



Pedagogía y Sociedad. Cuba. Vol. 19, no. 47, nov. - feb. 2016, ISSN 1608-3784. RNPS: 1903

TRANSFERENCIAS ENTRE REPRESENTACIONES VERBALES DE LAS SECCIONES CÓNICAS EN LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

TRANSFERENCES AMONG VERBAL REPRESENTATIONS OF CONIC SECTIONS IN THE MATHEMATICS TEACHERS' TRAINING

Ortelio Nilo Quero Méndez ¹; Aldo Medardo Ruiz Pérez ²

¹Máster en Didáctica de la Matemática y Profesor Auxiliar de la Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez". Email: oquero@uniss.edu.cu, ² Doctor en Ciencias Pedagógicas. Email: aldo580608@yahoo.es

Resumen

El presente trabajo contiene la solución a un problema acerca de la transferencia entre representaciones verbales de las secciones cónicas, correspondiente al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática. La causa fundamental del problema es el insuficiente desarrollo de la teoría de las representaciones en la Geometría Analítica, el cual se constata en el análisis de la bibliografía cuando se comprueba que en ésta no se exponen todas las posibles transferencias ni procedimientos para determinarlas y en consecuencia carece de tareas de aprendizaje para que los estudiantes puedan construir y fijar todos los procedimientos de transferencia. El trabajo está dividido en cuatro partes; la parte inicial contiene los fundamentos teóricos para resolver el problema; en la segunda parte se presenta un procedimiento para determinar las posibles transferencias entre representaciones de las secciones cónicas y los resultados de su aplicación a la determinación de las transferencias entre sus representaciones verbales fundamentales; en la tercera parte se expone un conjunto de tareas de aprendizaje para la fijación de los procedimientos de transferencia entre representaciones verbales de las cónicas y finalmente en la cuarta parte se describen resultados obtenidos con la utilización de las tareas.

Palabras clave: matemática; educación superior; transferencia entre representaciones; secciones cónicas; representación verbal; geometría analítica

Abstract

The present paper has the solution to a problem about the transference among verbal representations of conical sections, corresponding to the teaching-learning process of Coordinate Geometry in the initial training of Mathematics' professors. The main problem cause is the insufficient development of the theory of the representations in the context of the Coordinate Geometry. This problem is verified when analyzing the bibliography where it is proven that in the Coordinate Geometry neither all the possible transferences nor procedures to determine them are exposed and, in consequence, the Coordinate Geometry lacks of learning tasks so that students can build and fix the transference procedures. The paper is divided in four parts: the initial part contains the theoretical foundations that the authors developed to solve the problem; the second one has a procedure to determine the possible transferences among representations of the conical sections and the results from its application in order to determine the transferences among the main verbal representations of these; in the third part, a group of learning tasks for the fixation of the transference procedures among verbal representations of the conical section are proposed; and finally, in the fourth part, the description of some results obtained with the use of these tasks are described.

Key words: Mathematics; Higher education; transferences among representations; conical sections; verbal representation; Coordinate Geometry.

INTRODUCCIÓN

El trabajo con representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) de la Geometría Analítica correspondiente a la formación de profesores de Matemática y Física generalmente transcurre espontáneamente, según la lógica de la exposición del contenido matemático tal cual aparece en los libros, sin prestar la debida atención al papel de la asignatura en la formación didáctica de los estudiantes.

En lo que respecta a la transferencia entre representaciones de las secciones cónicas se presta poca atención al tratamiento de todos los casos que se pueden presentar, y

quedan varios de ellos sin incluir en el contenido de la asignatura, entre los cuales están los relativos a las transferencias entre representaciones verbales.

Una de las manifestaciones de esta situación problemática consiste en que en la bibliografía que se utiliza en la asignatura no se identifican todas las transferencias posibles, ni se presentan tareas de aprendizaje que permitan fijar los procedimientos a utilizar en el proceso de transferencia entre representaciones verbales.

