican y describen todas las situaciones en que está presente el proceso modelado
2	No se incluyen procedimientos para su implementación	Se incluyen sólo algunos procedimientos para su implementación	Se incluyen varios de los procedimientos necesarios para su implementación	Se incluye la mayoría de los procedimientos necesarios para su implementación	Se incluyen todos los procedimientos necesarios para su implementación

Matriz de valoración para la medición de los indicadores de la dimensión "poder de replicación" de un modelo didáctico					
Indic.	Categoría				
	Inadecuado (1)	Poco adecuado (2)	Adecuado (3)	Bastante adecuado (4)	Muy adecuado (5)
1	La implementación del modelo afecta los objetivos y contenidos de los programas de las asignaturas	La implementación afecta los objetivos o los contenidos, pero no a ambos	La implementación sólo requiere de cambios metodológicos o en el ordenamiento y el fondo de tiempo de los contenidos	La implementación requiere de cambios metodológicos y en el ordenamiento o fondo de tiempo de los contenidos, pero no de ambos	La implementación no requiere de cambios en los programas de las asignaturas o sólo requiere de cambios metodológicos
2	Requiere de varias condiciones especiales que no se pueden asegurar	Requiere de varias condiciones especiales, algunas de las cuales no se pueden asegurar	Requiere de algunas condiciones especiales que se pueden asegurar	Requiere de una condición especial que es posible asegurar	Está concebido para las condiciones existentes en las aulas
3	Requiere de una formación matemática que no se ofrece en el pregrado	Requiere de una formación matemática que en gran parte no se ofrece en el pregrado	Requiere de la formación matemática que se ofrece en el pregrado (básica) más algunos elementos que necesitan de postgrado	Requiere de la formación matemática básica más algunos elementos que requieren de autopreparación	Requiere de la formación matemática que se ofrece en el pregrado
4	La terminología no se corresponde con la utilizada en la MEM	Una parte significativa de los términos utilizados en el modelo no se corresponden con los usados en la MEM	La mayoría de los términos se corresponden con los utilizados en la MEM y los nuevos son de difícil comprensión	La mayoría de los términos se corresponden con los utilizados en la MEM y los nuevos son de fácil comprensión	La terminología se corresponde con la utilizada en la MEM

Anexo 43

Fórmulas para calcular los índices de las dimensiones y de la calidad del modelo				
Dimensión	Índice	No. de valores	Distribución por intervalos	No. de valores distintos
Poder descriptivo	$D'_1 = \frac{1}{3}(I'_{11} + I'_{12} + I'_{13})$	5^3=125	[0,20)→10 [20,40)→25 [40,60)→55 [60,80)→25 [80,100] →10	13
Poder explicativo	$D'_2 = \frac{1}{3}(I'_{21} + I'_{22} + I'_{23})$			
Rigor y especificidad	$D'_5 = \frac{1}{3}(I'_{51} + I'_{52} + I'_{53})$			
Alcance	$D'_3 = \frac{1}{2}(I'_{31} + I'_{32})$	5^2=25	[0,20)→3 [20,40)→7 [40,60)→5 [60,80)→7 [80,100]→3	9
Posibilidad de refutación	$D'_6 = \frac{1}{2}(I'_{61} + I'_{62})$			
Poder predictivo	$D'_4 = \frac{1}{4}(I'_{41} + I'_{42} + I'_{43} + I'_{44})$	5^4=625	[0,20)→35 [20,40)→155 [40,60)→245 [60,80)→155 [80,100]→35	22
Poder de replicación	$D'_7 = \frac{1}{4}(I'_{71} + I'_{72} + I'_{73} + I'_{74})$			
Calidad del modelo	$C' = \frac{1}{420}(55D'_1 + 46D'_2 + 56D'_3 + 43D'_4 + 65D'_5 + 74D'_6 + 81D'_7)$	5^{21}		

Anexo 44

Estimado profesor/a:

Con el objetivo de la evaluación del modelo didáctico elaborado se determinaron siete dimensiones cuyos significados se exponen en la tabla:

No.	Dimensión	Significado
1	Poder descriptivo	Capacidad de representar de forma simplificada lo esencial del proceso modelado en correspondencia con el objetivo del estudio.
2	Poder explicativo	Capacidad de revelar cómo y porqué el proceso modelado funciona de una forma determinada.
3	Alcance	Amplitud del conjunto de situaciones en las que está presente el proceso modelado y distribución de estas situaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA).
4	Poder predictivo	Capacidad para anticipar resultados en la actuación de los alumnos antes de que ellos ocurran, gracias a la presencia de ciertas condiciones previas que proveen un contexto de actuación en una situación de aprendizaje.
5	Rigor y especificidad	Ajuste del modelo al proceso modelado.
6	Posibilidad de refutación	Capacidad de contrastar el modelo en la práctica.
7	Poder de replicación	Capacidad de implementar el modelo en distintas circunstancias y con diferentes docentes, y alumnos y alumnas.

Distribuya 14 puntos entre las 7 dimensiones, atendiendo al peso que usted considera tiene cada una en un modelo didáctico cualquiera. Al mayor peso corresponde el mayor puntaje.

Dimensión	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje							

Si desea recomendar algo, escriba sus sugerencias aquí:

____

____

____

____

____

Votación ponderada correspondiente a las dimensiones del modelo							
Experto	votación por dimensión						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	1	2	2	3
2	1	1	3	2	2	2	3
3	1	2	1	1	3	3	3
4	1	2	3	1	3	2	2
5	1	1	1	2	3	3	3
6	1	2	3	1	2	2	3
7	1	1	3	2	2	2	3
8	1	2	3	1	2	2	3
9	3	1	1	1	2	3	3
10	1	2	1	1	3	3	3
11	3	1	1	1	2	3	3
12	2	1	3	2	2	2	2
13	3	1	1	1	2	3	3
14	2	1	2	2	2	3	2
15	3	1	1	1	2	3	3
16	1	2	3	1	2	2	3
17	1	2	3	1	2	2	3
18	2	2	2	1	2	3	2
19	1	2	3	1	2	2	3
20	3	1	1	1	2	3	3
21	3	2	1	3	2	1	2
22	2	1	3	1	2	3	2
23	2	2	1	2	2	3	2
24	3	1	1	2	2	2	3
25	2	1	2	2	3	2	2
26	1	2	1	2	2	3	3
27	2	1	1	1	3	3	3
28	3	2	2	1	2	2	2
29	2	2	1	2	1	3	3
30	2	2	1	2	2	2	3
Total	55	46	56	43	65	74	81

Anexo 45

Probabilidad de que las dimensiones alcancen las categorías de inadecuado, poco adecuado, adecuado, bastante adecuado y muy adecuado					
Dimensión	Probabilidad por intervalo				
	[0, 20)	[20, 40)	[40, 60)	[60, 80)	[80, 100]
	Inadecuado	Poco adecuado	Adecuado	Bastante adecuado	Muy adecuado
Poder descriptivo	0,08	0,2	0,44	0,2	0,08
Poder explicativo					
Rigor y especificidad					
Alcance	0,12	0,28	0,2	0,28	0,12
Posibilidad de refutación					
Poder predictivo	0,056	0,248	0,392	0,248	0,056
Poder de replicación					

Anexo 46

Encuesta

Compañero profesor/a puesto que usted tiene la preparación requerida y ha mostrado voluntad de cooperar con la investigación titulada “Modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en la Educación Preuniversitaria”, se necesita que conteste el siguiente cuestionario, después de haber leído las

Instrucciones:

- En cada ítem aparece una escala del 1 al 5, que se interpreta de la manera siguiente:

1	2	3	4	5
Inadecuado	Poco adecuado	Adecuado	Bastante adecuado	Muy adecuado

- Debe señalar el número correspondiente a su respuesta de acuerdo con esta escala.
- En cada ítem aparecen los criterios para la asignación de cada categoría. Al final del cuestionario aparecen una pregunta para recoger alguna opinión que no haya sido recogida al responder los otros ítems.

Cuestionario.

Dimensión 1: Poder descriptivo del modelo.

1. Representación en el modelo de las características didácticas esenciales del proceso modelado:

1	2	3	4	5
No existe relación entre el modelo y las características esenciales del proceso modelado	Existe alguna relación, pero en el modelo no se representa la esencia del proceso modelado	Se representa la esencia del proceso, pero dos o más de sus características esenciales se desarrollan con poca profundidad	Todas las características esenciales se representan, pero una de ellas se desarrolla con poca profundidad	Todas las características se representan con profundidad en el modelo

2. Descripción de las etapas del proceso modelado:

1	2	3	4	5
No se describen	Algunas no se describen o se describen todas con limitaciones	Todas se describen , pero la descripción de algunas es limitada	Todas se describen, pero la descripción de una es limitada	Todas se describen con la profundidad necesaria

3. Descripción de las relaciones esenciales entre las etapas del proceso modelado:

1	2	3	4	5
No se describen	Algunas no se describen o se describen todas con limitaciones	Todas se describen , pero la descripción de algunas es limitada	Todas se describen, pero la descripción de una es limitada	Todas se describen con la profundidad necesaria

Dimensión 2: Poder explicativo del modelo.

1. Definición de los conceptos fundamentales:

1	2	3	4	5
Ninguno se define o las definiciones no cumplen los requisitos básicos	Sólo algunos se definen o se definen todos, pero varias definiciones no cumplen los requisitos básicos	Todos se definen; las defin. cumplen los requisitos básicos, pero algunas utilizan características redundantes	Todos se definen; las defin. cumplen los requisitos básicos, pero una utiliza características redundantes	Todos se definen y las definiciones cumplen todos los requisitos

2. Explicación de la actividad del docente:

1	2	3	4	5
No se explica	Sólo algunas acciones	Todas las acciones, pero en algunas la explicación es limitada	Todas las acciones, pero la explicación de una de ellas es limitada	Todas las acciones con profundidad

3. Explicación de la actividad del alumno:

1	2	3	4	5
No se explica	Sólo algunas acciones	Todas las acciones, pero en algunas la explicación es limitada	Todas las acciones, pero la explicación de una de ellas es limitada	Todas las acciones con profundidad

Dimensión 3: Alcance.

1. Frecuencia de aparición de las situaciones donde está presente el proceso modelado en las asignaturas de la disciplina Matemática.

1	2	3	4	5
En un tema de una asignatura	En varios temas de una asignatura	En varios temas de algunas asignaturas	En algunos temas de todas las asignaturas	En todos los temas de todas las asignaturas

2. Periodicidad de aparición de las situaciones donde está presente el proceso modelado.

1	2	3	4	5
Sólo una vez en cada tema	Sólo una vez en varios temas y algunas veces en el resto	Varias veces en cada tema, pero concentradas en un momento de su desarrollo (inicio, intermedio, final)	Varias veces en cada tema, pero concentradas en dos momentos de su desarrollo	Varias veces en cada tema y en los distintos momentos de su desarrollo

Dimensión 4: Poder predictivo.

