INSTITUTO SUPERIOR PEDAGOGICO

CAPITAN: “SILVERIO BLANCO NUÑEZ”

SEDE PEDAGOGICA: SANCTI-SPIRITUS

CIUDAD: SANCTI-SPIRITUS

Trabajo de Diploma

TITULO: Problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado.

AUTORA: Neilys Alina De León Espinosa

TUTORA: Msc. Tairé Elizalde Pérez

CONSULTANTE: Msc. Ortelio Quero Méndez

“AÑO DEL 50 ANIVERSARIO DEL TRIUNFO DE LA REVOLUCION”

2009

Pensamiento

Pensamiento

Sólo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento. Este género de experiencia, a una determinada edad, puede determinar el gusto del trabajo intelectual y dejar, tanto en el espíritu como en el carácter, una huella que durará toda una vida.

Polya

Agradecimientos

Agradecimientos

Con el presente trabajo quiero agradecer

- *A todas las personas que me ayudaron en mi desempeño de ser maestra, a mis compañeros de trabajo y en especial a los del departamento de Ciencias Exactas.*

- *A mis amigas por su entusiasmo y comprensión en los momentos más difíciles.*

- *A todos los que en sus horas libres me dedicaron un pedacito de su tiempo y su empeño, en especial a María Catalina y Ortelio Quero.*

A todos GRACIAS

Dedicatoria

Dedicatoria

El presente trabajo se lo dedico

- *A mis padres y hermano por ser el motivo de mi superación y esfuerzo de ser mejor, porque sin su comprensión no hubiese podido llegar donde estoy.*

- *A mi esposo por estar a mi lado en los momentos en que más lo necesitaba.*

- *A mi tutora Tairé Elizalde por su ayuda incondicional.*

- *A nuestra Revolución por haberme dado la oportunidad de realizarme profesionalmente.*

Resumen

Resumen

Esta investigación ofrece problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas para contribuir al desarrollo de la habilidad resolver problemas en los estudiantes de décimo grado del IPVCE “Eusebio Olivera Rodríguez”. El aporte radica en la propuesta de problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas y una sugerencia de pasos que ayudan al estudiante a resolverlos. Estos problemas tienen como característica fundamental el trabajo con áreas y perímetros de figuras planas, así como el cálculo de cuerpos en los que aplican conocimientos básicos que ya poseen, provocando en ellos un esfuerzo cognitivo de mayor compromiso, La evaluación de los efectos originados en los estudiantes seleccionados en cuanto al desarrollo cognitivo, la actuación y el procedimiento demostró la validez y pertinencia de los problemas propuestos.

Índice

Páginas

Introducción

INTRODUCCION

Son innegables los logros alcanzados por nuestra Revolución en la esfera educacional durante estos últimos años, no obstante no significa que estos resultados se correspondan plenamente con las demandas que la sociedad plantea. El desarrollo de la época actual, precedido por el impetuoso avance de la Revolución Social y la Científica –Técnica, determina grandes cambios en el ámbito de la sociedad e impone un reto a la educación, que no puede marginarse de la realidad, de un mundo caracterizado por una aguda lucha ideológica y por constantes y aceleradas transformaciones.

El desarrollo intelectual en particular el referido al pensamiento de los estudiantes constituye en la actualidad una de las mayores exigencias que la sociedad plantea a la escuela y al sistema educativo en general. Se trata de trabajar para la formación de un futuro hombre que posea un pensamiento reflexivo crítico, que pueda aplicar desde el punto de vista cognoscitivo, estrategias para aprender por sí mismo.

La enseñanza-aprendizaje de la Matemática se encuentra en un proceso de renovación de sus enfoques, al pretender que los estudiantes adquieran una concepción científica del mundo, una cultura general integral y un pensamiento científico para poder cuantificar, estimar, extraer regularidades, procesar informaciones, buscar causas, vías de solución, incluso, de los más simples hechos de la vida cotidiana y, de tal forma, los prepare para la actividad laboral en virtud de mantener una actitud comprometida y responsable ante los problemas científicos y tecnológicos a nivel local, nacional, regional y mundial.

Esto implica que los estudiantes adquieran conocimientos, habilidades, modos de la actividad mental y actitudes en un ambiente interactivo, de reflexión, donde se propicie y estimule su capacidad de razonamiento, su imaginación y creatividad.

En la enseñanza de la Matemática existe una gran problemática a resolver por parte de maestros y que constituye hoy uno de los aspectos esenciales en el

proceso de enseñanza aprendizaje: el tratamiento de la resolución de problemas.

Al analizar los objetivos generales de la asignatura de Matemática en el nivel medio superior se plantea como uno de los más importantes la formulación y resolución de problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científicos-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas y geométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.

Esta temática se aborda desde los primeros grados de la escuela primaria y se continúa hasta la enseñanza media superior, sin embargo se ha podido constatar que estas aspiraciones no muestran, todavía, los niveles de satisfacción ya que existen grandes insuficiencias. En las video-clases se dedican espacios para estos objetivos, con un tiempo limitado; la bibliografía que se utiliza es la existente de antes de las transformaciones, lo que no permite el desarrollo de habilidades, la imaginación y creación de los estudiantes de nuevos caminos y métodos de solución; existen software educativos en los sistemas informáticos de las escuelas donde se proponen problemas, pero también clasificados por contenidos, eficaces para ejercitar lo aprendido, pero no para desarrollar la habilidad resolver problemas.
Así lo corroboran las diferentes vías utilizadas para evaluar la calidad del aprendizaje como son las comprobaciones de conocimientos que se realizan por diferentes vías (evaluaciones sistemáticas, parciales y finales), los resultados obtenidos en la evaluación de la calidad de la educación y en los exámenes de ingreso a la Educación Superior. Tal situación precisa la búsqueda de nuevos problemas geométricos que se modelen con ecuaciones cuadráticas, donde el estudiante aplique una parte importante de los conocimientos adquiridos como el cálculo de cuerpos y, áreas y perímetros de figuras planas, sin esquemas ni algoritmos repetitivos que, lejos de desarrollar habilidades, capacidades y el pensamiento, mecaniza un proceso que hace de

la solución de problemas un acto rutinario contrapuesto a los objetivos perseguidos con la enseñanza de esta habilidad en la escuela cubana actual.

Las reflexiones anteriores constituyen sólidos argumentos que permiten justificar el siguiente problema científico: ¿Cómo contribuir al desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez"?

Para darle solución a este problema se necesita trabajar desde el objeto de estudio que se enmarca en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos en el décimo grado e incidir directamente en el campo de acción de el desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado.

Este trabajo tiene como objetivo: aplicar problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas para contribuir al desarrollo de la habilidad resolver problemas en los estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez".

Para arribar a la adquisición de este propósito se plantearon las siguientes preguntas científicas

1. **¿Cuáles son los fundamentos teóricos-metodológicos que sustentan el desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado?**
2. **¿Cuál es el estado inicial del desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado?**
3. **¿Qué problemas proponer para contribuir al desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado?**
4. **¿Qué resultados se obtienen con la aplicación de problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado?**

La búsqueda de respuestas a estas interrogantes favoreció la elaboración de las siguientes tareas científicas

1. Determinación de los fundamentos teóricos-metodológicos que sustentan el desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado.