En el presente trabajo se determinan todas las posibles transferencias entre las representaciones verbales de las secciones cónicas, se expone un conjunto de tareas de aprendizaje que contribuyen a la fijación de los procedimientos de las transferencias determinadas y se describen los resultados obtenidos por los autores durante tres cursos escolares, todo ello en el contexto del PEA de la Geometría Analítica en la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática y Física de la Universidad de Sancti Spíritus.

Marco teórico o referentes conceptuales sobre las representaciones de las secciones cónicas. Sus tipos, formas y transferencia

En este epígrafe se presenta una síntesis de los fundamentos teóricos fundamentales expuestos en Quero y Ruiz (2015 y 2015a), contextualizados al caso de las secciones cónicas como objetos geométricos.

Entendemos por representación de una sección cónica (objeto representado) el objeto material o mental (objeto representante) que la sustituye y la determina unívocamente en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación.

Los tipos de representaciones de las secciones cónicas son subclases de la extensión de este concepto cuyo estudio tiene un interés especial. Los de mayor interés en el PEA de la Geometría Analítica son los tipos verbal, gráfico y analítico.

Representación verbal de una sección cónica, en la geometría analítica, es una representación mediante una frase que está compuesta por palabras del lenguaje común, palabras de la terminología matemática y de la geometría analítica y eventualmente por signos matemáticos. Por ejemplo, la frase: “circunferencia de centro C (2;3) y radio 4 unidades” es una representación verbal de una circunferencia.

Toda representación verbal de una sección cónica está basada en entes que la determinan unívocamente como se precisará en el siguiente epígrafe de este trabajo.

Representación gráfica de una sección cónica, es una representación en la cual predomina una figura geométrica, es decir, es una representación que siempre contiene una figura geométrica y eventualmente frases o signos matemáticos, particularmente de la geometría analítica.

Representación analítica de una sección cónica, es una representación en la que predomina una ecuación o sistema de ecuaciones.

Además del concepto de tipo de representación, en este trabajo se utiliza como herramienta teórica el concepto de forma de representación, entendida como la configuración general del objeto representante, de modo que dos representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas.

Existen diferentes formas de representación analítica y de representación verbal para cada sistema de coordenadas; el tipo gráfico tiene una única forma para cada sistema de coordenadas.

Si se tiene una sección cónica C determinada por su representación R_1 en la forma F_1 correspondiente al tipo T_1 y se desconoce su representación R_2 en la forma F_2 correspondiente al tipo T_2 , el proceso mediante el cual se obtiene R_2 a partir de R_1 se llama transferencia de R_1 a R_2 . Si inversamente se conociera R_2 y desconociera R_1 , el proceso que permite obtener R_1 a partir de R_2 se llama transferencia de R_2 a R_1 .

Cuando $T_1=T_2$ la transferencia entre representaciones se llama transferencia intratipo, si en cambio $T_1 \neq T_2$, ésta recibe el nombre de transferencia intertipo.

En la definición de transferencia entre representaciones de las secciones cónicas no se especifica si quien debe realizar la transferencia conoce o no el procedimiento para hacerlo. En el caso del PEA el alumno puede conocer o no el procedimiento. Cuando lo conoce la realización de la transferencia constituye una tarea rutinaria; cuando no lo conoce y está interesado en realizar la transferencia está ante un problema de transferencia entre representaciones.

La transferencia entre dos representaciones de una sección cónica es un proceso que requiere de la aplicación de un procedimiento que garantice el tránsito por cada uno de sus estados. En lo adelante a la representación conocida se le llamará **representación dada** y a la desconocida, **representación buscada**.

La transferencia en la que partiendo de la representación dada de una sección cónica C se obtiene la buscada, sin utilizar otras formas reconocidas de representación se denomina **directa**, la que no es directa se denomina **compuesta**. En las transferencias compuestas se utiliza por lo menos otra representación reconocida intermedia, además de la dada y la buscada.