1. Especificación de condiciones previas (generales, particulares y singulares), referidas a las distintas situaciones de aprendizaje:

1	2	3	4	5
En ninguna situación	En algunas situaciones	En todas las situaciones, uno o dos tipos de condiciones por situación	En todas las situaciones, en algunas, uno o dos tipos de condiciones y en el resto los tres tipos	En todas las situaciones, los tres tipos de condiciones por situación

2. Concepción de la evaluación de la existencia de condiciones previas, referidas a las distintas situaciones de aprendizaje:

1	2	3	4	5
En ninguna situación	En algunas situaciones	En todas las situaciones, uno o dos tipos de condiciones por situación	En todas las situaciones, en algunas, uno o dos tipos de condiciones y en el resto los tres tipos	En todas las situaciones, los tres tipos de condiciones por situación

3. Concepción de la recuperación o creación de condiciones previas, referidas a las distintas situaciones de aprendizaje:

1	2	3	4	5
En ninguna situación	En algunas situaciones	En todas las situaciones; uno o dos tipos de condiciones por situación	En todas las situaciones, en algunas, uno o dos tipos de condiciones y en el resto los tres tipos	En todas las situaciones; los tres tipos de condiciones

4. Descripción de la actuación del alumno en las distintas situaciones de aprendizaje, cuando se dan las condiciones previas:

1	2	3	4	5
No se describe	En una situación	En algunas situaciones	En la mayoría de las situac.	En todas las situaciones

Dimensión 5: Rigor y especificidad.

1. Claridad y precisión del lenguaje utilizado:

1	2	3	4	5
Nunca es claro y preciso	Pocas veces es claro y preciso	A veces es claro y preciso	La mayoría de la veces es claro y preciso	Siempre es claro y preciso

2. Pertinencia de los conceptos fundamentales del modelo para identificar y describir los estados del proceso modelado y sus relaciones en la actuación del alumno:

1	2	3	4	5
Todos o la mayoría no son útiles	Algunos no son útiles y faltan conceptos necesarios	Todos son útiles, pero faltan conceptos necesarios	Todos son útiles, pero se utilizan conceptos no necesarios	Todos son útiles y necesarios

3. Pertinencia de los conceptos fundamentales del modelo para la identificar y describir la actuación del docente en la dirección del proceso modelado:

1	2	3	4	5
Todos o la mayoría no son útiles	Algunos no son útiles y faltan conceptos necesarios	Todos son útiles, pero faltan conceptos necesarios	Todos son útiles, pero se utilizan conceptos no necesarios	Todos son útiles y necesarios

Dimensión 6: posibilidad de refutación.

1. Descripción de las situaciones en que está presente el proceso modelado:

1	2	3	4	5
No se describen	Se describen sólo algunas	Todas se describen, pero en algunas la descripción es limitada	Todas se describen, pero en una la descripción es limitada	Todas se describen con profundidad

2. Inclusión de procedimientos para la implementación del modelo en la práctica:

1	2	3	4	5
No se incluyen	Sólo algunos de los necesarios	Varios de los necesarios	La mayoría de los necesarios	Todos los necesarios

Dimensión 7: Poder de replicación.

1. Efectos de la implementación del modelo en los programas de las asignaturas de la disciplina Matemática:

1	2	3	4	5
Afecta los objetivos y contenidos	Afecta los objetivos o los contenidos, pero no a ambos	Sólo requiere de cambios metodológicos o en el orden y el fondo de tiempo de los contenidos	Requiere de cambios metodológicos y en el orden o fondo de tiempo de los contenidos, pero no de ambos	Requiere a lo sumo de cambios metodológicos

2. Requerimientos respecto a las condiciones de enseñanza y aprendizaje:

1	2	3	4	5
Requiere de varias condiciones especiales que no se pueden asegurar	Requiere de varias condiciones especiales; algunas de ellas no se pueden asegurar	Requiere de algunas condiciones especiales que se pueden asegurar	Requiere de una condición especial que es posible asegurar	Bastan las condiciones existentes en las aulas

3. Requerimientos respecto a la formación matemática de los docentes:

1	2	3	4	5
Requiere de una formación que no se ofrece en el pregrado	Requiere de una formación que en gran parte no se ofrece en el pregrado	Requiere de la formación básica (la que se ofrece en el pregrado) más algunos elementos que necesitan de postgrado	Requiere de la formación básica más algunos elementos que se adquieren mediante autopreparación	Basta con la formación básica

4. Correspondencia de la terminología utilizada con la formación básica (de pregrado) de los docentes en MEM.

1	2	3	4	5
No se corresponde	Una parte significativa no se corresponde	La mayoría se corresponde y los términos nuevos son de difícil comprensión	La mayoría se corresponde y los términos nuevos son de fácil comprensión	Se corresponde totalmente

Algunas opiniones, sugerencias o cuestionamientos que desee expresar:

Muchas gracias por su colaboración.

Anexo 47

Resultados de la evaluación de los indicadores por los expertos					
Indicadores	Categorías				
	MA	BA	A	PA	I
1	X				
2	X				
3	X				
4	X				
5	X				
6	X				
7	X				
8	X				
9	X				
10	X				
11	X				
12	X				
13	X				
14	X				
15	X				
16	X				
17	X				
18	X				
19	X				
20		X			
21		X			
Total	28	2	0	0	0

Anexo 48

Tabla de índices de indicadores, de dimensiones y de constructo						
Dimensión	Índices de indicadores				Índice-dimensión	Categoría
	1	2	3	4		
Poder descriptivo	100	100	100		100,0	Muy adecuado
Poder explicativo	100	100	100		100,0	Muy adecuado
Rigor y especificidad	100	100	100		100,0	Muy adecuado
Alcance	100	100			100,0	Muy adecuado
Posibilidad de refutación	100	100			100,0	Muy adecuado
Poder predictivo	100	100	100	100	100,0	Muy adecuado
Poder de replicación	100	100	75	75	87,5	Muy adecuado
Índice de calidad del modelo					97,6	Muy adecuado

Anexo 49

Indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional
Indicadores
1. Dimensión afectivo-motivacional
1.1. Interés por resolver la tarea.
1.2. Actitud ante la necesidad de información.
1.3. Actitud ante los obstáculos.
1.4. Estado de ánimo mientras resuelve la tarea.
1.5. Interés por resolver otras tareas.
1.6. Actitud ante los elogios de los otros.
1.7. Actitud ante las críticas de los otros.
2. Dimensión comunicacional
2.1. Solicitud de ayuda.
2.2. Prestación de ayuda a los demás.
2.3. Intercambio de información sobre la resolución de la tarea con los compañeros.
2.4. Descripción del proceso seguido.
2.5. Atención al discurso del docente.
2.6. Atención al discurso de sus compañeros.
2.7. Actuación ante las preguntas del docente.
2.8. Actuación ante las preguntas de sus compañeros.
2.9. Valoración de la tarea.

Anexo 50

Guía de observación del desempeño de los alumnos y alumnas en la resolución de tareas relativas a la aplicación de las técnicas

Objetivo: obtener datos fiables sobre el desempeño de los alumnos en la resolución de una tarea donde se aplican las técnicas relativas a la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas.

Indicadores a observar	Sí (B)	Con impulsos (R)	No (M)	No se ajusta
1. Relativos a la dimensión afectivo-motivacional				
Comienza a actuar después de orientada la tarea.				
Busca información.				
Se enfrenta a los obstáculos.				
Se alegra mientras resuelve la tarea.				
Solicita tareas adicionales cuando termina de resolver la orientada.				
Lo estimulan los elogios de los otros.				
Lo estimulan las críticas de los otros.				
2. Relativos a la dimensión comunicacional				
Solicita ayuda.				
Presta ayuda a los demás.				
Intercambia información sobre la resolución de la tarea con algún compañero.				
Es capaz de describir el proceso seguido.				
Presta atención al discurso del docente.				
Presta atención al discurso de sus compañeros.				
Responde las preguntas que le hace el docente.				
Responde las preguntas de sus compañeros.				
Expresa valoraciones de la tarea.				
3. Relativos a la dimensión cognitivo-instrumental				
Denota las extensiones de los conceptos.				
Considera los posibles mapas de extensiones.				
Elige a priori uno o varios mapas de extensiones, como representaciones posibles de la relación conceptual.				
Utiliza expresiones simbólicas.				
Utiliza proposiciones conjuntistas.				
Formula preguntas.				
Responde las preguntas.				
Formula proposiciones conceptuales.				
Argumenta o demuestra las proposiciones conceptuales que formula.				
Transfiere información a un mapa de extensiones.				

Guía de observación del desempeño de los alumnos y alumnas en la resolución de las tareas relativas a la aplicación de proposiciones que expresan relaciones conceptuales

Objetivo: obtener datos fiables sobre el desempeño de los alumnos en la resolución de una tarea donde se aplican proposiciones que expresan relaciones conceptuales clásicas entre conceptos.

Indicadores a observar **1. Relativos a la dimensión afectivo-motivacional**	Sí (B)	Con impulsos (R)	No (M)	No se ajusta
Comienza a actuar después de orientada la tarea.				
Busca información.				
Se enfrenta a los obstáculos.				
Se alegra mientras resuelve la tarea.				
Solicita tareas adicionales cuando termina de resolver la orientada.				
Lo estimulan los elogios de los otros.				
Lo estimulan las críticas de los otros.				
2. Relativos a la dimensión comunicacional				
Solicita ayuda.				
Presta ayuda a los demás.				
Intercambia información sobre la resolución de la tarea con algún compañero.				
Es capaz de describir el proceso seguido.				
Presta atención al discurso del docente.				
Presta atención al discurso de sus compañeros.				
Responde las preguntas que le hace el docente.				
Responde las preguntas de sus compañeros.				
Expresa valoraciones de la tarea.				
3. Relativos a la dimensión cognitivo-instrumental				
Identifica				
Ejemplifica				
Cita no-ejemplos				
Argumenta utilizando las proposiciones que representan la relación conceptual clásica.				

Anexo 51

Modelo estadístico para el análisis del desempeño de los alumnos y alumnas en pruebas referidas a la dimensión cognitivo-instrumental de la “integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas”

1. Variables

1.1. Subíndices

i: subdimensión (i:1, 2).

j: indicador (tipo de tarea; en la primera subdimensión representa los tipos de tareas parciales en que se descompone la pregunta).

k: tarea de uno de los tipos expresados en los indicadores (en el caso de la subdimensión 1, denota tareas parciales).

p: número de orden de la pregunta dirigida al dominio de las técnicas. Cada pregunta es una tarea de los tipos de la tabla 2, p. 60, capítulo II.

1.2. Valores de subíndices

N: número de preguntas de la prueba, dirigidas al dominio de las técnicas ($p:\overline{1,N}$).

N_i: número de indicadores de la subdimensión i ($j:\overline{1,N_i}$).

N_{ij}: número de tareas del tipo j correspondientes a la subdimensión i ($k:\overline{1,N_{ij}}$). Este valor depende de la prueba.

1.3. Variables estadísticas

A_{ijk}: variable que representa el desempeño del alumno en la resolución de la tarea k del tipo j, relativo a la subdimensión i. A esta variable se le asigna un valor de la escala de medición utilizando matrices de valoración.

1.4. Índices

I_{ijk}: representa el desempeño del alumno en la resolución de la tarea k del tipo j, relativo a la subdimensión i. Se obtiene a partir de A_{ijk} por conversión.

I_{ij}: representa el desempeño del alumno en la resolución de todas las tareas del tipo j, relativo a la subdimensión i. Permite utilizar varias tareas para evaluar el mismo indicador, de manera que se puedan incluir diferentes directrices del contenido matemático (triangulación).