2. Diagnóstico del estado inicial del desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado.

3. Elaboración de problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas para contribuir al desarrollo de la habilidad resolver problemas en el décimo grado.

4. Comprobación del nivel de efectividad de la aplicación de problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado.

Variable independiente: problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas.

Variable dependiente: el desarrollo de la habilidad resolver problemas.

Para evaluar a los estudiantes en el nivel que poseen con respecto al desarrollo de la habilidad resolver problemas, se determinan las siguientes dimensiones con sus correspondientes indicadores los cuales revelan, en un sentido amplio e integral, el alcance práctico de este concepto.

1. Dimensión Cognitiva

- **Interpretar el problema que se plantea.**
- **Esbozar la figura de análisis.**
- **Representar el modelo matemático.**
- **Resolver el modelo matemático.**
- **Comprobar el resultado con la situación planteada.**

2. Dimensión actitudinal

- **Interés por resolver los problemas.**

3. Dimensión procedimental

- **Desarrollo del proceso de resolución del problema.**

Para la realización de este trabajo se utilizaron diferentes métodos científicos:

Del nivel teórico se utilizaron diferentes métodos como:

- El analítico- sintético: radica en realizar un estudio detallado de los distintos conceptos de problemas ofrecidos por los autores consultados a fin de encontrar los puntos de contacto entre estos y determinar las relaciones que se establecen entre ellos; y se compara la información obtenida para establecer las correspondientes conexiones y poder hallar regularidades del estado real del problema investigado.
- El inductivo-deductivo: se emplea al profundizar en el diagnóstico individual de los sujetos seleccionados para poder determinar las tendencias en el comportamiento de los diferentes indicadores y llegar a las generalidades que caracterizan el estado real del grupo en cuanto al desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan con ecuaciones cuadráticas.
- El histórico-lógico: permite penetrar en los antecedentes y la trayectoria real del desarrollo de la habilidad resolver problemas que se modelan con ecuaciones cuadráticas en el transcurso de la enseñanza general y, así, poder aplicar las leyes generales del funcionamiento y avance del fenómeno objeto de estudio.
- El análisis bibliográfico: realizado con el objetivo de analizar qué hay escrito del tema seleccionado como fuente de ideas que permitió tener una visión generalizada y particular del problema a investigar.

Del nivel empírico se utilizaron diferentes métodos como:

- La observación participante: tiene como objetivo constatar el nivel de motivación y la actitud que asumen los estudiantes para la resolución de los problemas. Se aplica en aquellas clases donde se enseñan problemas que se modelan con ecuaciones cuadráticas.
- El pre-experimento: posibilitó constatar el nivel de desarrollo cognitivo (interpretar, modelar, representar, resolver y comprobar) de los alumnos en la resolución de problemas que se modelan con ecuaciones cuadráticas en la etapa inicial de la investigación y permitió evaluar el nivel evolutivo alcanzado por los estudiantes después de introducir la propuesta de problemas geométricos que se modelan con ecuaciones cuadráticas.

Del nivel estadístico y matemático se utilizó:

• El cálculo porcentual: permitió el procesamiento de todos los datos que se recogieron durante el proceso de investigación, a través del análisis porcentual.

• La elaboración de tablas y gráficos: permitió reflejar el estado inicial y final de las dimensiones.

La población está compuesta por 260 estudiantes de décimo grado, grupos pertenecientes al IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez". Como muestra se determinó mediante la forma no probabilística de muestreo intencional al grupo 10mo1, compuesto por 34 estudiantes, la cual representa el 13,0% de la población.

El aporte científico de esta investigación radica en la propuesta de problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas y una sugerencia de pasos que ayuda al estudiante a resolverlos. Estos problemas tienen como característica fundamental el trabajo con áreas y perímetros de figuras planas así como el cálculo de cuerpos.

El Trabajo de diploma está estructurado por una introducción en la cual se justifica el problema científico y se sintetizan los principales elementos del diseño teórico y metodológico. Además consta de dos capítulos:

• El primero se destina a la fundamentación teórica-metodológica que sustenta la propuesta de problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas, así como los antecedentes históricos de los problemas matemáticos, su comportamiento en Cuba, su resolución como habilidad a desarrollar en los estudiantes, las tendencias actuales de su uso en la enseñanza de la matemática y su conceptualización.

• El segundo contiene el estado inicial del problema, además de la formulación de la propuesta y los resultados obtenidos con su aplicación.

También contiene las conclusiones y recomendaciones a las que arribó la autora del trabajo así como, la bibliografía consultada y los anexos.

CAPITULO 1. CONSIDERACIONES TEORICAS-METODOLOGICAS QUE SUSTENTAN EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD RESOLVER PROBLEMAS EN DECIMO GRADO.

En este capítulo se definirán conceptos esenciales que sustentan el desarrollo de la habilidad resolver problemas, así como las tendencias actuales del trabajo con estos en la escuela cubana y algunas de sus clasificaciones. Se mostrará además que estrategia siguió la autora de este trabajo para la elaboración de los ejercicios a aplicar en la modalidad de problemas.

1.1 Los problemas matemáticos y sus antecedentes históricos

La enseñanza de la resolución de problemas a lo largo de la historia ha sido desarrollada desde tiempos antiguos. En cada período histórico se destacaron figuras representativas que aseguraban la finalidad y objetivos del estudio de la matemática.

Así, por ejemplo, en la antigüedad los egipcios y babilonios enfatizaron en los problemas del cálculo como elemento que servía de preparación al hombre. En esta época, se acentuaba la relación entre un problema nuevo y otro ya conocido, cuestión que en la actualidad se conoce como el principio de analogía y se puede conocer de su existencia desde tiempos remotos.

En la Edad Media, indios, árabes y europeos hacen que la matemática aflore con aportes fundamentales en resoluciones de ecuaciones de segundo grado indeterminadas y resolución de problemas prácticos. También los árabes utilizaron prácticas algebraicas en la resolución de problemas matemáticos y se da lugar al término actual de algoritmo a partir de la figura representativa de A.L. Juarisme. Se escribe además el primer libro de Álgebra.

La Edad Moderna se caracterizaba por predominar la significación utilitaria de la matemática. En esta época marcaron un importante papel figuras destacadas como el matemático francés René Descartes (1596 – 1650) el cual tuvo sus principales aportes en la resolución de problemas.

También se destaca otro importante matemático suizo L. Euler (1707 – 1783) que tuvo el éxito en la heurística según testimonios, se caracterizaba por poseer una gran habilidad para la creación de algoritmos y estrategias para la resolución de problemas.

Ya en los inicios del siglo XX aparecen otras figuras como H. Poincaré (1854 – 1912) matemático francés que se dedicó a la Metodología General de la Ciencia y su principal aporte lo realiza con su texto "Fundations of Science" (1913) donde dedica un buen tiempo al análisis de la creación de los conceptos matemáticos y elabora cuatro etapas y J. Hadamard (1865 – 1963) continúa la obra de Poincaré, profundizando en la actividad consciente, el cual expone un esquema, más preciso, para el proceso de creación matemática, y utiliza también cuatro etapas.