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Determinación de las diferentes transferencias entre las representaciones verbales de las secciones cónicas

La determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones verbales de una sección cónica (circunferencia, elipse, hipérbola o parábola) en el PEA no puede ser espontánea porque se corre el riesgo de no considerar algunos casos de transferencia. Es por eso que para lograrlo se debe seguir el procedimiento siguiente:

- 1) Determinar las formas de representación del tipo verbal.
- 2) Determinar el número de casos de las transferencias entre representaciones verbales.
- 3) Determinar las transferencias entre representaciones verbales cuyo número se determinó en el paso anterior.

En los siguientes cuatro epígrafes se aplica este procedimiento a la determinación de las transferencias entre representaciones verbales de las secciones cónicas.

Transferencia entre representaciones verbales de la circunferencia

Para determinar las posibles transferencias entre las representaciones verbales de la circunferencia se utiliza el procedimiento descrito anteriormente.

- 1) Determinar las formas de representación verbal de la circunferencia.

Las formas más comunes de representación verbal de la circunferencia son:

- 1) Frase con el centro y el radio de la circunferencia, 2) frase con el centro y un punto de la circunferencia, 3) frase con los extremos de un diámetro de la circunferencia, 4) frase con el centro y la ecuación de una recta tangente a la circunferencia y 5) frase con tres puntos de la circunferencia.
- 2) Determinar el número de casos de las transferencias entre representaciones verbales de la circunferencia.

Se utiliza la regla del producto de la combinatoria. En la determinación se tendrá en cuenta solo la representación dada y la buscada.

Para la circunferencia se han considerado cinco formas, utilizando la regla antes mencionada se obtienen 20 casos posibles para las transferencias entre representaciones del tipo verbal.

- 3) Determinar las transferencias entre representaciones verbales de la circunferencia.

Si etiquetamos las formas de representación con siglas y utilizamos una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden determinar los 20 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 1).

Tabla 1: casos posibles de transferencia entre representaciones verbales de la circunferencia				
Rep. dada: CR	Rep. dada: CP	Rep. dada: ED	Rep. dada: CT	Rep. dada: TP
1) CR→CP	5) CP→CR	9) ED→CR	13) CT→CR	17) TP→CR
2) CR→ED	6) CP→ED	10) ED→CP	14) CT→CP	18) TP→CP
3) CR→CT	7) CP→CT	11) ED→CT	15) CT→ED	19) TP→ED
4) CR→TP	8) CP→TP	12) ED→TP	16) CT→TP	20) TP→CT
Etiquetas: CR: circunferencia representada verbalmente por el centro y el radio. CP: circunferencia representada verbalmente por el centro y uno de sus puntos. ED: circunferencia representada verbalmente por los extremos de un diámetro. CT: circunferencia representada verbalmente por el centro y una recta tangente. TP: circunferencia representada verbalmente por tres puntos.				

Fuente: Elaboración propia

Transferencia entre representaciones verbales de la elipse

Se aplica el procedimiento descrito.

- 1) Determinar las formas de representación verbal de la elipse.

Las formas más comunes de representación verbal de la elipse son:

- 1) Frase con el centro, un vértice y un foco de la elipse, 2) frase con el centro, un vértice y la excentricidad, 3) frase con dos vértices y un foco de la elipse, 4) frase con un vértice y dos focos de la elipse, 5) frase con dos focos y la longitud de un semieje de la elipse, 6) frase con dos vértices y la longitud del semieje menor o la semidistancia focal.
- 2) Determinar el número de casos de las transferencias entre representaciones verbales de la elipse.

Para la elipse se han considerado seis formas y se ha procedido de manera análoga a la circunferencia, se obtienen 30 casos posibles para las transferencias entre representaciones del tipo verbal.

- 3) Determinar las transferencias entre representaciones verbales de la elipse.

Si etiquetamos las formas de representación con siglas y utilizamos una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden determinar los 30 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 2).