I_i: representa el desempeño del alumno en la resolución de todas las tareas relativas a la subdimensión i.

I: representa el desempeño del alumno en la resolución de todas las tareas de la dimensión cognitivo-instrumental.

$I_1^{(p)}$: representa el desempeño del alumno en la pregunta p dirigida a medir el dominio de las técnicas. Como las preguntas son tareas de los tipos representados en la tabla 2, p. 60, permite realizar un análisis del desempeño del alumno por tipos de tareas.

1.5. Coeficientes de ponderación de los índices

C_{ijk}: nivel de desempeño cognitivo que exige la tarea k.

C_{ij}: peso relativo del indicador j en la subdimensión i.

C_i: peso relativo de la subdimensión i dentro de la dimensión cognitivo-instrumental.

$C_{jk}^{(p)}$: nivel de desempeño cognitivo que exige la tarea parcial k, incluida en la tarea p referida a la subdimensión 1.

$$C_{jk}^{(p)} = \begin{cases} C_{1jk}, \text{ si la tarea parcial k está incluida en la tarea p} \\ 0, \text{ si la tarea parcial k no está incluida en la tarea p} \end{cases}$$

2. Valor de los coeficientes de ponderación

C_{ijk}: este coeficiente toma el valor 1, 2 ó 3, en dependencia del nivel de desempeño cognitivo que exija la tarea.

C_{ij}: si el indicador j se mide en la prueba, los valores de este coeficiente se asignan según la tabla. En caso contrario asume el valor cero.

Coeficientes C_{ij}										
i	j									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	3
2	2	3	3	1						

C_i: Debido al peso de la subdimensión 1 en la dimensión cognitivo-instrumental, se hace C_1=2 y C_2=1. Si en la prueba no se mide la subdimensión i, C_i=0.

3. Fórmulas para los índices

Para calcular el valor de I_{ijk} correspondiente a A_{ijk}, se ordena de menor a mayor la escala de medición del indicador, se divide 100 por el número de elementos de la escala de medición disminuido en uno, después se multiplica ese resultado por el número de orden de A_{ijk} disminuido en uno y finalmente se redondea este producto a entero.

El resto de los índices se calculan por las fórmulas siguientes:

$$I_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{ij}} C_{ijk} I_{ijk}}{\sum_{k=1}^{N_{ij}} C_{ijk}}, \; I_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} I_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_i} C_{ij}}, \; I = \frac{\sum_{i=1}^{2} C_i I_i}{\sum_{i=1}^{2} C_i}, \; I_1^{(p)} = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_{1j}} C_{jk}^{(p)} I_{ijk}}{\sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_{ij}} C_{jk}^{(p)}}$$

4. Acotamiento de los índices

Todos los índices toman valores del intervalo [0, 100].

Modelo estadístico para el análisis de la integración conceptual por directrices del contenido matemático.

1. Variables

Se mantienen las notaciones del modelo anterior y se introducen algunas adicionales:

d: número de la directriz del contenido matemático.

Como en la Educación Preuniversitaria las magnitudes aparecen insertadas en el resto de las directrices del contenido matemático, no se realizará un análisis específico de esta directriz, de manera que d toma seis valores, según las especificaciones siguientes:

1: números y conjuntos.
2: la variable como número general.
3: ecuaciones, inecuaciones y sistemas.
4: relaciones y funciones
5: geometría-trigonometría.
6: estadística, combinatoria y probabilidades.

Se introduce el coeficiente $C_{ijk}^{(d)}$ con el objetivo de calcular el índice correspondiente a cada directriz del contenido matemático por tipo de tarea.

$$C_{ijk}^{(d)} = \begin{cases} \mathrm{C_{ijk}}, \text{ si la tarea k corresponde a la directriz d} \\ 0, \text{ si la tarea k no corresponde a la directriz d} \end{cases}$$

$I_{ij}^{(d)}$: índice correspondiente al tipo de tarea j de la dimensión i para la directriz de contenido d.

$I_{i}^{(d)}$: índice correspondiente a la dimensión i para la directriz de contenido d.

$I^{(d)}$: índice correspondiente a la directriz de contenido d.

2. Fórmulas para índices

$$I_{ij}^{(d)} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{ij}} C_{ijk}^{(d)} I_{ijk}}{\sum_{k=1}^{N_{ij}} C_{ijk}^{(d)}}, \; I_{i}^{(d)} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{i}} C_{ij} I_{ij}^{(d)}}{\sum_{j=1}^{N_{i}} C_{ij}}, \; I^{(d)} = \frac{\sum_{i=1}^{2} C_{i} I_{i}^{(d)}}{\sum_{i=1}^{2} C_{i}}$$

Estos índices toman valores del intervalo [0, 100].

Anexo 52

Prueba para la evaluación de técnicas dirigidas a la determinación de relaciones conceptuales

Alumno (a): ____________________________ No. ____ Fecha ________ D: ______

Esta prueba tiene como objetivo, medir el dominio de técnicas para determinar relaciones entre conceptos matemáticos y representarlas mediante proposiciones, diagramas de Venn y los signos de las relaciones y operaciones de las teoría de conjuntos ($=$, $\neq$, $\subset$, $\not\subset$, $\cap$ y $\setminus$). Al responder cada pregunta puedes comenzar por el inciso que desees.

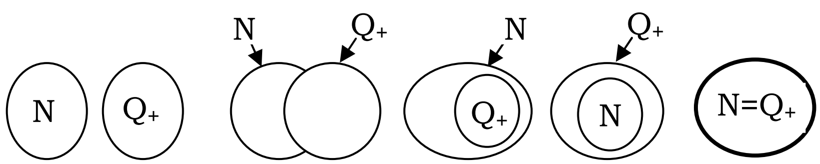
Cuestionario

1. A continuación se dan dos proposiciones que representan, de forma verbal, una relación entre el conjunto de los números naturales (N) y el de los números fraccionarios (Q_+).

   P1: todo número natural es un número fraccionario.

   P2: existen números fraccionarios que no son números naturales.

   a) ¿Cuál de los diagramas de Venn siguientes indica la relación entre N y Q_+ que se representa con las proposiciones?

   b) Representa la relación entre N y Q_+**,** utilizando símbolos de la teoría de conjuntos.

2. En la Secundaria Básica estudiaste los conceptos de función y de función lineal. Denotamos por F el conjunto de todas las funciones y por L, el de todas las funciones lineales.

   a) Marca con una X las proposiciones que representan la relación entre F y L:

   __ Ninguna función lineal es una función.

   __ Ninguna función es una función lineal.

   __ Toda función, es una función lineal.

   __ Existen funciones, que no son funciones lineales.

   __ Existen funciones lineales que no son funciones.

   __ Toda función lineal, es una función.

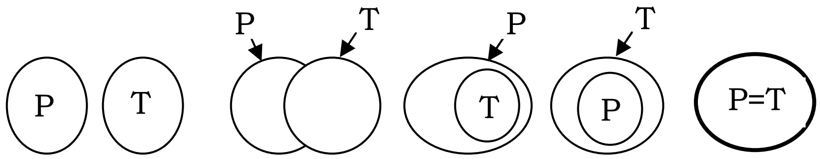
   b) Argumenta cada una de las proposiciones que seleccionaste en el inciso a.

   c) Representa mediante un diagrama de Venn la relación entre los conjuntos F y L.

3. Un "***cuadrilátero bello***", es un cuadrilátero con un eje de simetría axial. Denotamos con B el conjunto de todos los cuadriláteros bellos; con T, el conjunto de todos los trapecios y con P, el de todos los paralelogramos.

   a) Escribe las proposiciones que representan la relación entre T y P.

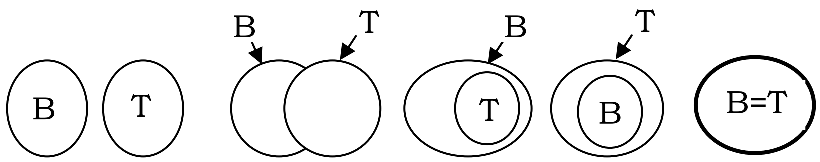
b) ¿Cuál de los diagramas de Venn siguientes representa la relación entre T y P**?**



c) Escribe las proposiciones que representan la relación entre B y T.

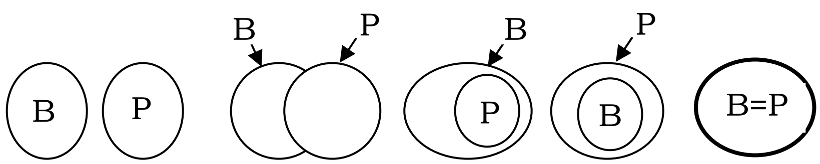
d) Argumenta las proposiciones del inciso c.

e) ¿Cuál de los diagramas de Venn siguientes representa la relación entre B y T?



f) Escribe las proposiciones que representan la relación entre B y P.

g) ¿Cuál de los diagramas de Venn siguientes representa la relación entre B y P**?**



h) Construye un diagrama de Venn único que represente las relaciones entre B, T y P.

4. Desde la Secundaria Básica has estudiado los conceptos de binomio, trinomio y polinomio. Denotamos con B el conjunto de todos los binomios; con T**,** el de todos los trinomios y con P**,** el de todos los polinomios.

   a) Escribe las proposiciones que representan las relaciones entre B, T y P.

   b) Representa mediante un diagrama de Venn único la relación entre los conjuntos B, T y P.

   c) Representa la relación entre B, T y P, utilizando símbolos de la teoría de conjuntos.

5. Un “***número rectangular***”, es un número natural que se obtiene como el producto de dos números consecutivos. Denotamos con A el conjunto de los números rectangulares y con B, el de los números primos.

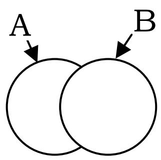
Se conoce que son verdaderas las proposiciones siguientes:

P1: Existen números rectangulares que no son números primos.

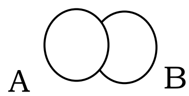
P2: Existen números primos que no son números rectangulares.

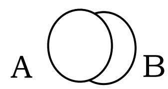
P3: Existen números rectangulares primos.

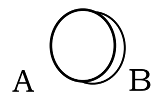
A partir de estas proposiciones se ha dibujado un diagrama de Venn que representa la relación entre los conceptos de número rectangular y número primo, sin tener en cuenta la cantidad de elementos de A, B y de otros conjuntos que se representan en el gráfico.



a) ¿Cuál de los diagramas siguientes representa mejor la relación entre los conceptos de número rectangular y de número primo?







b) Escribe las proposiciones en que te basaste para seleccionar el diagrama en el inciso anterior.