Un aporte importante de esta época en materia de resolución de problemas aparece en el año 1945, con la aparición del libro "How to solve it" del húngaro matemático y pedagogo George Polya, donde indica recomendaciones con el propósito de lograr un pensamiento productivo. Su principal aporte constituyó el enfoque heurístico donde destaca fundamentalmente cuatro etapas bien definidas durante el proceso de resolución de problemas, y propone reglas en cada una de ellas.

Otro matemático que realizó importantes aportes en los métodos de resolución de problemas fue Schoenfeld (EUA), este apuntó sus principales fundamentos en estrategias dirigidas a alumnos talentos, y propuso también cuatro fases o etapas para la resolución de problemas.

En nuestro país un conjunto de investigadores se han dedicado a investigar esta temática. Resulta necesario destacar autores, como Rizo y Campistrous, los cuales se han dado a la tarea de profundizar sobre algunas estrategias y técnicas para resolver problemas que faciliten el aprendizaje en las condiciones de enseñanza masiva. Uno de sus textos que ha marcado un hito fundamental es "Aprende a resolver problemas aritméticos".

Importante también es la contribución que a esta tarea han ofrecido Labarrere, A.F., con su libro "Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas en la escuela primaria" (1987); el cual constituyó la primera obra dedicada a los cuestionarios psicológicos de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos que se publicó en nuestro país.

Autores como Joaquín Palacio ha hecho énfasis en las cuestiones iniciales para la resolución de problemas, la interpretación del problema o etapa de comprensión el cual se ha interesado en la elaboración de ejercicios que faciliten esta etapa.

En fin, en todo el decursar histórico, la resolución de problemas ha sido abordada desde épocas remotas y ha constituido un objetivo fundamental en la enseñanza de la matemática.

1.2 Análisis de algunas de las definiciones de problemas

Las ideas que más se reiteran en la literatura sobre resolución de problemas reflejan distintos aspectos teóricos que permiten identificar elementos importantes alrededor del concepto de problema. Las definiciones tienen en cuenta distintos puntos de vista de carácter psicológico, pedagógico y de la didáctica de la Matemática en particular. A partir de esos enfoques se delinean un grupo de aristas que se entrecruzan y encuentran un lugar común en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para asumir la definición de problemas se parte de las acepciones más amplias o generales que usualmente aparecen en el lenguaje común y en los diccionarios; se restringe su extensión en la medida que se toman criterios de autores que introducen características nuevas a su contenido.

Problema. "Cuestión o proposición dudosa que se trata de resolver// Proposición encaminada a averiguar el modo de obtener un resultado cuando se conocen ciertos datos" (Aristos, 1978:388).

Problema. "Controversia o duda que se trata de resolver.// Lo que impide o dificulta la consecución de algo; Traba // Cuestión que ha de resolverse científicamente previo conocimiento de ciertos datos // Tema delicado o para el que no se tiene una respuesta única // Enigma, pena o dificultad (Diccionario de la lengua. Real Academia Española ,1984:332).

En conclusión, el término problema se usa comúnmente para asignar a una situación que conlleva duda, contradicción o controversia en la consecución de una meta, las cuales constituyen obstáculos o trabas para encontrar de inmediato una vía de solución a partir de ciertos datos.

Según el psicólogo Rubinstein(1977: 109), en su definición del concepto de problema, parte de establecer una diferencia entre una situación problemática y problema y comprende la primera como aquella situación que: "(...) suscita

interrogantes en virtud de los elementos que en ella entran y no nos parecen adecuados a las correlaciones de que forman parte en la situación dada", y por problema : "(...) los datos que condicionan la resolución y que se incorporaren en calidad de las premisas necesarias en el razonamiento que lleva a la misma."

Del análisis de esta definición establecida por Rubinstein (1977), se observa que parte de la situación problemática para definir el problema, además encarna dos características comunes: en todo verdadero problema el sujeto desconoce el recurso de las ecuaciones numéricas simples.

Para Polya (1962) ─un clásico de la investigación de la resolución de problemas─ tener un problema significa "Buscar conscientemente con alguna acción apropiada, una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar". (Santos, Trigo. L.M., 1994: 30).

Para Schoenfeld "Son situaciones problémicas aquellas en las que el individuo no tiene acceso directo a medios de solución más o menos preparados". (Cervera 1998:253).

En su definición, se aprecia que este autor centra su caracterización en la vía de solución, sobre la cual considera que debe ser desconocida, no preparada de antemano, y también que, a diferencia de Polya, Schoenfeld no resalta el interés del individuo por resolverla.

Según Santos Trigo, Luz Manuel (1996:302) "Un problema en términos generales es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes:

a) La existencia de un interés. Es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.

b) La no existencia de una solución inmediata. Es decir no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la situación. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no son suficientes para determinar la solución.

c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.

d) La atención por parte de una persona o grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esta situación. Es decir,

un problema es tal que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo"

Queda claro en estos elementos que un problema deja de serlo cuando se pierda el interés, se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo o la posibilidad de que la solución no sea única. Según su criterio, un problema es tal hasta que se logre encontrar la vía (o vías) de solución y se haya resuelto.

Ballester y Otros (2000: 407) consideran que: "Un problema es un ejercicio que refleja determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de las ciencias o la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución, también desconocida, se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos."

Esta definición es de gran importancia para la escuela porque los autores consideran que un problema es un ejercicio que exige medios matemáticos para su solución. La situación inicial tiene que ser conocida, mientras que la situación final es desconocida al igual que la vía de solución, y se obtiene mediante procedimientos heurísticos.

Según Labarrere (1998: 2) "Todo verdadero problema se caracteriza porque exige que aquel que lo resuelve comprometa de una forma intensa su actividad cognoscitiva, que se emplea a fondo desde el punto de vista de la búsqueda activa, el razonamiento, la elaboración de hipótesis o ideas previas de resolución etc. Para aquellos que tengan conocimientos(experiencia anterior) de cómo se resuelve una situación dada, la tarea de dar solución al problema consistirá sólo en la aplicación rutinaria de los conocimientos asimilados al respecto, el esfuerzo cognoscitivo comprometido será mínimo y la solución, en dependencia de un conjunto de circunstancias, será obtenida con más o menos celeridad. La situación dada no puede ser considerada, entonces, como un problema".

El criterio de Labarrere enfatiza el carácter activo del sujeto. Se refiere a que el alumno debe crear la necesidad de superar las barreras que el problema le provoca, debe desear conocer las incógnitas de la situación planteada, pero para lograr esta motivación debemos tener presente la diferenciación y el

diagnóstico por parte del maestro, de aquellas situaciones que en realidad son capaces de provocar y activar el trabajo mental del alumno.

Otra definición importante es la emitida por Rizo y Campistrous (1998: IX) quienes dicen que: “problema es toda situación en la que haya un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida, cuando es conocida deja de ser un problema”.