Tabla 2: casos posibles de transferencia entre representaciones verbales de la elipse			
Rep. dada: VCF	Rep. dada: CVE	Rep. dada: VVF	Rep. dada: VFF
1) CVF → CVE 2) CVF → VVF 3) CVF → VFF 4) CVF → FFS 5) CVF → VVE	6) CVE → CVF 7) CVE → VVF 8) CVE → VFF 9) CVE → FFS 10) CVE → VVE	11) VVF → VCF 12) VVF → CVE 13) VVF → VFF 14) VVF → FFS 15) VVF → VVE	16) VFF → CVF 17) VFF → CVE 18) VFF → VVF 19) VFF → FFS 20) VFF → VVE
Rep. dada: FFS	Rep. dada: VVE		
21) FFS → CVF 22) FFS → CVE 23) FFS → VVF 24) FFS → VFF 25) FFS → VVE	26) VVE → CVF 27) VVE → CVE 28) VVE → VVF 29) VVE → VFF 30) VVE → FFS		
<p>Etiquetas:</p> <p>CVF: elipse representada verbalmente por el centro, un vértice y un foco. CVE: elipse representada verbalmente por el centro, un vértice y la excentricidad. VVF: elipse representada verbalmente por dos vértices y un foco. VFF: elipse representada verbalmente por un vértice y dos focos. FFS: elipse representada verbalmente por dos focos y la longitud de un semieje. VVE: elipse representada verbalmente por dos vértices y la excentricidad.</p>			

Transferencia entre representaciones verbales de la hipérbola.

En este caso también se aplica el procedimiento descrito.

1) Determinar las formas de representación verbal de la hipérbola.

Las formas más comunes de representación verbal de la hipérbola son:

- 1) Frase con el centro, un vértice y un foco de la hipérbola, 2) frase con el centro, un vértice y la excentricidad de la hipérbola, 3) frase con dos vértices y un foco de la hipérbola, 4) frase con un vértice y dos focos de la hipérbola, 5) frase con dos focos y la longitud de un semieje de la hipérbola, 6) frase con dos vértices y la longitud del semieje imaginario o la semidistancia focal de la hipérbola.
- 2) Determinar el número de casos de las transferencias entre representaciones verbales de la hipérbola.

Para la hipérbola se han considerado seis formas, procediendo de manera análoga a los objetos geométricos analizados anteriormente se obtienen 30 casos posibles para las transferencias entre representaciones del tipo verbal.

3) Determinar las transferencias entre representaciones verbales de la hipérbola.

Si se etiqueta las formas de representación con siglas y se utiliza una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden determinar los 30 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 3).

Tabla 3: casos posibles de transferencia entre representaciones verbales de la hipérbola			
Rep. dada: VCF	Rep. dada: CVE	Rep. dada: VVF	Rep. dada: VFF
1) CVF → CVE	6) CVE → CVF	11) VVF → VCF	16) VFF → CVF
2) CVF → VVF	7) CVE → VVF	12) VVF → CVE	17) VFF → CVE
3) CVF → VFF	8) CVE → VFF	13) VVF → VFF	18) VFF → VVF
4) CVF → FFS	9) CVE → FFS	14) VVF → FFS	19) VFF → FFS
5) CVF → VVE	10) CVE → VVE	15) VVF → VVE	20) VFF → VVE
Rep. dada: FFS	Rep. dada: VVE		
21) FFS → CVF	26) VVE → CVF		
22) FFS → CVE 23)	27) VVE → CVE		
FFS → VVF 24)	28) VVE → VVF		

FFS →VFF 25) FFS →VVE	29) VVE→VFF 30) VVE→FFS		
Etiquetas: CVF: hipérbola representada verbalmente por el centro, un vértice y un foco. CVE: hipérbola representada verbalmente por el centro, un vértice y la excentricidad. VVF: hipérbola representada verbalmente por dos vértices y un foco. VFF: hipérbola representada verbalmente por un vértice y dos focos. FFS: hipérbola representada verbalmente por dos focos y la longitud de un semieje. VVE: hipérbola representada verbalmente por dos vértices y la excentricidad.			