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 1					
Inciso	Categoría				
	0	1	2	3	4
a	Identifica un diagrama que no representa el mapa de proposiciones	Identifica el diagrama que representa el mapa de proposiciones			
b	El mapa simbólico está formado por expresiones elementales incorrectas	El mapa simbólico está formado por expresiones elementales correctas y por expresiones incorrectas	El mapa simbólico contiene todas las expresiones elementales correctas necesarias, pero contiene además expresiones incorrectas	El mapa simbólico está formado sólo por expresiones elementales correctas, pero es incompleto	El mapa simbólico es correcto

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 2					
Inciso	Categoría				
	0	1	2	3	4
a	Todas las proposiciones que selecciona son falsas o no selecciona ninguna	Selecciona sólo una proposición verdadera y otras proposiciones falsas	Selecciona sólo una proposición y ésta es verdadera	Selecciona las dos proposiciones verdaderas y además otras proposiciones	Selecciona sólo las dos proposiciones verdaderas
b	Argumenta incorrectamente o no argumenta	Argumenta y comete entimema	Argumenta correctamente		
c	Construye un diagrama que no representa el mapa de proposiciones	Construye un diagrama que representa el mapa de proposiciones			
Nota: la argumentación de cada proposición se mide de forma independiente y después se calcula un índice de argumentación.					

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 3					
Inciso	Categoría				
	0	1	2	3	4
a, c y f	Todas las proposiciones son falsas o no escribe proposiciones	Escribe algunas de las proposiciones verdaderas y proposiciones falsas	Escribe todas las proposiciones verdaderas y algunas falsas	Escribe sólo algunas de las proposiciones verdaderas	Escribe únicamente todas las proposiciones verdaderas
b, e y g	Identifica un diagrama que no representa el mapa de proposiciones	Identifica el diagrama que representa el mapa de proposiciones			
d	Argumenta incorrectamente o no argumenta	Argumenta y comete entimema	Argumenta correctamente		
h	En el diagrama no se representa correctamente ninguno de los mapas de extensiones de dos conceptos	En el diagrama se representa correctamente sólo uno de los mapas de extensiones de dos conceptos	En el diagrama se representan correctamente sólo dos mapas de extensiones de dos conceptos	En el diagrama se representan correctamente los tres mapas de extensiones de dos conceptos, pero es incorrecto	El diagrama es correcto

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 4						
I.	Categoría					
	0	1	2	3	4	5
a	Todas las proposiciones son falsas o no escribe proposiciones	Escribe algunas de las proposiciones verdaderas y proposiciones falsas	Escribe todas las proposiciones verdaderas y algunas falsas	Escribe sólo algunas de las proposiciones referidas a las relaciones entre dos de las extensiones, pero no todas	Escribe sólo todas las proposiciones verdaderas necesarias referidas a dos conceptos	El mapa de proposiciones es correcto
b	En el diagrama no se representa correctamente ninguno de los mapas de extensiones de dos conceptos	En el diagrama se representa correctamente sólo uno de los mapas de extensiones de dos conceptos	En el diagrama se representan correctamente dos de los mapas de extensiones de dos conceptos	En el diagrama se representan los tres mapas de extensiones de dos conceptos, pero es incorrecto	El diagrama es correcto	
c	El mapa simbólico está formado por expresiones elementales incorrectas	El mapa simbólico está formado por expresiones elementales correctas y por expresiones incorrectas	El mapa simbólico contiene todas las expresiones elementales correctas necesarias, pero contiene además expresiones incorrectas	El mapa simbólico está formado sólo por expresiones elementales correctas, pero es incompleto	El mapa simbólico es correcto	

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 5					
Inciso	Categoría				
	0	1	2	3	4
a	Identifica un diagrama que no representa el mapa de proposiciones	Identifica el diagrama que representa el mapa de proposiciones			
b	Todas las proposiciones son falsas o no escribe proposiciones	Escribe algunas de las proposiciones verdaderas y proposiciones falsas	Escribe todas las proposiciones verdaderas y algunas falsas	Escribe sólo algunas de las proposiciones verdaderas	Escribe únicamente todas las proposiciones verdaderas

Anexo 53

Prueba para la evaluación de relaciones conceptuales en décimo grado

Alumno (a): _____________________________ No. ____ Fecha ________ D: ______

El objetivo de esta prueba es la evaluación del aprendizaje en lo que respecta a las ***relaciones conceptuales.*** Es por eso que a la hora de argumentar una afirmación referida a un concepto no puedes utilizar la definición, sino que debes valerte de proposiciones que relacionan este concepto con otros estudiados. Por ejemplo, si se te pide ejemplificar el concepto de cuadrilátero y argumentar, podrías construir un cuadrado y en lugar de argumentar mediante las propiedades de la definición de cuadrilátero:1) es un polígono y 2) tiene cuatro lados, utilizarías la proposición conocida por ti: "todo cuadrado es un cuadrilátero".

Cuestionario

1. Escribe V o F según corresponda y ***argumenta*** en los casos 2 y 3 de cada inciso, utilizando la relación conceptual con el caso 1.

a) El número $\sqrt{2}$ es: 1) ___ Irracional 2) ___ Racional 3) ___ Natural.

Argumentación:

2) ____

____

3) ____

____

b) El número $-\frac{4}{3}$ es: 1) ___ Racional 2) ___ Irracional 3) ___ Real.

Argumentación:

2) ____

____

3) ____

____

c) El cuadrilátero PQRS representado es: 1) __ Un rombo 2) ___ Un trapecio 3) __ Un trapezoide.

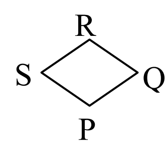
Argumentación:

2) ____

____

3) ____

____



$\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$,

$\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ y

$\overline{PQ} = \overline{QR}$

d) La expresión $x^2 + 4x + 3$ es: 1) __ Un trinomio 2) __Un binomio.

Argumentación:

2) ____

____

e) La función representada por $y = 3$, es: 1) __ Constante 2) __ Lineal
Argumentación:
2) ____
____

f) La ecuación $x^2 + 3x + 4 = 6$ es: 1) __ Cuadrática 2) __ Lineal.
Argumentación:
2) ____
____

2. ***Ejemplifica y argumenta*** utilizando tus conocimientos sobre las relaciones conceptuales estudiadas.

a) Un ejemplo de número entero es ___ porque ________________________________
____

b) Un ejemplo de término es ________ porque ________________________________
____

c) Un ejemplo de paralelogramo es el representado abajo porque ________________
____

	Construirlo dentro del cuadro

d) Un ejemplo de función es la representada por la ecuación ___________________
porque____
____

e) Un ejemplo de función lineal es la representada por la ecuación ______________
porque ____
____

f) Un ejemplo de ecuación es ________________ porque ______________________
____

g) Un ejemplo de número no fraccionario es ____ porque ______________________
____

h) Un ejemplo de función lineal no creciente es _______________________ porque
____

i) Un ejemplo de cuadrilátero no rectángulo es el representado abajo porque________
____

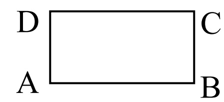
	Construirlo dentro del cuadro

j) Un ejemplo de ecuación no cuadrática es ________________ porque ___________
____

k) Un ejemplo de una expresión algebraica que no es un monomio es ____________ porque ____

3. En cada uno de los incisos de esta pregunta se da una proposición y varias ***argumentaciones***, pero sólo una de ellas es correcta. Marca con una X la ***argumentación*** correcta:

a) El cuadrilátero ABCD representado, es un trapecio ***porque***:



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\angle ABC = 90°$

__ Todo rectángulo es un trapecio.

__ Es un cuadrilátero convexo y todo cuadrilátero convexo es un trapecio.

__ Es un rectángulo y todo rectángulo es un trapecio.

__ Es un rectángulo.

b) El número $\frac{3}{2}$, es un número racional ***porque***:

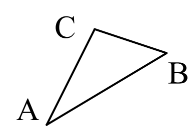
__ Es un número fraccionario y todo número fraccionario es un número racional.

__ Puede representarse mediante una expresión decimal y todo número que puede representarse mediante una expresión decimal es racional.

__ Es un número fraccionario.

__ Todo número fraccionario es un número racional.

c) El triángulo ABC representado no es isósceles ***porque***:



$\overline{AB} \neq \overline{BC}$, $\overline{BC} \neq \overline{AC}$ y $\overline{AB} \neq \overline{AC}$

__ Es acutángulo y ningún triángulo acutángulo es isósceles.

__ Es escaleno y ningún triángulo escaleno es isósceles.

__ Ningún triángulo escaleno es isósceles.

__ Es escaleno.

d) La expresión algebraica 2x + 3y, es un polinomio ***porque***:

__ Es un binomio.

__ Todo binomio es un polinomio.

__ Es un binomio y todo binomio es un polinomio.

__ Contiene dos variables y toda expresión algebraica con dos variables es un polinomio.

e) La ecuación $y = -3x - 2$, $x \in \Re$, no representa una función lineal creciente, (variable independiente x, variable dependiente y), ***porque***:

__ Representa una función lineal decreciente y ninguna función lineal decreciente es creciente.

__ Representa una función lineal decreciente.

__ Ninguna función lineal decreciente es creciente.

__ Tiene un único cero y ninguna función lineal con un único cero es creciente.

f) La ecuación $3x + 2 = 6$, $x \in \Re$, no representa una función lineal ***porque***:

__ Contiene una sola variable y ninguna ecuación con una sola variable representa una función lineal.

__ Toda función lineal es una función.

__ No representa una función.

__ No representa una función y toda ecuación que no representa una función, no representa una función lineal.

g) La ecuación $3x - 2 = 1$, $x \in \Re$, no es una ecuación cuadrática ***porque***:

__ Es una ecuación lineal.

__ Ninguna ecuación lineal es una ecuación cuadrática.

__ Es una ecuación lineal y ninguna ecuación lineal es una ecuación cuadrática.

__ Tiene una única solución y ninguna ecuación con una única solución es cuadrática.

Matriz de valoración para la calificación de la prueba				
Ítems de la pregunta	Categoría			
	0	1	2	3
1	Coloca falso siendo verdadero o viceversa	Coloca correctamente el valor de verdad, pero no argumenta, lo hace incorrectamente o no se ajusta a la exigencia	Coloca correctamente el valor de verdad y realiza una argumentación mediante entimema	Coloca correctamente el valor de verdad y argumenta correctamente según la exigencia
2	No ejemplifica o lo hace incorrectamente	Ejemplifica y no argumenta, argumenta incorrectamente o no se ajusta a la exigencia	Ejemplifica y argumenta mediante entimema	Ejemplifica y argumenta correctamente según la exigencia
3	Selecciona una argumentación incorrecta	Selecciona una argumentación entimémica	Selecciona la argumentación correcta	

Anexo 54

Prueba para la evaluación de técnicas dirigidas a la determinación de relaciones conceptuales

Alumno (a): ____________________________ No. ____ Fecha ________ D: ______

Esta prueba tiene como objetivo, medir el dominio de técnicas para determinar relaciones entre conceptos matemáticos y representarlas mediante proposiciones, mapas de extensiones y mapas simbólicos. Al responder cada pregunta puedes comenzar por el inciso que desees y debes expresar por escrito el proceso llevado a cabo para llegar a cada respuesta.

Cuestionario

1. A continuación se dan proposiciones que representan, de forma verbal, una relación entre el conjunto de los números racionales (Q) y el de los números reales ($\Re$).

   P_1: todo número racional es un número real.

   P_2: existen números reales que no son números racionales.

   P_3: Existen mucho más números reales que números racionales.

   P_4: Existen tantos números reales no racionales, como números reales.

   a) Construye un mapa de extensiones que represente gráficamente la relación entre los conceptos de número racional y de número real, que se expresa en las proposiciones P_1 y P_2.

   b) Representa, utilizando un mapa simbólico, la relación entre Q **y** $\Re$, expresada en las proposiciones P_1 y P_2.

   c) Construye un mapa de extensiones donde se represente gráficamente la relación entre Q y $\Re$, que expresan las proposiciones P_1, P_2, P_3 y P_4.