En esta investigación se asume la ofrecida por Campistrous y Rizo, cuyas ideas se sintetizan en aquella situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; y la persona debe querer hacer la transformación.

En relación con el término de problema escolar se coincide con el criterio de los doctores Rizo y Campistrous (2002: 7) al establecer que: “los problemas escolares se caracterizan por lo general por ser situaciones didácticas que asumen, en mayor o menor grado, una forma problémica cuyo objetivo principal es la fijación o aplicación de los contenidos de una asignatura dada (conceptos, relaciones y procedimientos), y que aparecen regularmente en el contexto de los programas que se quieren trabajar. Estos problemas escolares son tipificados, en mayor o menor medida, y para cuya solución se desarrollan procedimientos más o menos rutinarios”.

1.2.1 Comportamiento de la resolución de problemas en Cuba

En Cuba, el proceso de asimilación de la resolución de problemas por los programas de Matemática en todos los niveles, ha presentado la misma lentitud que se ha dado en otros países. Una mirada crítica a esta situación permite reconocer que la escuela tradicional se conformaba con la competencia en el cálculo, y la consideraba como un aporte a la eficiencia social. Sin menospreciar el valor de la destreza operatoria, en esta época, se puede sentir satisfacción, a menos que se acompañe de un alto grado de competencia en la manera de pensar, por el desarrollo de la operatoria y el cálculo. En este sentido, conviene recordar a los maestros que se aprende a pensar pensando.

Con el triunfo de la Revolución, en 1959, se abren nuevas perspectivas para el desarrollo general de la educación en Cuba. De 1961 a 1970, aparecen numerosas contribuciones a la reorganización del Sistema Nacional de Educación, el fenómeno de la implantación a escala mundial de la llamada “Matemática Moderna” que, a juicio de muchos investigadores, exageró el énfasis en la estructura abstracta de esta ciencia en detrimento de aspectos importantes como la intuición. En Cuba, los cambios en los programas de Matemática (1964-1967), no mejoraron la situación descrita respecto a la enseñanza de la resolución de problemas.

Entre los años 1977 y 1987 se implantó en Cuba el llamado “Plan Alemán” que entre sus objetivos se planteaba inicialmente: Perfeccionar los métodos de enseñanza sobre la base del aprendizaje para el desarrollo y otros cambios encaminados al mejoramiento del trabajo de la escuela de educación general, en cuanto a la preparación de las nuevas generaciones, para cuya consecución se planteaban una serie de tareas, entre las cuales destacaba:

"(…) enseñar a los alumnos a utilizar (aplicar) libremente sus conocimientos y habilidades (...)" de manera que pudieran "(…) adquirir por sí solos los nuevos conocimientos después de terminar la escuela (…)”. (Colectivo de autores. MINED. 1975:231).

Lo anterior constituyó, por el contenido implícito en cuanto a la concepción del desarrollo del pensamiento y su "libre" aplicación personal, un buen punto de partida para el cambio que la revolución científico-técnica exigía en ese momento.

A partir de 1987 y hasta la actualidad, se han producido importantes cambios en la concepción de la enseñanza de la Matemática. En las Orientaciones Metodológicas del Programa de Matemática de Sexto Grado, puede leerse este planteamiento de Polya: “(...) ¿Qué significa dominar las Matemáticas? Significa resolver problemas, y no solo problemas tipo, sino también problemas que exijan pensamiento independiente, sentido común, originalidad, inventiva”. (Colectivo de autores. MINED. 1990:234). Es así como, desde la enseñanza primaria, los programas reflejan una nueva concepción acerca de la Matemática.

Luis Campistrous, refiriéndose a los resultados del Primer Estudio Internacional Comparativo de Lenguaje, Matemática y Factores Asociados (OREALC, 1997) — en el que Cuba participó y obtuvo resultados significativamente superiores a los alcanzados por los demás países del área— plantea:

"(…) es insuficiente la atención a las formas de orientación y control de la actividad de aprendizaje que propicien eliminar la tendencia poco reflexiva de los estudiantes a ejecutar sin que medien los procesos de análisis y razonamiento requeridos. (...) En Matemática, los resultados de las preguntas formales de cálculo aunque aún no satisfacen completamente las expectativas, son muy superiores a las de aquellas donde tienen que utilizar el cálculo en una situación con carácter de problema (....). Es obvio que esta dificultad es una de las más frecuentes en Matemática porque se reveló en todas las preguntas de solución de problemas que tuvieron un importante peso en las pruebas utilizadas". (2002:52).

Es evidente que con los trabajos de orientación y superación que se realizan sistemáticamente a nivel nacional, los logros en cuanto a la enseñanza de la resolución de problemas, serán una realidad para los próximos años en Cuba. Se espera que este trabajo constituya un modesto aporte al logro de formar nuevas generaciones de estudiantes capaces de reflexionar sobre la forma de resolver los problemas que la vida les depare, en las aulas y fuera de ellas.

1.3 Tendencias actuales del uso de los problemas en la enseñanza

A partir de la década de los años 80, se ha desarrollado en el mundo un movimiento marcado hacia la utilización de la solución de problemas con fines didácticos. A continuación, se destacan cuatro tendencias que resumen los esfuerzos que se realizan en este sentido según Rizo y Campistrous (2002: 12) y estas son:

La enseñanza problémica: consiste en problematizar el contenido de enseñanza, de tal forma que la adquisición del conocimiento se convierte en la resolución de un problema en el curso de la cuál se elaboran los conceptos, algoritmos o procedimientos requeridos. Está muy elaborada desde el punto de vista didáctico y tiene un cuerpo categorial muy estructurado. En esta forma de enseñanza poco se deja a la improvisación, y la forma en que debe proceder el alumno es como si el hilo conductor del pensamiento del maestro determinara la actividad del alumno.

La enseñanza por problemas: que consiste en el planteamiento de problemas complejos en el curso de cuya solución se requieren conceptos y procedimientos matemáticos que deben ser elaborados. La mayor parte de las veces los problemas se limitan a una función motivacional y a aportar un contexto en el que adquieren sentido los conceptos y procedimientos matemáticos que se pretende estudiar.

La enseñanza basada en problemas: que consiste en el planteo y resolución de problemas en cuyo proceso de resolución se produce el aprendizaje. En este caso se trata de resolver problemas matemáticos relacionados con el objeto de enseñanza, sin confundirse con él, y que van conformando hitos en el nuevo aprendizaje. En este tipo de enseñanza queda mucho a la creatividad del docente y a la independencia y capacidad de los alumnos.

La enseñanza de la resolución de problemas: debe ser bien diferenciada de las anteriores, se ha difundido mucho mediante los textos que enuncian y practican "estrategias" para resolver problemas y después plantean problemas para aplicarlas. Esta nueva forma es otra tarea urgente, independiente de las anteriores y que, en rigor, debe procederlas.

Dos de ellas se han manifestado con mayor fuerza en Cuba y han constituido objeto de estudio de un buen número de investigadores de los Institutos Pedagógicos del país y del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas “La enseñanza problémica y la enseñanza de la resolución de problemas”.