Fuente: Elaboración propia

Transferencia entre representaciones verbales de la parábola

En este último caso también se aplica el procedimiento descrito.

1) Determinar las formas de representación verbal de la parábola.

Las formas más comunes de representación verbal de la parábola son:

- 1) Frase con el vértice y el foco de la parábola, 2) frase con el foco y la ecuación de la directriz de la parábola, 3) frase con el vértice y la ecuación de la directriz de la parábola.
- 2) Determinar el número de casos de las transferencias entre representaciones verbales de la parábola.

Para la parábola se han considerado tres formas de representación verbal, procediendo de manera análoga a como se procedió para la circunferencia y las demás cónicas se obtienen 6 casos posibles para las transferencias entre representaciones del tipo verbal.

3) Determinar las transferencias entre representaciones verbales de la hipérbola.

Si etiquetamos las formas de representación con siglas y utilizamos una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden determinar los 6 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 4).

Tabla 4: casos posibles de transferencia entre representaciones verbales de la parábola		
Rep. dada: VF	Rep. dada: FD	Rep. dada: VD
1) VF→FD 2) VF→VD	3) FD→VF 4) FD→VD	5) VD→VF 6) VD→FD
Etiquetas:		

VF: parábola representada verbalmente por el vértice y el foco. FD: parábola representada verbalmente por el foco y la directriz. VD: parábola representada verbalmente por el vértice y la directriz.
--

Fuente: Elaboración propia

Tareas de aprendizaje para fijar los procedimientos de transferencia entre representaciones verbales de las secciones cónicas

El conjunto de tareas de aprendizaje que contiene este epígrafe tiene como característica fundamental que incluye todos los casos de transferencia entre representaciones verbales de las secciones cónicas analizadas, que es una limitación de la bibliografía sobre geometría analítica utilizada en la formación de profesores de Matemática. Además de este atributo las tareas elaboradas tienen las características siguientes:

- En cada tarea la representación dada y representación buscada utilizan el mismo sistema de coordenadas.
- Pueden resolverse con lápiz y papel o con la utilización del software GeoGebra.
- Favorecen el desarrollo de las habilidades para comunicarse matemáticamente.
- Permiten la fijación de conceptos y proposiciones relacionadas con las secciones cónicas.

En el conjunto de tareas se identifican cuatro subconjuntos. Las tareas del primer subconjunto contribuyen al desarrollo de habilidades para determinar el radio y la ecuación de la recta tangente a una circunferencia, la distancia de un punto a una recta y las ecuaciones de las mediatrices de un triángulo y las coordenadas del circuncentro. Las de los subconjuntos segundo y tercero contribuyen al desarrollo de habilidades para determinar las coordenadas del centro, los vértices y focos, la longitud de los semiejes, la semidistancia focal, la excentricidad, la longitud del lado recto y las ecuaciones de las directrices de una elipse o hipérbola. Las del cuarto subconjunto contribuyen al desarrollo de habilidades para determinar las coordenadas del vértice y el foco y la ecuación de la directriz de una parábola.

Estas tareas son totalmente originales, para su elaboración se han consultado algunos libros de geometría analítica (Lehmann, 1972; Kindle, 1976; Kletenik, 1979; Cherbakov, Martínez, Figueras y Cisneros, 1991 y Oteyza, Lam, Hernández, Corrales, y Ramírez, 2011).