2. Denotamos por A el conjunto de las funciones cuadráticas y por B el de las funciones monótonas crecientes.

   a) Marca con una X las proposiciones que representan la relación entre los conceptos de función cuadrática y función monótona creciente.

   __ Ninguna función cuadrática es monótona creciente.

   __ Existen funciones cuadráticas que son monótonas crecientes.

   __ Existen funciones monótonas crecientes que no son funciones cuadráticas.

   __ Toda función monótona creciente es una función cuadrática.

   __ Existen funciones cuadráticas que no son monótonas crecientes.

   b) Argumenta cada una de las proposiciones que seleccionaste en el inciso a.

   c) Representa mediante un mapa de extensiones la relación entre los conceptos de función cuadrática y función monótona creciente, que se expresa en las proposiciones que seleccionaste en el inciso a.

3. Un “***cuadrilátero hermoso***”, es un cuadrilátero en que una de sus diagonales lo divide en dos triángulos iguales. Denotamos con E el conjunto de los cuadriláteros hermosos; con R, el conjunto de los rectángulos y con P, el de todos los paralelogramos.
   a) Escribe las proposiciones que representan las relaciones entre los conceptos de cuadrilátero hermoso, rectángulo y paralelogramo, sin tener en cuenta la cardinalidad.
   b) Argumenta las proposiciones escritas que representan la relación entre los conceptos de cuadrilátero hermoso y rectángulo.
   c) Representa en un mapa de extensiones único las relaciones entre estos tres conceptos.
4. El trabajo con variables es una temática que has estudiado desde la educación primaria. En ella te has apropiado de los conceptos variable, monomio y fracción algebraica. Denotamos por A el conjunto de las variables, por B el de los monomios y por C el de las fracciones algebraicas.
   a) Escribe las proposiciones que representan las relaciones entre los conceptos de variable, monomio y fracción algebraica sin tener en cuenta la cardinalidad.
   b) Representa mediante un mapa de extensiones único, la relación entre los conceptos de variable, monomio y fracción algebraica.
   c) Representa mediante un mapa simbólico la relación entre los conceptos de variable, monomio y fracción algebraica.
5. Un número natural se denomina ***triangular,*** si es la suma de números consecutivos comenzando por el 1.
   a) Escribe las proposiciones que representan las relaciones entre los conceptos de número triangular y número primo. Incluye aquellas que se refieren a la relación entre sus cardinales.
   b) Representa en un mapa de extensiones las relaciones entre estos dos conceptos que expresaste mediante las proposiciones.

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 1					
Inciso	Categoría				
	0	1	2	3	4
a	Construye un diagrama que no representa el mapa de proposiciones	Construye un diagrama que representa el mapa de proposiciones			
b	El mapa simbólico está formado por expresiones elementales incorrectas	El mapa simbólico está formado por expresiones elementales correctas y por expresiones incorrectas	El mapa simbólico contiene todas las expresiones elementales correctas necesarias, pero contiene además expresiones incorrectas	El mapa simbólico está formado sólo por expresiones elementales correctas, pero es incompleto	El mapa simbólico es correcto
c	Construye un diagrama que no representa el mapa de proposiciones	Construye un diagrama que representa el mapa de proposiciones			

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 2					
Inciso	Categoría				
	0	1	2	3	4
a	Todas las proposiciones que selecciona son falsas o no selecciona ninguna	Selecciona sólo hasta dos proposiciones verdaderas y otras proposiciones falsas	Selecciona sólo hasta dos proposiciones y éstas son verdaderas	Selecciona las tres proposiciones verdaderas y además otras proposiciones	Selecciona sólo las tres proposiciones verdaderas
b	Argumenta incorrectamente o no argumenta	Argumenta y comete entimema	Argumenta correctamente		
c	Construye un diagrama que no representa el mapa de proposiciones	Construye un diagrama que representa el mapa de proposiciones			
Nota: la argumentación de cada proposición se mide de forma independiente y después se calcula un índice de argumentación.					

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 3						
I.	Categoría					
	0	1	2	3	4	5
a	Todas las proposiciones son falsas o no escribe proposiciones	Todas las proposiciones son verdaderas, pero falta una de las necesarias o Escribe todas las proposiciones necesarias, pero una es falsa	La suma del número de proposiciones falsas y de las que faltan para completar las necesarias es dos	La suma del número de proposiciones falsas y de las que faltan para completar las necesarias es tres	La suma del número de proposiciones falsas y de las que faltan para completar las necesarias es más de tres, pero escribe proposiciones verdaderas	El mapa de proposiciones es correcto
b	Argumenta de forma incorrecta o no argumenta	Argumenta y comete entimema	Argumenta correctamente			
c	Transfiere mal todas las proposiciones o no dibuja el mapa	La transferencia contradice dos o más proposiciones	Transfiere bien, pero el mapa de extensiones contradice una proposición verdadera que no está contenida en el mapa de proposiciones	La transferencia contradice una proposición del mapa de proposiciones	Transfiere bien, pero construye una mapa de extensiones correcto que incluye proposiciones no contenidas en el mapa del inciso a	Transfiere bien todas las proposiciones

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 4						
I.	Categoría					
	0	1	2	3	4	5
a	Todas las proposiciones son falsas o no escribe proposiciones	Todas las proposiciones son verdaderas, pero falta una de las necesarias o Escribe todas las proposiciones necesarias, pero una es falsa	La suma del número de proposiciones falsas y de las que faltan para completar las necesarias es dos	La suma del número de proposiciones falsas y de las que faltan para completar las necesarias es tres	La suma del número de proposiciones falsas y de las que faltan para completar las necesarias es más de tres, pero escribe proposiciones verdaderas	El mapa de proposiciones es correcto
b	Transfiere mal todas las proposiciones o no dibuja el mapa	La transferencia contradice dos o más proposiciones	Transfiere bien, pero el mapa de extensiones contradice una proposición verdadera que no está contenida en el mapa de proposiciones	La transferencia contradice una proposición del mapa de proposiciones	Transfiere bien, pero construye una mapa de extensiones correcto que incluye proposiciones no contenidas en el mapa del inciso a	Transfiere bien todas las proposiciones
c	El mapa simbólico está formado por expresiones elementales incorrectas	El mapa simbólico está formado por algunas de las expresiones elementales correctas y por expresiones incorrectas	El mapa simbólico contiene todas las expresiones elementales correctas necesarias, pero contiene además expresiones incorrectas	El mapa simbólico está formado sólo por expresiones elementales correctas, pero es incompleto	El mapa simbólico es correcto	

Matriz de valoración para la medición de los indicadores en la tarea 5					
Inciso	Categoría				
	0	1	2	3	4
a	Todas las proposiciones conjuntistas son falsas o no escribe proposiciones	Escribe algunas de las proposiciones conjuntas necesarias, pero no todas son verdaderas y no escribe las de cardinalidad o lo hace, pero son falsas	Escribe todas las proposiciones conjuntistas de forma correcta y no escribe de cardinalidad o éstas son falsas	Escribe todas las proposiciones conjuntistas necesarias correctamente y sólo algunas de cardinalidad o las escribe todas, pero sólo algunas son falsas.	Escribe las proposiciones necesarias de forma correcta
b	El diagrama no representa de forma correcta las relaciones conjuntistas o no lo construye	El diagrama representa de forma correcta las relaciones conjuntistas, pero las de cardinalidad están mal representadas	El diagrama es totalmente correcto		

Anexo 55

Prueba para la evaluación de relaciones conceptuales en décimo grado

Alumno (a): _____________________________ No. ____ Fecha ________ D: ______

El objetivo de esta prueba es la evaluación del aprendizaje en lo que respecta a las ***relaciones conceptuales.*** Es por eso que a la hora de argumentar una afirmación referida a un concepto no puedes utilizar la definición, sino que debes valerte de proposiciones conocidas por ti que relacionan este concepto con otros estudiados.

Cuestionario

1. Escribe V o F según corresponda y ***argumenta*** en los casos 2 y 3 de cada inciso, utilizando la relación conceptual con el caso 1.

a) El número $\sqrt{3}$ es: 1) ___ Irracional 2) ___ Fraccionario 3) ___ Entero.

Argumentación:

2) ____

____

3) ____

____

b) El número $-\frac{3}{4}$ es: 1) ___ Racional 2) ___ Irracional 3) ___ Real.

Argumentación:

2) ____

____

3) ____

____

c) El cuadrilátero PQRS representado es: 1) __ Un rectángulo 2) ___ Un paralelogramo 3) __ Un trapezoide.

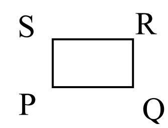
Argumentación:

2) ____

____

3) ____

____



$\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$,
$\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ y
$\angle PQR = 90°$

d) La expresión $x^2 + 5x$ es: 1) __ Un binomio 2) __ Un trinomio 3) __ Un polinomio

Argumentación:

2) ____

____

3) ____

____

e) La función representada por y = 1,5 es: 1) __ Constante 2) __ Lineal 3) __ Monótona creciente

Argumentación:
2) ____
____
3) ____
____

f) La ecuación $3x + 4 = 6$ es: 1) __ Lineal 2) __ Cuadrática 3) __ Fraccionaria.
Argumentación:
2) ____
____
3) ____
____

2. ***Ejemplifica y argumenta*** utilizando tus conocimientos sobre las relaciones conceptuales estudiadas.

a) Un ejemplo de número real es ___ porque ______________________________
____

b) Un ejemplo de polinomio es ______________ porque ________________________
____

c) Un ejemplo de trapecio es el representado abajo porque _____________________
____

Construirlo dentro del cuadro

d) Un ejemplo de función numérica es la representada por la ecuación ___________
porque____
____

e) Un ejemplo de función lineal es la representada por la ecuación _______________
porque ____
____

f) Un ejemplo de ecuación es _________________ porque _____________________
____

g) Un ejemplo de número no entero es ____ porque ____________________________
____

h) Un ejemplo de función lineal no decreciente es _____________________________
porque ____
____

i) Un ejemplo de ecuación no fraccionaria es _________________ porque _________
____

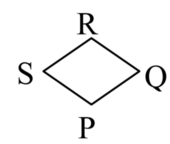
j) Un ejemplo de una expresión algebraica que no es un trinomio es _____________
porque ____

k) Un ejemplo de cuadrilátero no rombo es el representado abajo porque__________
____

Construirlo
dentro del cuadro

3. En cada uno de los incisos de esta pregunta se da una proposición y varias ***argumentaciones***, pero sólo una de ellas es correcta. Marca con una X la ***argumentación*** correcta:

a) El cuadrilátero PQRS representado, es un paralelogramo ***porque***:



$\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$,
$\overline{PS} \parallel \overline{QR}$
y
$\overline{PQ} = \overline{QR}$

__ Todo rombo es un paralelogramo.

__ Es un cuadrilátero convexo y todo cuadrilátero convexo es un paralelogramo.

__ Es un rombo y todo rombo es un paralelogramo.

__ Es un rombo.

b) El número 4, es un número entero ***porque***:

__ Es un número natural y todo número natural es un número entero.

__ Es positivo y todo número positivo es un número entero.

__ Es un número natural.

__ Todo número natural, es un número entero.

c) La expresión algebraica 5x - 3y + 3z, es un polinomio ***porque***:

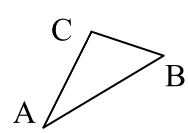
__ Es un trinomio.