Según sus defensores, se entiende como tal la metodología de enseñanza en la cual el profesor dirige todo el proceso de enseñanza-aprendizaje a la obtención del conocimiento objeto de estudio a partir de propiciar el enfrentamiento de los alumnos a la solución de un problema o sistema de problemas. Durante el proceso de solución, con su participación activa y creadora, además de asimilar los conocimientos y modos de proceder más racionales, los alumnos elevan el grado de actividad mental y desarrollan formas de pensamiento creador que contribuyen al desarrollo de su personalidad. “(…)” (Campistrous, 1999: 63).

Según Ballester (2001:73) “(…) la enseñanza de la Matemática proporciona buenas oportunidades para su estructuración problémica ya que ofrece a menudo la oportunidad de dirigir el proceso de asimilación partiendo de situaciones problémicas hacia la búsqueda y solución de problemas que surgen de situaciones típicas de la propia enseñanza tales como: elaboración de conceptos, demostraciones, búsqueda de leyes de solución de problemas, ejercicios de construcción.”

Por su parte, Torres plantea que los fundamentos de esta tendencia son: “(…) la problemicidad como rasgo inseparable del conocimiento, el pensamiento como un proceso de resolución de problemas y la nueva relación entre asimilación reproductiva y la asimilación creadora de los conocimientos.” (Palacio Peña, J., 2003:122).

En correspondencia con lo anterior, Palacio (2003:4) plantea las siguientes ventajas de la clase concebida a través de problemas:

- Aumenta el interés de los estudiantes al ver la inmediata aplicación práctica de lo que estudia.
- El estudiante deja de ser un receptor de las ideas exclusivas del profesor y se convierte en un protagonista de la actividad, con una activa participación.
- Los contenidos no se olvidan con facilidad, pues la mayoría de los problemas, principalmente los que tienen texto, permiten asociar el contenido matemático con los interese de la comunidad y del estudiante en particular.
- Pueden formularse nuevas preguntas sobre la situación resuelta, aspecto tan importante como la propia resolución de problemas.
- Ayuda a desarrollar la expresión oral y por tanto facilita el poder de comunicación, desarrollando y enriqueciendo el idioma.
- Contribuyen a dar respuesta a intereses e inquietudes de los estudiantes, si se plantean en correspondencia con estas.
- Contribuyen a eliminar creencias negativas respecto a la capacidad del estudiante hacia la Matemática.

Los niveles en el preuniversitario (en el que se desarrolla esta investigación), pueden convertirse en el contexto idóneo para la puesta en práctica de esta metodología debido a que estos alumnos, por su edad y experiencia previa en los grados precedentes, han sido dotados de potencialidades, tanto cognitivas como afectivas, para asimilarlas.

La enseñanza de la resolución de problemas constituye para la enseñanza de la Matemática una necesidad, pues se acepta que el pensamiento comienza con un problema, con una contradicción, asombro o sorpresa, como estímulos externos necesarios para desencadenar el proceso cognitivo; se debe

capacitar al alumno para que desarrolle un sistema de acciones de respuesta adecuado a partir de enseñarles técnicas para resolver problemas y estrategias heurísticas efectivas que estimulen su autonomía, en lugar de transmitirles recetas cuasi algorítmicas para la solución de determinados tipos de problemas.

Labarrere(1984:183) expresa esta idea planteando que “(...) el pensamiento es una actividad que tiene lugar fundamentalmente cuando el hombre resuelve problemas (…)”Organizar la didáctica de la Matemática ,enseñando a resolver problemas como objeto de estudio, garantiza un alto nivel de desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos y la adquisición de sólidos conocimientos, habilidades y hábitos que puede utilizar en la solución de situaciones problémicas, cada vez más complicadas, dentro y fuera del ámbito escolar”.

En su libro ¿How to solve it?, y en el resto de su obra, Polya deja claro que para él es trascendental la importancia del tratamiento de la solución de problemas como parte de la clase de Matemática, de manera que el sujeto utilice sus conocimientos y habilidades adquiridos con anterioridad, y esta actividad de carácter intelectual contribuya a la fijación de los mismos, además de que desarrolle habilidades en el uso de estrategias exitosas de solución.

1.3.1 Algunas clasificaciones de problemas

El objetivo de la clasificación está dado, en lo fundamental, en organizar la actividad y facilitar los modos de actuación de dichos alumnos durante el proceso de resolución de los mismos.

Diversos investigadores han realizado varias clasificaciones, utilizando distintos criterios. Los mismos son variados, van desde la forma de presentación de los problemas, pasando por los contenidos involucrados, hasta el tipo de habilidad que se intenta desarrollar.

Según Morell (2002), Polya (1945), los diferencia en dos grandes: grupos los problemas por resolver y los problemas por demostrar. Por su parte González (1954), los distingue en: particulares y generales. Mientras que en los trabajos de Bertoglia (1996:111), aparece una clasificación que está más acabada, ya que se enfatiza no sólo en el proceso de resolución, sino que además pone al descubierto la utilización de la lógica dentro del proceso; planteando que:

Problemas Cerrados: la resolución se deduce de forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema y que resulta suficiente para encontrar la respuesta correcta. El resolutor dispone de toda la información, sólo necesita integrarla aplicando los recursos de la lógica; por ello suelen llamarse "problemas de inferencias lógicas".

Problemas abiertos: el resolutor necesita ir más allá de la información recibida, utilizándola de manera y/o modificando los significados atribuidos a los elementos del problema"

Una de las clasificaciones más usada en el contexto de la enseñanza de las matemáticas es la dada por Palacios y Zambrano (1993: 54). Que analizan los problemas en tres grandes campos:

Según el campo del conocimiento implicado:

Está dado por la diferencia entre los problemas que se plantean en la enseñanza de la ciencia y aquellos que tienen lugar en la vida cotidiana. En el primer caso lo importante no es la obtención de la solución, sino más bien el proceso para llegar a ellas. En cambio, ocurre lo contrario en los problemas cotidianos.

Según el tipo de tarea:

Se pueden dividir en problemas cualitativos y problemas cuantitativos. Se entiende por problemas cualitativos aquellos que en su resolución no se precisa recurrir a determinaciones numéricas, y se resuelven de forma verbal/escrita, normalmente se ciñan a la interpretación científica de fenómenos reales. Por el contrario, los problemas cuantitativos, o simplemente "problemas", exigen cálculos numéricos efectuados a partir de las ecuaciones correspondientes y de los datos disponibles en el enunciado.