Tareas relativas a la circunferencia

1. Dada la circunferencia **C** de centro M (1;3) y radio $r=3$. Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas otras representaciones verbales de la circunferencia **C**
 - a) Circunferencia de centro en M (3; 1) y que pasa por A (___; ___).
 - b) Circunferencia uno de cuyos diámetros es \overline{CD} con C (___;___) y D (___; ___).
 - c) Circunferencia de centro en M (3;1) y tangente a la recta: _____.
 - d) Circunferencia que pasa por los puntos E (___;___), F (___;___) y G (___;___).
2. De las circunferencias que se dan a continuación, obtenga las representaciones verbales que se indican entre paréntesis en cada caso.
 - a) Circunferencia de centro en C (1; 3) y radio $r=3$. (representaciones verbales dadas por: el centro y un punto, los extremos de un diámetro, el centro y una recta tangente y por tres puntos).
 - b) Circunferencia de centro en C (5; 2) que pasa por Q (5;-1) (representaciones verbales dadas por: el centro y el radio, los extremos de un diámetro, el centro y una recta tangente y por tres puntos).
 - c) Circunferencia que tiene como extremos de uno de sus diámetros los puntos A(2;3) y B(6;5) (representaciones verbales dadas por: el centro y el radio, el centro y un punto, el centro y una recta tangente y por tres puntos).
 - d) Circunferencia de centro en C(4;1) y tangente a la recta $3x+2y+12=0$. (representaciones verbales dadas por: el centro y un punto, el centro y el radio, los extremos de un diámetro y por tres puntos).
 - e) Circunferencia que pasa por los puntos A(-1;5), B(-2;-2) y C(5;5). (representaciones verbales dadas por: el centro y el radio, el centro y un punto, los extremos de un diámetro y el centro y una recta tangente).

3. Dada la circunferencia **C** de centro en el punto M (-4; 2) que es tangente a la recta s: $3x+4y-16=0$. Escribe otras tres representaciones verbales de C.

Tareas relativas a la elipse

1. Dada la elipse **E** de vértices en los puntos $V_1(1; 1)$ y $V_2(7; 1)$ y excentricidad $e=\frac{1}{3}$.

Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas otras representaciones verbales de la elipse **E**:

- Elipse de centro en C (___; ___), un foco en F (___; ___) y semieje menor $b=$ ___.
 - Elipse de focos $F_1($ ___; ___) y $F_2($ ___; ___) y longitud del eje mayor igual a ___.
 - Elipse de centro en C (___; ___), un vértice en V (___; ___) y un foco en F (___; ___).
 - Elipse de centro en C (___; ___), un foco en F (___; ___) y longitud del lado recto igual a ___.
 - Conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos A (___; ___) y B (___; ___) es igual a ___.
 - Conjunto de puntos del plano para los cuales la distancia a la recta $x=$ ___ es siempre el triplo de su distancia al punto A (___, ___).
2. Dada la elipse de centro C(3;5), un vértice en V(3;10) y un foco en F(3;2). Obtenga representaciones verbales de la elipse determinadas por:
- El centro, un vértice y la excentricidad.
 - Dos vértices y un foco.
 - Un vértice y dos focos.
 - Dos focos y la longitud de un semieje.
 - Dos vértices y la excentricidad.
3. Dada la elipse de centro C (6;-4), un vértice en V (0;-4) y $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Obtenga representaciones verbales de la elipse determinadas por:
- El centro, un vértice y un foco.
 - Dos vértices y un foco.
 - Un vértice y dos focos.
 - Dos focos y la longitud de un semieje.
 - Dos vértices y la excentricidad.

4. Dada la elipse de vértices $V_1(-2; -4)$ y $V_2(6; -4)$ y un foco en $F(-1; -4)$. Obtenga representaciones verbales de la elipse determinadas por:
- El centro, un vértice y un foco.
 - El centro, un vértice y la excentricidad.
 - Un vértice y dos focos.
 - Dos focos y la longitud de un semieje.
 - Dos vértices y la excentricidad.
5. Dada la elipse de focos $F_1(-2; -1)$ y $F_2(4; -1)$ y un vértice en $V(5; -1)$. Obtenga representaciones verbales de la elipse determinadas por:
- El centro, un vértice y un foco.
 - El centro, un vértice y la excentricidad.
 - Dos vértices y un foco.
 - Dos focos y la longitud de un semieje.
 - Dos vértices y la excentricidad.
6. Dada la elipse de focos $F_1(3; 2)$ y $F_2(3; 8)$ y longitud del semieje menor $b = 4$. Obtenga representaciones verbales de la elipse determinadas por:
- El centro, un vértice y un foco.
 - El centro, un vértice y la excentricidad.
 - Dos vértices y un foco.
 - Dos focos y un vértice.
 - Dos vértices y la excentricidad.
7. Dada la elipse de focos $V_1(1; 1)$ y $V_2(7; 1)$ y $e = \frac{1}{2}$. Obtenga representaciones verbales de la elipse determinadas por:
- El centro, un vértice y un foco.
 - El centro, un vértice y la excentricidad.
 - Dos vértices y un foco.
 - Dos focos y un vértice.
 - Dos focos y la longitud de un semieje.
8. Dada la elipse E de centro $C(4, -1)$, uno de los focos en $F(1, -1)$ y $a=3$. Escribe otras tres representaciones verbales de esta elipse.