__ Todo trinomio es un polinomio.

__ Es un trinomio y todo trinomio es un polinomio.

__ Contiene tres variables y toda expresión algebraica con tres variables es un polinomio.

d) El triángulo ABC representado no es rectángulo ***porque***:



$\overline{AB} \neq \overline{BC}$, $\overline{BC} \neq \overline{AC}$,
$\overline{AB} \neq \overline{AC}$ y $\angle ACB > 90°$

__ Es obtusángulo y ningún triángulo obtusángulo es rectángulo.

__ Es escaleno y ningún triángulo escaleno es rectángulo.

__ Ningún triángulo obtusángulo es rectángulo.

__ Es obtusángulo.

e) La ecuación $y = 5$, no representa una función monótona creciente (variable independiente x, variable dependiente y), ***porque***:

__ Representa una función constante y ninguna función constante es monótona creciente.

__ Representa una función constante.

__ Ninguna función constante es monótona creciente.

__ No tiene ceros y ninguna función que no tiene ceros es monótona creciente.

f) La ecuación $\frac{x+1}{x+3} = 4$, $x \in \Re$, $x \neq 3$, no es una ecuación lineal ***porque***:

__ Es una ecuación fraccionaria.

__ Ninguna ecuación fraccionaria es una ecuación lineal.

__ Es una ecuación fraccionaria y ninguna ecuación fraccionaria es lineal.

__ El dominio no es $\Re$ y ninguna ecuación cuyo dominio no es $\Re$, es lineal.

Para la calificación de esta prueba se utilizarán las mismas matrices de valoración que se emplearon en la calificación de la prueba del anexo 53.

Anexo 56

Índices correspondientes a indicadores de la subdimensión 1				
No.	Identificar/construir mapa de proposiciones	Transferir información a un mapa de extensiones	Argumentar/ demostrar	Construir mapa simbólico
1	0,0	18,2	0,0	25,0
2	48,0	90,9	0,0	75,0
3	10,0	18,2	0,0	8,3
4	62,0	65,0	8,3	16,7
5	17,5	50,0	0,0	25,0
6	25,0	9,1	19,4	33,3
7	20,0	35,0	11,1	0,0
8	52,0	45,5	11,1	33,3
9	47,0	80,0	19,4	41,7
10	72,0	85,0	22,2	75,0
11	66,0	90,9	77,8	41,7
12	14,0	36,4	0,0	33,3
13	20,0	59,1	11,1	25,0
14	10,0	90,9	16,7	58,3
15	10,0	72,7	0,0	58,3
16	25,0	20,0	8,3	25,0
17	0,0	0,0	0,0	0,0
18	10,0	59,1	16,7	75,0
19	25,0	72,7	8,3	58,3
20	39,0	80,0	19,4	41,7
21	10,0	10,0	0,0	0,0
22	25,0	55,0	8,3	66,7
23	22,0	90,0	0,0	41,7
24	10,0	40,0	0,0	25,0
25	26,0	70,0	0,0	16,7
26	76,0	80,0	11,1	50,0
Prom.	28,5	54,8	10,4	36,5

Anexo 57

Tablas de frecuencia de la distribución de los índices correspondientes a indicadores de la subdimensión 1									
Intervalo	Categoría	Identificar/ construir mapa de proposiciones		Transferir información a un mapa de extensiones		Argumentar/ demostrar		Construir mapa simbólico	
		Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
[0, 20)	Muy bajo	10	38,5	5	19,2	24	92,3	6	23,1
[20, 40)	Bajo	9	34,6	3	11,5	1	3,8	8	30,8
[40, 60)	Medio	3	11,5	6	23,1	0	0,0	8	30,8
[60, 80)	Alto	4	15,4	4	15,4	1	3,8	4	15,4
[80, 100]	Muy alto	0	0,0	8	30,8	0	0,0	0	0,0
Total		26	100,0	26	100,0	26	100,0	26	100,0

Anexo 58

Índices relativos a la subdimensión 1 y a sus tipos de tareas						
No.	Tipos de tareas					Subdimen. 1
	I	II	III	IV	V	
1	83,3	0,0	0,0	0,0	7,1	10,8
2	83,3	50,0	83,3	63,8	53,6	67,1
3	50,0	16,7	33,3	0,0	0,0	20,4
4	0,0	62,5	83,3	61,3	50,0	55,9
5	83,3	4,2	0,0	12,5	35,7	19,5
6	0,0	29,2	0,0	12,5	28,6	14,2
7	33,3	50,0	33,3	0,0	21,4	29,4
8	0,0	16,7	33,3	67,5	39,3	31,0
9	50,0	62,5	16,7	67,5	46,4	46,1
10	83,3	8,3	33,3	73,8	82,1	54,1
11	83,3	100,0	33,3	71,3	85,7	69,6
12	33,3	16,7	0,0	47,5	7,1	14,3
13	83,3	0,0	100,0	12,5	28,6	50,3
14	83,3	75,0	33,3	37,5	35,7	49,1
15	83,3	50,0	33,3	25,0	28,6	40,6
16	83,3	29,2	33,3	0,0	17,9	29,1
17	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
18	83,3	41,7	0,0	43,8	25,0	28,9
19	83,3	62,5	33,3	31,3	35,7	45,7
20	83,3	62,5	83,3	28,8	39,3	58,0
21	33,3	16,7	0,0	0,0	0,0	7,4
22	0,0	29,2	33,3	25,0	57,1	35,7
23	83,3	4,2	33,3	61,3	35,7	36,3
24	83,3	50,0	0,0	0,0	14,3	25,1
25	33,3	50,0	33,3	58,8	21,4	35,9
26	0,0	4,2	100,0	83,8	75,0	57,5
Prom.	53,8	34,3	33,3	34,0	33,5	35,8

Anexo 59

Tablas de frecuencia de la distribución de los índices correspondientes a los tipos de tareas de la subdimensión 1

Intervalo	Cat.	I		II		III		IV		V		Subdim. 1	
		Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%
[0, 20)	Muy bajo	6	23,1	11	42,3	9	34,6	10	38,5	7	26,9	6	23,1
[20, 40)	Bajo	4	15,4	3	11,5	12	46,2	5	19,2	12	46,2	9	34,6
[40, 60)	Medio	2	7,7	6	23,1	0	0,0	3	11,5	4	15,4	9	34,6
[60, 80)	Alto	0	0,0	5	19,2	0	0,0	7	26,9	1	3,8	2	7,7
[80, 100]	Muy alto	14	53,8	1	3,8	5	19,2	1	3,8	2	7,7	0	0,0
Total		26	100	26	100	26	100	26	100	26	100	26	100

Anexo 60

Índices relativos a la subdimensión 1, por directrices del contenido matemático				
No.	Índices por directrices			
	d1	d2	d4	d5
	Números y conjuntos	La variable como número general	Relaciones y funciones	Geometría-trigonometría
1	27,8	0,0	0,0	7,1
2	83,3	63,8	50,0	53,6
3	38,9	0,0	16,7	0,0
4	55,6	61,3	62,5	50,0
5	27,8	12,5	4,2	35,7
6	0,0	12,5	29,2	28,6
7	33,3	0,0	50,0	21,4
8	22,2	67,5	16,7	39,3
9	27,8	67,5	62,5	46,4
10	50,0	73,8	8,3	82,1
11	50,0	71,3	100,0	85,7
12	11,1	47,5	16,7	7,1
13	94,4	12,5	0,0	28,6
14	50,0	37,5	75,0	35,7
15	50,0	25,0	50,0	28,6
16	50,0	0,0	29,2	17,9
17	0,0	0,0	0,0	0,0
18	27,8	43,8	41,7	25,0
19	50,0	31,3	62,5	35,7
20	83,3	28,8	62,5	39,3
21	11,1	0,0	16,7	0,0
22	22,2	25,0	29,2	57,1
23	50,0	61,3	4,2	35,7
24	27,8	0,0	50,0	14,3
25	33,3	58,8	50,0	21,4
26	66,7	83,8	4,2	75,0
Prom.	40,2	34,0	34,3	33,5

Anexo 61

Índices correspondientes a la subdimensión 2 y a sus tipos de tareas por alumno					
No.	Argumentar	Identificar/ argumentar	Ejemplificar/ argumentar	Citar no-ejemplos/ argumentar	Subdimensión 2
1	35,7	23,3	27,5	46,6	32,9
2	100	36,5	16,5	26,6	37,0
3	85,7	23,2	22,0	13,2	28,9
4	71,4	19,8	33,2	40,0	36,8
5	50,0	19,8	22,0	19,8	24,7
6	71,4	23,2	27,5	33,2	34,2
7	42,9	16,6	16,5	13,2	19,4
8	85,7	6,7	22,0	20,0	26,2
9	100	33,3	22,0	26,8	37,7
10	42,9	16,6	38,8	26,6	29,6
11	85,7	46,7	50,0	60,2	57,1
12	100	36,5	44,3	46,6	50,7
13	85,7	43,3	33,0	53,4	49,3
14	100	29,8	44,2	33,2	44,9
15	71,4	43,2	44,2	66,6	54,2
16	50,0	16,5	27,5	26,6	27,3
17	42,9	19,8	0,0	0,0	11,8
18	57,1	43,3	33,0	46,8	43,3
19	85,7	13,2	44,3	6,6	30,6
20	57,1	26,5	27,5	40,0	35,0
21	57,1	36,6	16,5	13,2	27,1
22	71,4	33,2	22,0	19,8	31,6
23	57,1	19,8	27,7	6,6	23,6
24	92,9	23,2	33,2	19,8	35,0
25	85,7	33,3	27,5	53,4	44,9
26	64,3	33,2	38,8	26,6	37,4
Prom.	71,2	27,6	29,3	30,2	35,0

Anexo 62

Tablas de frecuencia correspondientes a la subdimensión 2 y a sus tipos de tareas											
Intervalo	Categoría	tipos de tareas								Subdim. 2	
		Argumentar		Identificar/ argumentar		Ejemplificar/ argumentar		Citar no-ejemplos/ argumentar			
		Total	%	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
[0, 20)	Muy bajo	0	0	9	34,6	4	15,4	9	34,6	2	7,7
[20, 40)	Bajo	1	3,8	13	50,0	17	65,4	8	30,8	17	65,4
[40, 60)	Medio	9	34,6	4	15,4	5	19,2	7	26,9	7	26,9
[60, 80)	Alto	5	19,2	0	0	0	0	2	7,7	0	0
[80,100]	Muy alto	11	42,3	0	0	0	0	0	0	0	0
Total		26	100	26	100	26	100	26	100	26	100