Según la naturaleza del enunciado y características del proceso de resolución:

"Los problemas cerrados son enfocados como aquellas tareas que contienen toda la información precisa y son resolubles mediante el empleo de un cierto algoritmo por parte del solucionador. Los problemas abiertos, por el contrario, implican la existencia de una o varias etapas en su resolución, que deben ser aportadas por el solucionador mediante la acción del pensamiento productivo. Bajo este criterio, los problemas cualitativos pueden ser considerados en la

mayoría de los casos como problemas abiertos y los cuantitativos como cerrados"

Otras clasificaciones que encontramos en la práctica pedagógica son las referidas en la (Pág. Web Qué tipos de problemas existen.htm) donde entre otras se encuentran:

Por el contenido que está involucrado:

- De móviles
- De tanques
- De cifras
- De geometría
- De lógica
- Por habilidad que intenta desarrollar.
- Para el desarrollo de la intuición geométrica.
- Para el desarrollo del pensamiento lógico.
- Para el desarrollo del pensamiento abstracto.
- Para la construcción de modelos matemáticos.
- De transformaciones especiales.
- Problemas de ingenio.
- De comunicación y creación de lenguajes.
- Para la construcción de modelos matemáticos.

Estas clasificaciones están encaminadas a facilitar el proceso de enseñanza – aprendizaje y en especial el de la resolución de problemas.

Las investigaciones realizadas por Rizo y Campistrous le permiten considerar un grupo de razones que han movido a considerar los problemas dentro de la enseñanza. Existe correspondencia entre estas y las afirmaciones de Vilanova acerca de que la utilización de los términos problema y resolución de problemas ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años. Vilanova los describe como sigue:

Primer significado: resolver problemas como contexto. Desde esta concepción los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles:

- Como una justificación para enseñar matemática
- Para proveer especial motivación a ciertos temas

- Como actividad recreativa
- Como medio para desarrollar nuevas habilidades
- Como práctica

Segundo significado: resolver problemas como habilidad. La mayoría de los desarrollos curriculares y programas de estudio recientes bajo el término resolución de problemas son de este tipo. La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas; esto es, resolver problemas es caracterizado como una habilidad de nivel superior, que a su vez es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas, desarrollándola con ejercicios rutinarios.

Las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen en esta interpretación son precisamente las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con "problemas" de práctica relacionados para que las técnicas puedan ser dominadas.

Tercer Significado: Resolver problemas es "hacer matemática". Hay un punto de vista particularmente matemático acerca del rol que los problemas juegan en la vida de aquellos que hacen matemática. Consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones.

El matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática es Polya. En su libro "How to solve it" Polya (1954), introduce el término "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla más adelante en sus obras.

1.3.2 La resolución de problemas como habilidad

Sobre el concepto de habilidad son conocidos los estudios realizados por L. F. Sprint en su libro Formación de las habili¬dades profesionales del maestro, en el que selecciona 22 definiciones dadas por autores como O. A. Abdulina, E. I. Boiko, I. M. Vikto¬rov, N. V. Kuzmina, A. N. Leontiev, K. K. Platonov, A. A. Stepa-nov y otros, que expresan las dos principales tendencias en la evolución de este concepto: los que definen la habilidad como un hábito culminado y los que la definen como una acción creadora en constante perfeccionamiento. El estudio de éste y otros traba¬jos sobre el tema, indica la mayor tendencia al segundo grupo, tanto en psicólogos como en pedagogos.

Derivado de esta tendencia una de las definiciones más difundida en nuestro país es la que señala que las habilidades constituyen el dominio de acciones (psíquicas y prácticas) que permiten una regulación racional de la actividad, con ayuda de los conocimientos y hábitos que el sujeto posee. Las habilidades se forman con la sistematización de las accio¬nes subordinadas a un fin consciente y se desarrollan sobre la base de la experiencia del sujeto, de sus conocimientos y de los hábitos que posee; pero los conocimientos se manifiestan o expresan concretamente en las habilidades, en la posibilidad de operar con ellos, de ahí que se les denomine como instrumenta¬ción consciente en la manifestación ejecutora de la actuación de la persona en un contexto dado.

Evidentemente, queda limitada la habilidad matemática a la repetición de la misma forma de acción que con la automatización puede ser incorporada a formas más complejas como acciones parciales. Esto ha conducido a la idea de que la formación y desarrollo de una habilidad matemática se alcanza con la formación de determinados patrones cuando se propone la ejercitación con grupos de ejercicios similares sin que necesariamente se reflexione sobre las posibilidades de utilización en situaciones diferentes, en una diversidad de contextos.

En el libro de Metodología de la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria (1991) de un colectivo de autores cubanos se asume la habilidad como "las acciones que el sujeto debe asimilar y, por tanto, dominar en mayor o menor grado y que, en esta medida, le permiten desenvolverse adecuadamente en la realización de determinadas tareas". Asumen las habilidades como modos de actuación que se forman y desarrollan en la actividad a través de los siguientes momentos:

- **Comprensión del modo de actuar y del orden en que deben realizarse las acciones.**
- **Asimilación de forma consciente del modo de actuación.**
- **Fijación del modo de acción asimilado, a través de la repetición.**

• Aplicación de las habilidades adquiridas a otras situaciones más complejas desde el punto de vista del contenido y en la adquisición de nuevos conocimientos.

Estos momentos expresan un proceso en el que el alumno llega a apropiarse de un modo de actuación que, sin embargo, puede conducir a la elaboración de un proceso algorítmico, a la formación de un hábito, cuando se señala como esencial la repetición de la acción con la misma dificultad hasta lograr su automatización, aunque queda positivamente planteada la idea de que deben variarse las condiciones del ejercicio y aumentar las dificultades, destacando también el papel importante del lenguaje matemático, no sólo como medio de comunicación sino como una forma de pensamiento.

Con el objetivo de promover la formación de ciertas habilidades inherentes al quehacer matemático, y que facilitasen la resolución de problemas de diferentes índoles, surge el Sistema de Habilidades Matemáticas. Dicho sistema tuvo su origen en los trabajos de la doctora H. Hernández (1984), quien tomando como base la teoría psicológica de la actividad, expuso un Sistema Básico de Habilidades Matemáticas para los niveles secundario y terciario de la educación, sobre la base del análisis de las tareas matemáticas que se ejecutan en esos niveles.

El sistema en un principio fue compuesto por las habilidades básicas: interpretar, identificar, recodificar, calcular, algoritmizar, graficar, definir y demostrar (Hernández ,1984); las cuales fueron empleadas como guía en la elaboración de programas de asignaturas y en la labor formativa realizada por los profesores. Al resultar, más tarde, insuficientes para el trabajo de formación de los estudiantes; se continúa profundizando en esta dirección por otros investigadores, ampliándose dicho sistema con otras habilidades como modelar (T. Rodríguez, 1991), fundamentar (L. Valverde, 1990), comparar (J. R. Delgado, 1995), controlar (H. Hernández y otros miembros del grupo BETA, 1997), y por último, resolver, aproximar y optimizar (J. R. Delgado, 1999), pasando a considerarse éste como Sistema de Habilidades Generales Matemáticas, contentivo del núcleo básico que le dio origen.(citado por tesis de doctorado de Isabel Alonso

La resolución de problemas además es considerada una habilidad más a desarrollar en los estudiantes (Kilpatrick, 1998: 45).