Tareas relativas a la hipérbola

1. Dada la hipérbola H de vértices $V_1(-1; 3)$ y $V_2(3; 3)$ y excentricidad $e = \frac{3}{2}$. Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas otras representaciones verbales de H.
 - a) Hipérbola de centro en C (___; ___), un foco en F(___; ___) y $b =$ ___.
 - b) Hipérbola de focos $F_1($ ___; ___) y $F_2($ ___; ___) y excentricidad $e = \frac{3}{2}$.
 - c) Hipérbola de centro en C (___; ___), un vértice en V (___; ___) y un foco en F (___; ___).
 - d) Hipérbola de centro en C (___; ___), un foco en F(___; ___) y longitud del lado recto igual a ___.
 - e) Conjunto de los puntos del plano para los que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los puntos A (___; ___) y B (___; ___) es igual a ___.
 - f) Conjunto de los puntos del plano para los cuales la razón entre sus distancias a la recta $x =$ ___ y al punto D (___; ___) es igual a ___.
2. Dada la hipérbola de centro C(3;-2), un vértice en V(1;-2) y un foco en F(9;-2). Obtenga representaciones verbales de la hipérbola determinadas por:
 - a) El centro, un vértice y la excentricidad.
 - b) Dos vértices y un foco.
 - c) Un vértice y dos focos.
 - d) Dos focos y la longitud de un semieje.
 - e) Dos vértices y la excentricidad.
3. Dada la hipérbola de centro C(2;-2), un vértice en V(0;-2) y $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Obtenga representaciones verbales de la hipérbola determinadas por:
 - a) El centro, un vértice y un foco.
 - b) Dos vértices y un foco.
 - c) Un vértice y dos focos.
 - d) Dos focos y la longitud de un semieje.
 - e) Dos vértices y la excentricidad.
4. Dada la hipérbola de vértices $V_1(-6; 3)$ y $V_2(1; 3)$ y un foco en F(-8;3). Obtenga representaciones verbales de la hipérbola determinadas por:

- a) El centro, un vértice y un foco.
 - b) El centro, un vértice y la excentricidad.
 - c) Un vértice y dos focos.
 - d) Dos focos y la longitud de un semieje.
 - e) Dos vértices y la excentricidad.
5. Dada la hipérbola de focos $F_1(4; -2)$ y $F_2(4; -8)$ y un vértice en $V(4; -3)$. Obtenga representaciones verbales de la hipérbola determinadas por:
- a) El centro, un vértice y un foco.
 - b) El centro, un vértice y la excentricidad.
 - c) Dos vértices y un foco.
 - d) Dos focos y la longitud de un semieje.
 - e) Dos vértices y la excentricidad.
6. Dada la hipérbola de focos $F_1(-7; 3)$ y $F_2(-1; 3)$ y longitud del semieje real de 4 unidades. Obtenga representaciones verbales de la hipérbola dadas por:
- a) El centro, un vértice y un foco.
 - b) El centro, un vértice y la excentricidad.
 - c) Dos vértices y un foco.
 - d) Dos focos y un vértice.
 - e) Dos vértices y la excentricidad.
7. Dada la hipérbola de vértices $V_1(3; 4)$ y $V_2(3; -2)$ y $e = 2$. Obtenga representaciones verbales de la hipérbola determinadas por:
- a) El centro, un vértice y un foco.
 - b) El centro, un vértice y la excentricidad.
 - c) Dos vértices y un foco.
 - d) Dos focos y un vértice.
 - e) Dos focos y la longitud de un semieje.
8. Dada la hipérbola H de focos $F_1(4; -2)$ y $F_2(4; -8)$ y longitud de su eje real igual a 4 unidades. Escribe otras cinco representaciones verbales de H.