Anexo 63

Índices por directrices del contenido matemático relativos a la subdimensión 2					
No.	Índices por directrices				
	d1	d2	d3	d4	d5
	Números y conjuntos	La variable como número general	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	Relaciones y funciones	Geometría-trigonometría
1	28,5	47,4	26,0	31,0	27,1
2	38,0	42,6	52,3	33,1	23,7
3	21,3	33,1	42,6	19,0	23,7
4	30,8	52,3	9,4	45,1	47,6
5	30,8	28,3	28,3	3,6	37,9
6	26,1	42,6	42,6	31,0	34,3
7	11,9	16,6	28,3	16,6	30,7
8	28,5	23,7	42,9	23,7	16,6
9	40,4	33,1	52,3	14,3	47,6
10	21,5	62,0	9,4	21,3	49,9
11	57,1	62,0	42,6	59,7	71,7
12	52,3	71,4	80,9	23,7	47,6
13	50,1	42,6	42,6	42,9	52,3
14	73,9	42,6	42,6	33,1	37,9
15	88,1	61,7	28,3	54,6	38,0
16	26,0	35,7	7,1	22,4	34,3
17	9,4	14,3	0,0	0,0	23,7
18	47,6	62,0	18,9	35,7	42,6
19	35,8	42,9	42,6	20,1	24,9
20	49,9	38,0	28,3	38,1	30,7
21	28,4	26,0	26,0	3,6	52,3
22	33,2	33,1	42,6	23,7	27,1
23	16,5	7,1	33,1	29,7	30,7
24	54,7	33,1	33,1	23,7	34,3
25	42,9	42,9	71,4	23,7	37,9
26	52,6	33,1	35,4	16,6	57,0
Prom.	38,3	39,6	35,0	26,5	37,8

Anexo 64

Índices generales y por directrices del contenido matemático						
No.	Índice general	Índice por directrices				
		d1	d2	d3	d4	d5
		Números y conjuntos	La variable como número general	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	Relaciones y funciones	Geometría-trigonometría
1	18,2	28,0	15,8	26,0	10,3	13,8
2	57,1	68,2	56,7	52,3	44,4	43,6
3	23,2	33,0	11,0	42,6	17,4	7,9
4	49,5	47,3	58,3	9,4	56,7	49,2
5	21,3	28,8	17,8	28,3	4,0	36,4
6	20,9	8,7	22,5	42,6	29,8	30,5
7	26,0	26,2	5,5	28,3	38,9	24,5
8	29,4	24,3	52,9	42,9	19,0	31,7
9	43,3	32,0	56,0	52,3	46,4	46,8
10	45,9	40,5	69,8	9,4	12,7	71,4
11	65,4	52,4	68,2	42,6	86,6	81,0
12	26,4	24,8	55,5	80,9	19,0	20,6
13	50,0	79,7	22,5	42,6	14,3	36,5
14	47,7	58,0	39,2	42,6	61,0	36,4
15	45,1	62,7	37,2	28,3	51,5	31,7
16	28,5	42,0	11,9	7,1	26,9	23,3
17	3,9	3,1	4,8	0,0	0,0	7,9
18	33,7	34,4	49,8	18,9	39,7	30,9
19	40,6	45,3	35,1	42,6	48,4	32,1
20	50,3	72,2	31,8	28,3	54,4	36,4
21	14,0	16,9	8,7	26,0	12,3	17,4
22	34,4	25,9	27,7	42,6	27,3	47,1
23	32,1	38,8	43,2	33,1	12,7	34,0
24	28,4	36,8	11,0	33,1	41,2	21,0
25	38,9	36,5	53,5	71,4	41,2	26,9
26	50,8	62,0	66,9	35,4	8,3	69,0
Prom.	35,6	39,6	35,9	35,0	31,7	34,9

Anexo 65

Conceptos a estudiar en las unidades donde se realizó el pre-experimento

En la unidad “Aritmética. Trabajo con variables. Ecuaciones.”

A. En la subunidad “repaso y profundización de los dominios numéricos”

Número natural, número entero, número fraccionario, expresión decimal, expresión decimal finita, expresión decimal infinita, expresión decimal periódica, número racional, número irracional, número real, potencia de exponente entero, potencia de exponente fraccionario, potencia de exponente racional y raíz n-ésima de un número real.

B. En la subunidad “radicales”

Radical, radical simplificado y radicales semejantes

C. En la subunidad “trabajo algebraico”

Conjunto, relación de pertenencia, relación de inclusión, unión de conjuntos, intersección de conjuntos, diferencia de conjuntos, complemento de un conjunto, intervalo, variable, monomio, monomios semejantes, binomio, trinomio, polinomio, expresión algebraica, dominio de una expresión algebraica, ecuación, dominio básico de una ecuación, solución de una ecuación, conjunto solución de una ecuación y ecuaciones equivalentes.

D. En la subunidad “fracción algebraica”

Fracción algebraica, fracción algebraica propia, fracción algebraica impropia y ecuación fraccionaria.

Conceptos a estudiar en la unidad “Funciones lineales y cuadráticas. Inecuaciones y sistemas de ecuaciones”

A. En la subunidad “función lineal”

Función, dominio de una función, conjunto imagen de una función, función numérica, gráfico de una función, cero de una función, función lineal, función constante, función idéntica, función monótona creciente y función monótona decreciente.

B. En la subunidad “función cuadrática”

Función cuadrática, parábola y vértice de una parábola.

C. **En la subunidad “inecuaciones”**

Inecuación, dominio básico de una inecuación, solución de una inecuación, conjunto solución de una inecuación, inecuaciones equivalentes, inecuación lineal, inecuación cuadrática e inecuación fraccionaria.

D. **En la subunidad “sistemas de ecuaciones”**

Sistema de ecuaciones lineales, sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, sistema cuadrático y conjunto solución de un sistema cuadrático.

Colecciones de conceptos comparables relativos a los temas donde se realizó el pre-experimento		
Concepto base	Formados con anterioridad	A formar en los temas
Número real	Número natural, número par, número impar, número primo, número fraccionario, expresión decimal, expresión decimal finita, expresión decimal infinita, expresión decimal periódica, expresión decimal infinita no periódica, número racional, número negativo, número positivo, número no negativo, número irracional y número real	Radical y radical simplificado
Raíz n-ésima de un número	Raíz cuadrada y raíz cúbica	Raíz n-ésima
Potencia de un número	Potencia de exponente natural y potencia de exponente entero	Potencia de exponente fraccionario y potencia de exponente racional
Conjunto	Conjunto, conjunto vacío, conjunto unitario, conjunto finito, conjunto infinito, dominio de una expresión algebraica, dominio básico de una ecuación, conjunto solución de una ecuación, conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos variables, dominio de una función, conjunto imagen de una función	Intervalo, dominio básico de una inecuación, conjunto solución de una inecuación, conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres variables, conjunto solución de un sistema cuadrático
Operación conjuntista	Unión e intersección de dos conjuntos	Diferencia de dos conjuntos, complemento de un conjunto
Relación entre dos conjuntos	Igualdad, inclusión y sus negaciones	
Relación entre conjunto y elemento	Pertenencia y su negación	

Colecciones de conceptos comparables relativos a los temas donde se realizó el pre-experimento		
	Formados con anterioridad	A formar en los temas
Expresión algebraica	Expresión algebraica, variable, monomio, binomio, trinomio y polinomio	Fracción algebraica, fracción propia y fracción impropia
Igualdad	Ecuación, ecuación lineal, ecuación cuadrática	Ecuación fraccionaria
Desigualdad	Desigualdad	Inecuación, inecuación lineal, inecuación cuadrática e inecuación fraccionaria
Sistema de ecuaciones	Sistema de ecuaciones, sistema de ecuaciones lineales y sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos variables	Sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres variables, sistema cuadrático
Función	Función, función numérica, función lineal, función constante, función idéntica, movimiento y conceptos subordinados	Función monótona creciente, función monótona decreciente y función cuadrática
Figura geométrica	Recta, plano, segmento, semirrecta, semiplano, ángulo y conceptos subordinados, polígono y conceptos subordinados, circunferencia, círculo y gráfico de una función	Parábola

Colecciones de conceptos cuyas relaciones deben ser objeto de estudio	
No.	Colección de conceptos
1	Número natural, número par, número impar y número primo
2	Número natural, número entero, número positivo y número negativo
3	Número natural, número entero, número fraccionario, número racional, número irracional, número real
4	Expresión decimal, expresión decimal infinita, expresión decimal finita, expresión decimal periódica y expresión decimal infinita no periódica
5	Número racional, número irracional, expresión decimal, expresión decimal infinita, expresión decimal periódica y expresión decimal infinita no periódica
6	Número fraccionario, número racional, número positivo y número negativo
7	Número real, número racional, número irracional, radical y radical simplificado
8	Expresión algebraica, variable, monomio, binomio, trinomio, polinomio y fracción algebraica
9	Fracción algebraica, fracción algebraica propia y fracción algebraica impropia
10	Igualdad, ecuación, ecuación lineal, ecuación cuadrática y ecuación fraccionaria
11	Función, función numérica, función lineal, función constante, función idéntica, función monótona creciente, función monótona decreciente
12	Función numérica, función monótona creciente, función monótona decreciente y función cuadrática
13	Recta, gráfico de una función numérica, gráfico de una función cuadrática y parábola
14	Desigualdad, inecuación, inecuación lineal, inecuación cuadrática e inecuación fraccionaria

Notas:

1. No existe evidencia de que en grados precedentes se hayan estudiado las relaciones conceptuales clásicas entre algunos de los conceptos que conforman cada colección, con excepción de los que forman la colección 3.
2. En el programa de la asignatura sólo se prevé explícitamente el estudio de la relación entre los conceptos de la colección 3 y entre algunos de los que forman la colección 11.

Anexo 66

Estudio de las relaciones conceptuales por clase	
Colección de conceptos	Clases donde debe realizarse su estudio, según la dosificación nacional
1	2
2	2
3	2-11
4	3-11
5	3-11
6	3-10
7	18-22
8	31-34
9	61-69
10	35, 41 y 70
11	75-80
12	81-89
13	75-77 y 81-85
14	95-102 y 104-109

Anexo 67

Índices correspondientes a los indicadores de la subdimensión 1				
No.	Identificar/construir mapa de proposiciones	Transferir información a un mapa de extensiones	Argumentar/ demostrar	Construir mapa simbólico
1	66,4	44,4	33,3	83,3
2	77,1	100,0	50,0	100,0
3	62,9	77,8	44,4	41,7
4	94,3	86,1	66,7	50,0
5	55,7	66,7	33,3	83,3
6	62,9	72,2	44,4	66,7
7	62,9	75,0	38,9	50,0
8	81,4	86,1	38,9	66,7
9	81,4	88,9	50,0	66,7
10	83,6	88,9	55,6	83,3
11	100,0	100,0	88,9	75,0
12	62,9	83,3	33,3	75,0
13	73,6	91,7	38,9	66,7
14	70,0	100,0	61,1	83,3
15	62,9	83,3	50,0	83,3
16	70,0	72,2	27,8	66,7
17	44,3	25,0	27,8	25,0
18	57,1	86,1	33,3	83,3
19	62,9	88,9	55,6	83,3
20	82,9	88,9	55,6	83,3
21	38,6	27,8	16,7	33,3
22	62,9	75,0	50,0	83,3
23	67,1	100,0	38,9	83,3
24	64,3	72,2	38,9	58,3
25	81,4	77,8	38,9	50,0
26	90,7	88,9	61,1	66,7
Prom.	70,0	78,7	45,1	68,9