Por su parte Schoenfeld (1985), describe los cuatro enfoques que, en su opinión, han seguido los trabajos sobre resolución de problemas a nivel internacional:

- Problemas presentados en forma escrita, a menudo problemas muy sencillos pero que colocan la Matemática en el contexto del “mundo real”.
- Matemáticas aplicadas o modelos matemáticos, es decir, el uso de matemáticas sofisticadas para tratar los problemas que reflejan el “mundo real”.
- Estudio de los procesos cognitivos de la mente, consistente en intentos de exploración detallada de aspectos del pensamiento matemático en relación con problemas más o menos complejos.
- Determinación y enseñanza de los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos complejos.

1.4 Etapas o modelos de la resolución de problemas

A lo largo del estudio de la resolución de problemas matemáticos no pocos se han dado a la tarea de definir etapas o modelos, que aseguran el éxito en la resolución de estos; aunque no existen reglas especificas.

A continuación exponemos una recopilación de algunos de estos modelos tomados de la Tesis de Maestría de Sigarreta (2001)

Schoenfeld:

1. Análisis y comprensión del problema.
2. Diseñar y planificar la solución.
3. Explorar soluciones.
4. Verificar soluciones.

Miguel de Guzmán:

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Llevar adelante la estrategia.
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Polya:

1. Comprender el problema.
2. Concebir el plan de solución.
3. Ejecutar el plan de solución.
4. Examinar la solución obtenida.

Comprender el problema. Es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática. Es considerada por varios autores como la etapa más difícil e incluye la lectura cuidadosa del enunciado, la identificación de lo que se conoce y lo que se busca; la relación entre los datos y las incógnitas y si es posible hacer un esquema o dibujo de la situación.
Concebir el plan de solución. Esta etapa requiere pensamiento flexible, alejado del mecanicismo. Incluye comparar el problema con otros conocidos, considerar la posibilidad de plantear el problema de otra forma; Imaginar un problema parecido pero más sencillo; Suponer que el problema ya está resuelto y analizar cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida; preguntarse si serán utilizados todos los datos.

Ejecutar el plan de solución. También requiere flexibilidad, alejada del mecanicismo, teniendo en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica. Al ejecutar el plan se debe comprobar la validez y necesidad de cada uno de los pasos, se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace; si se presenta alguna dificultad que impida proseguir, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

Examinar la solución obtenida. Es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación del resultado obtenido por el modelo del problema y su correspondencia con la realidad que se necesita resolver. Al finalizar la puesta en práctica del plan se debe proceder a leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado, constatar que el resultado obtenido es lógico en correspondencia con el contexto, comprobar la solución si es posible, valorar otro modo de resolver el problema y la posibilidad de existencia de otras soluciones, verificar que la presentación de la solución explica claramente el resultado hallado; finalmente utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.(Polya, G.,1945: 19)
Como se puede apreciar el modelo básico es el emitido por Polya y es el que asume la autora de este trabajo, además hay que profundizar en el significado

de cada paso y en él que hacer para lograr llegar a la meta final. Por ello se expone un procedimiento generalizado para la resolución de problemas basado en los procedimientos heurísticos los cuales aparecen en el texto “Didáctica y Solución de Problemas” de los doctores Celia Rizo y Luis Campistrous donde se exponen varias estrategias que deben utilizar los alumnos en la resolución de éstos:

¿Qué dice?	**- Leo**	**Lectura global.**
	- Releo	**Lectura analítica.**
¿Puedo decirlo de otra forma?	**- Reformulo**	**Lectura analítica y reformulación .**
		Lectura analítica y reformulación.
¿Cómo lo puedo resolver?	**-Busco la vía de solución**	**Modelación.**
		Determinación de problemas auxiliares.
	-Resuelvo	**Tanteo inteligente.**
		Analogía.
¿Es correcto lo que dice? ¿Existe otra vía? ¿Para qué otra cosa me sirve?	**-Hago consideraciones (Incluye la comprobación, análisis de la solución y del procedimiento.**	**Técnicas de la comprobación.**

Como es evidente, estas técnicas están relacionadas con los momentos de toda actividad: orientación, ejecución y control, aunque en el trabajo que se presenta las estrategias y las técnicas no pasan a ser nada más que elementos que inciden en el buen resultado del éxito en la resolución de problemas, no se han querido dejar de mencionar, pues como se puede apreciar estas están estrechamente vinculadas a los modelos para la resolución de problemas que se mencionaron anteriormente. (Rizo, C. y Campistrous, L., 1998: 63)

Rubinstein (1977: 392) dice que: “la resolución de los problemas tiene casi siempre por premisas los conocimientos teóricos, cuyo contenido generalizado supera en mucho los límites de la situación intuitiva. El primer paso del razonar consiste en este caso en relacionar, primeramente de modo algo impreciso, el problema que se plantea con un determinado campo del saber o disciplina.”

El autor destaca que el intento de resolver un problema tiene por premisa, generalmente, el recurrir a determinados conocimientos teóricos ya existentes en forma de métodos o medios auxiliares de solución. El pensamiento se dirige hacia esta finalidad recurriendo a múltiples operaciones, que forman varios aspectos del proceso mental vinculados entre sí y que funden uno en otro.

A partir de los trabajos de A. Polya y H. Schoenfeld desarrollan, en sus investigaciones, la propuesta de un modelo de ayuda al proceso de solución de problemas, basado en cuatro dimensiones: (Rizo, C. y Campistrous, L., 1999:73)

- **Dominio del conocimiento o recursos: Se trata de lo que el individuo sabe y que puede utilizar en la solución de un problema. Incluye los conocimientos informales e intuitivos, hechos, definiciones, procedimientos rutinarios, entre otros; y las formas en que adquiere esos conocimientos.**
- **Los métodos heurísticos: En esta dimensión se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles en la solución de un problema; por ejemplo, las estrategias heurísticas aisladas por Polya.**
- **Las estrategias metacognitivas: se refieren al monitoreo o autoevaluación por el individuo de la validez del proceso que lleva a cabo en la solución de un problema.**
- **El sistema de creencias: en esta categoría Schoenfeld ubica la concepción que tenga el individuo acerca de la Matemática. Lo que el sujeto piensa acerca de esta disciplina determina la forma en que selecciona determinada dirección o método para resolver un problema. O sea, las creencias establecen el contexto dentro del cual se mueven las otras tres dimensiones.**

Sobre el proceso de resolución de problemas escolares que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas es importante retomar los trabajos de Luis Puig del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, los cuales han hecho un profundo análisis que asumiremos para la realización de los objetivos propuestos en nuestro trabajo.

Según este autor para poner un problema en ecuaciones hay que traducir el enunciado del problema, que está escrito en lenguaje natural, al lenguaje algebraico. Y al traducir al lenguaje algebraico tenemos que tener en cuenta

además que en ese lenguaje sólo se puede hablar de cantidades, operaciones con cantidades y relaciones entre ellas. Así que hay que buscar cuáles son las cantidades de las que se habla en el enunciado del problema y qué se dice de ellas.

Por tal motivo se plantea que al poner un problema en ecuaciones, podemos encontrarnos por tanto con dificultades de tres tipos:

1. Dificultades para analizar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas.
2. Dificultades en la traducción.
3. Dificultades al escribir la ecuación. El error que puede cometerse en igualar dos expresiones que no representen la misma cantidad.