Tareas relativas a la parábola

se han utilizado por los autores de este trabajo durante tres cursos escolares en el PEA de la asignatura Geometría I (Geometría Analítica), en la formación inicial de profesores de Matemática.

Los principales resultados obtenidos son:

- Los estudiantes se han apropiado de un número mayor de procedimientos de transferencia entre representaciones de las secciones cónicas que en las ediciones del PEA donde estas tareas no se utilizaban.
- Los estudiantes, generalmente, son capaces de aplicar y de describir los procedimientos de transferencia, aunque las descripciones son generalmente muy breves.
- Se ha perfeccionado el uso de la terminología y la simbología matemática, particularmente la relacionada con las secciones cónicas.
- Se ha logrado la fijación de los conceptos de circunferencia, elipse, hipérbola y parábola y de las principales proposiciones relacionadas con estos conceptos.
- Algunos estudiantes obtienen representaciones verbales que no corresponden a ninguna de las formas estudiadas, lo que denota el desarrollo de la independencia y la creatividad.
- Ha aumentado el interés, la perseverancia y el espíritu de colaboración entre los estudiantes.

Los principales errores cognitivos observados en el desempeño de los estudiantes son los siguientes:

- En ocasiones utilizan como representación de una sección cónica a un objeto que no la determina unívocamente, por lo que no satisfacen una de las características del concepto de representación cuya definición se expuso en el primer epígrafe de este trabajo. A este error le llamamos subdeterminación de la representación.
- Existen estudiantes que determinan como representación de una sección cónica a un objeto geométrico único, pero que no le corresponde a ésta. A este error le llamamos determinación de una representación incompatible.

- En algunas de las representaciones verbales se incluyen características del objeto que no son necesarias. A este error le llamamos sobredeterminación de la representación.

CONCLUSIONES

Para determinar las posibles transferencias entre las representaciones verbales de las secciones cónicas es posible aplicar un procedimiento compuesto por las operaciones siguientes: 1) determinar las formas de representación, 2) determinar el número de casos de las transferencias y 3) determinar las transferencias.

La aplicación de este procedimiento permitió determinar 86 posibles transferencias entre las representaciones verbales de las secciones cónicas y elaborar un conjunto de tareas de aprendizaje dirigidas a que los estudiantes fijen los procedimientos de transferencia correspondientes.

La utilización de las tareas elaboradas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, ha permitido constatar mejoras en el aprendizaje de los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática y Física.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cherbakov, S., Martínez, J., Figueras, A. y Cisneros, D. (1991). *Geometría Analítica. Tomo 2*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Kindle, J. (1976). *Teoría y problemas de Geometría Analítica*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Kletenik, D. (1979). *Problemas de Geometría Analítica*. Moscú: Mir.

Lehmann, C. (1972). *Geometría Analítica*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Corrales, A. y Ramírez, A. (2011). *Geometría Analítica (3ra Ed.)*. México: Pearson Edición.

Quero, O. y Ruiz, A. (2015) (en prensa). *Determinación de procedimientos de transferencia en la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica: el caso de la recta en el plano*.

Quero, O. y Ruiz, A. (2015a). *Procedimientos para la transferencia entre representaciones verbales del plano*. Ponencia presentada en el Evento internacional Yayabociencia 2015. Sancti Spiritus, Cuba.

Recibido: 14 de septiembre de 2016

Aprobado: 11 de octubre de 2016