Anexo 68

Tablas de frecuencia de la distribución de los índices correspondientes a los tipos de tareas parciales de la subdimensión 1									
Intervalo	Categoría	Identificar/ construir mapa de proposiciones		Transferir información a un mapa de extensiones		Argumentar/ demostrar		Construir mapa simbólico	
		Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
[0, 20)	Muy bajo	0	0,0	0	0,0	1	3,8	0	0,0
[20, 40)	Bajo	1	3,8	2	7,7	12	46,2	2	7,7
[40, 60)	Medio	3	11,5	1	3,8	9	34,6	5	19,2
[60, 80)	Alto	14	53,8	8	30,8	3	11,5	8	30,8
[80, 100]	Muy alto	8	30,8	15	57,7	1	3,8	11	42,3
Total		26	100,0	26	100,0	26	100,0	26	100,0

Anexo 69

Índices relativos a la subdimensión 1 y a sus tipos de tareas						
No.	Tipos de tareas					Subdimensión 1
	I	II	III	IV	V	
1	100,0	29,2	68,8	55,0	45,0	56,6
2	100,0	75,0	100,0	80,0	61,7	83,7
3	50,0	83,3	50,0	61,3	45,0	57,5
4	66,7	83,3	87,5	77,5	79,2	80,4
5	100,0	58,3	50,0	55,0	45,0	56,9
6	66,7	66,7	50,0	61,3	53,3	57,5
7	66,7	75,0	50,0	55,0	49,2	57,7
8	66,7	75,0	68,8	93,8	49,2	68,3
9	66,7	75,0	68,8	83,8	68,3	71,4
10	100,0	62,5	68,8	83,8	83,3	77,4
11	83,3	100,0	100,0	93,8	91,7	95,6
12	83,3	66,7	50,0	73,8	45,0	58,9
13	100,0	70,8	100,0	61,3	49,2	77,9
14	100,0	75,0	81,3	73,8	70,0	78,6
15	100,0	75,0	50,0	67,5	61,7	65,6
16	100,0	75,0	68,8	55,0	36,7	61,4
17	16,7	16,7	37,5	38,8	34,2	30,0
18	100,0	66,7	50,0	73,8	42,5	60,2
19	100,0	83,3	50,0	73,8	61,7	68,2
20	100,0	83,3	87,5	83,8	61,7	78,9
21	66,7	25,0	18,8	28,8	30,0	30,3
22	66,7	75,0	50,0	57,5	64,2	63,0
23	100,0	66,7	62,5	83,8	60,0	69,1
24	83,3	75,0	68,8	45,0	45,0	61,2
25	66,7	75,0	68,8	71,3	51,7	64,5
26	66,7	70,8	100,0	93,8	76,7	81,3
Prom.	81,4	68,6	65,6	68,5	56,2	65,9

Anexo 70

Tablas de frecuencia de la distribución de los índices correspondientes a los tipos de tareas de la subdimensión 1													
Intervalo	Cat.	I		II		III		IV		V		Dim. 3	
		Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%	Fr.	%
[0, 20)	Muy bajo	1	3,8	1	3,8	1	3,8	0	0,0	0	0,0	0	0,0
[20, 40)	Bajo	0	0,0	2	7,7	1	3,8	2	7,7	3	11,5	2	7,7
[40, 60)	Medio	1	3,8	1	3,8	9	34,6	6	23,1	11	42,3	6	23,1
[60, 80)	Alto	9	34,6	17	65,4	8	30,8	10	38,5	10	38,5	14	53,8
[80, 100]	Muy alto	15	57,7	5	19,2	7	26,9	8	30,8	2	7,7	4	15,4
Total		26	100	26	100	26	100	26	100	26	100	26	100

Anexo 71

Índices por directrices del contenido matemático relativos a la subdimensión 1				
No.	Índices por directrices			
	d1	d2	d4	d5
	Números y conjuntos	La variable como número general	Relaciones y funciones	Geometría-trigonometría
1	79,2	55,0	29,2	45,0
2	100,0	80,0	75,0	61,7
3	50,0	61,3	83,3	45,0
4	80,6	77,5	83,3	79,2
5	66,7	55,0	58,3	45,0
6	55,6	61,3	66,7	53,3
7	55,6	55,0	75,0	49,2
8	68,1	93,8	75,0	49,2
9	68,1	83,8	75,0	68,3
10	79,2	83,8	62,5	83,3
11	94,4	93,8	100,0	91,7
12	61,1	73,8	66,7	45,0
13	100,0	61,3	70,8	49,2
14	87,5	73,8	75,0	70,0
15	66,7	67,5	75,0	61,7
16	79,2	55,0	75,0	36,7
17	30,6	38,8	16,7	34,2
18	66,7	73,8	66,7	42,5
19	66,7	73,8	83,3	61,7
20	91,7	83,8	83,3	61,7
21	34,7	28,8	25,0	30,0
22	55,6	57,5	75,0	64,2
23	75,0	83,8	66,7	60,0
24	73,6	45,0	75,0	45,0
25	68,1	71,3	75,0	51,7
26	88,9	93,8	70,8	76,7
Prom.	70,9	68,5	68,6	56,2

Anexo 72

Índices correspondientes a la subdimensión 2 y a sus tipos de tareas por alumno					
No.	Argumentar	Identificar/ argumentar	Ejemplificar/ argumentar	Citar no-ejemplos/ argumentar	Subdimensión 2
1	75,0	44,3	61,3	66,8	60,0
2	100,0	64,1	50,0	53,4	62,1
3	91,7	38,7	55,7	53,4	55,3
4	91,7	52,8	61,2	59,8	62,8
5	75,0	41,5	50,0	53,4	52,1
6	91,7	47,3	61,3	60,2	61,3
7	75,0	44,3	50,0	46,6	51,0
8	91,7	35,8	55,7	46,6	52,6
9	100,0	58,4	61,3	53,4	63,8
10	75,0	47,2	61,2	60,0	58,8
11	100,0	80,7	78,0	80,2	82,5
12	100,0	69,5	66,8	66,6	72,3
13	91,7	63,9	61,3	86,8	73,7
14	100,0	61,3	72,5	66,8	71,6
15	91,7	66,9	66,8	73,2	72,2
16	75,0	44,5	61,3	60,0	58,1
17	75,0	22,0	33,0	39,8	37,8
18	83,3	58,4	67,0	80,0	70,6
19	91,7	44,3	78,0	39,8	59,4
20	66,7	52,8	61,3	66,8	61,2
21	83,3	58,4	38,7	46,6	53,0
22	83,3	61,3	55,7	53,4	60,6
23	75,0	50,0	55,7	39,8	52,3
24	100,0	58,5	66,8	46,6	63,4
25	91,7	55,6	61,3	80,0	69,4
26	83,3	58,4	66,7	60,2	64,8
Prom.	86,9	53,1	59,9	59,2	61,6

Anexo 73

Tablas de frecuencia correspondientes a la subdimensión 2 y a sus tipos de tareas												
Intervalo	Categoría	Tipos de tareas								Subdim. 2	
		Argumentar		Identificar/ argumentar		Ejemplificar/ argumentar		Citar no-ejemplos/ argumentar			
		Total	%	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
[0, 20)	Muy bajo	0	0	0	0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
[20, 40)	Bajo	0	0,0	3	12	2	7,7	3	11,5	1	3,8
[40, 60)	Medio	0	0,0	16	62	7	26,9	10	38,5	10	38,5
[60, 80)	Alto	8	30,8	6	23	17	65,4	9	34,6	14	53,8
[80,100]	Muy alto	18	69,2	1	3,8	0	0,0	4	15,4	1	3,8
Total		26	100	26	100	26	100	26	100	26	100

Anexo 74

Índices por directrices del contenido matemático relativos a la subdimensión 2					
No.	Índices por directrices				
	d1	d2	d3	d4	d5
	Números y conjuntos	La variable como número general	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	Relaciones y funciones	Geometría-trigonometría
1	57,1	69,1	62,0	50,0	63,3
2	74,1	71,7	66,9	57,1	52,3
3	57,3	57,1	62,0	47,4	52,3
4	59,6	66,6	45,1	76,3	61,7
5	45,0	59,7	59,7	35,4	62,0
6	66,9	66,9	66,9	50,0	66,9
7	54,7	52,3	59,7	40,3	63,3
8	54,7	52,3	62,0	52,3	48,7
9	74,1	57,1	66,9	52,3	66,9
10	47,6	81,1	45,1	57,1	67,9
11	71,6	81,1	76,4	85,9	100,0
12	69,0	80,9	90,6	57,1	66,9
13	78,8	66,9	81,1	57,1	76,3
14	81,1	66,9	76,4	57,1	66,9
15	92,9	76,3	54,9	76,3	62,0
16	69,3	64,3	35,6	62,1	66,9
17	35,4	37,9	30,7	35,7	42,6
18	74,1	81,1	50,0	71,4	66,9
19	80,9	66,6	71,6	45,1	57,1
20	59,7	69,1	52,6	61,9	58,4
21	45,1	71,7	35,4	42,6	66,7
22	66,9	57,1	71,7	57,1	63,3
23	52,4	35,4	57,1	52,3	63,3
24	78,7	57,1	62,0	57,1	62,0
25	61,9	66,6	81,1	52,3	66,9
26	73,9	57,1	59,7	57,1	81,1
Prom.	64,7	64,2	60,9	55,6	64,3

Anexo 75

Índices generales y por directrices del contenido matemático						
No.	Índice general	Índice por directrices				
		d1	d2	d3	d4	d5
		Números y conjuntos	La variable como número general	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	Relaciones y funciones	Geometría-trigonometría
1	57,7	71,8	59,7	62,0	36,1	51,1
2	76,5	91,4	77,2	66,9	69,0	58,5
3	56,8	52,4	59,9	62,0	71,4	47,4
4	74,5	73,6	73,9	45,1	81,0	73,3
5	55,3	59,4	56,6	59,7	50,7	50,7
6	58,8	59,3	63,1	66,9	61,1	57,8
7	55,5	55,3	54,1	59,7	63,4	53,9
8	63,1	63,6	79,9	62,0	67,4	49,0
9	68,9	70,1	74,9	66,9	67,4	67,8
10	71,2	68,6	82,9	45,1	60,7	78,2
11	91,2	86,8	89,5	76,4	95,3	94,4
12	63,4	63,7	76,1	90,6	63,5	52,3
13	76,5	92,9	63,1	81,1	66,3	58,2
14	76,3	85,4	71,5	76,4	69,0	69,0
15	67,8	75,4	70,4	54,9	75,4	61,8
16	60,3	75,9	58,1	35,6	70,7	46,7
17	32,6	32,2	38,5	30,7	23,0	37,0
18	63,7	69,1	76,2	50,0	68,3	50,6
19	65,3	71,4	71,4	71,6	70,6	60,2
20	73,0	81,0	78,9	52,6	76,2	60,6
21	37,9	38,2	43,1	35,4	30,9	42,2
22	62,2	59,3	57,4	71,7	69,0	63,9
23	63,5	67,5	67,6	57,1	61,9	61,1
24	61,9	75,3	49,0	62,0	69,0	50,7
25	66,1	66,0	69,7	81,1	67,4	56,7
26	75,8	83,9	81,5	59,7	66,3	78,2
Prom.	64,5	68,8	67,1	60,9	64,3	58,9