Estas dificultades de que se hablan son realmente las mismas que experimentan nuestros alumnos y aceptamos las reglas dadas por el mismo para poner un problema en ecuaciones.

1. Comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas.
2. Dar nombre a una de las cantidades desconocidas, asignándole una letra.
3. Representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que hemos designado con una letra.
4. Escribir una igualdad entre expresiones algebraicas (una ecuación) a partir de las relaciones existentes entre las diferentes cantidades.
5. Comprobar que los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad.

Una vez puesto el problema en ecuaciones, su resolución continúa con otros dos pasos:

6. Resolver la ecuación.
7. Comprobar que el resultado obtenido satisface la condición del problema.

Para concluir este capítulo se puede afirmar que la investigación está basada en los problemas escolares, que lejos de ser poco importantes en la amplia esfera de la resolución de problemas, son el punto de partida para la solución de otros que poseen mayor dificultad.

CAPITULO 2. PROBLEMAS GEOMETRICOS QUE SE MODELAN MEDIANTE ECUACIONES CUADRATICAS

En este capítulo se expondrán las particularidades de los estudiantes en el nivel medio superior, pues a partir de estos aspectos se tendrán en cuenta los procedimientos utilizados para elaborar los problemas geométricos, así como una distribución de los mismos en la unidad temática donde se trabaja la resolución de ecuaciones cuadráticas. Además se realizará una comparación de las dimensiones con sus indicadores a evaluar, antes y después de la aplicación de los problemas.

2.1 Particularidades psicológicas de los estudiantes del nivel medio superior

Los estudiantes del preuniversitario están en una edad juvenil. El joven no sólo desea ser adulto como el adolescente, sino que lo es, es el período de elegir la profesión, de dominarla; es el comienzo de la vida laboral. Los puntos de vista y las convicciones patrióticas, político-ideológicas, morales, determinan su posición ante la vida, su actitud ante el trabajo, el deseo de ser útil a la sociedad, o a la Patria. La formación del sentimiento, respeto y amor hacia las profesiones y el deseo de trabajar en diferentes esferas de la producción, es fundamental. La familiarización de los jóvenes con las profesiones, sobre todo aquellas que se les puede enseñar y las que puede dominar desde la escuela, son determinantes.

En esta edad, las cualidades y particularidades de la personalidad, adquieren unidad e integridad. La posición ante la vida está determinada por la concepción del mundo y las convicciones; por la actitud hacia las personas; por las normas morales y estéticas; por el deseo de saber; por los intereses científicos, la inclinación por el arte y la literatura; por las necesidades y gustos estéticos.

Surge interés hacia la vida familiar. El amor se complementa con los conocimientos sobre las normas de vida familiar. Sin embargo, en esta edad se conserva el deseo de ser independiente, emprendedor y de actuar por sí mismo. En la adolescencia los escolares hacen más caso a su propio yo, en la aceptan activamente los consejos de los demás.

En esta edad los docentes deben jugar un papel muy importante a la hora de instruir cualquier contenido, para así poder educar mejor. Por tal motivo las clases deben ser impartidas correctamente y con un mayor grado de motivación, como lo exige el programa de Matemática en el pre-universitario.

2.1.1 Objetivos del programa de Matemática en el nivel medio superior

Los programas actuales de la asignatura Matemática en el nivel medio superior son muy exigentes en lo que se refiere a la contribución de la formación integral y multifacética de los jóvenes y su preparación para la toma responsable de decisiones en su vida futura profesional y personal; esta resulta para muchos profesores una tarea compleja y difícil de cumplir a partir de las formas tradicionales de enseñanza y de los medios didácticos más cercanos a su labor, de ahí la necesidad de encontrar nuevas formas de docencia y elaborar los instrumentos actualizados con que enfrentar esta tarea.

Esta investigación en particular se ha centrado en la contribución del desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado.

En el ciclo de preuniversitario se plantean entre otros los siguientes objetivos generales para la asignatura Matemática a cada uno de los cuales se puede tributar ampliamente desde la perspectiva de esta investigación:

1. Demostrar una concepción científica del mundo y una cultura político-ideológica a través del modo en que se argumentan los contenidos matemáticos, la consecuencia con que sostienen los principios de la batalla de ideas y las ideas de Martí, el Che y Fidel, la forma en que se defienden las conquistas del socialismo cubano y la profundidad con que se rechaza al capitalismo y al poder hegemónico del imperialismo yanqui.
2. Adoptar decisiones responsables en su vida personal, familiar y social, sobre la base de la comprensión de las necesidades vitales del país, la aplicación de procesos del pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo, y la utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva, la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría.

3. Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social, local, nacional, regional y mundial, y con fenómenos y procesos científico – ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actitud mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.

Estos objetivos se derivan para el 10º grado cómo sigue:

1. Manifestar una concepción científica del mundo a través de la interpretación del papel jugado por distintos problemas en determinados momentos histórico – concretos y la comprensión de la función de la actividad científico – técnica contemporánea en la sociedad actual.
2. Afirmar la orientación vocacional a partir de motivación alcanzada en la asignatura y de la relación de esta con otras ciencias, sus principios, aplicaciones tecnológicas y las implicaciones para la sociedad, atendiendo en su elección a las necesidades vitales para el desarrollo del país.
3. Procesar datos sobre el desarrollo económico, político y social en Cuba y otras regiones, y sobre problemas científico – ambientales para valorar la obra del socialismo, los males del capitalismo y las consecuencias de políticas científicas y tecnológicas, utilizando recursos de la estadística descriptiva y conceptos, relaciones y procedimientos propios del trabajo con números reales, las ecuaciones, las funciones y la geometría plana.
4. Representar situaciones de la práctica, la ciencia o la técnica mediante modelos analíticos y gráficos, y viceversa, extraer conclusiones a partir de esos modelos acerca de las propiedades y relaciones que se cumplen en el sistema estudiado, aplicando para ello los conceptos, relaciones y procedimientos relativos al trabajo con los números reales, las variables, las ecuaciones algebraicas, las funciones lineales y cuadráticas, la geometría plana, la trigonometría y su aplicación al cálculo de cuerpos.
5. Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo económico, político y social local, nacional, regional y mundial, y con fenómenos y procesos científico – ambientales, que requieran conocimientos y habilidades relativos al trabajo con los números reales, las ecuaciones algebraicas, las funciones lineales y cuadráticas, la geometría plana, la

trigonometría y sus aplicaciones al cálculo de cuerpos y que promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.

Durante el desarrollo de esta investigación la autora tuvo en cuenta las indicaciones metodológicas generales propuestas en los programas para la asignatura Matemática en el nivel Medio Superior y que expresan que los cambios en la enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en el Preuniversitario deben dirigirse en lo esencial a:

1. Contribuir a la educación político – ideológica, económico – laboral y científico ambiental de los alumnos, mostrando que la Matemática permite la obtención y aplicación de conocimientos a la vida, la ciencia, la técnica y el arte, posibilita comprender y transformar el mundo y ayuda a desarrollar valores y actitudes en correspondencia con los principios de la Revolución.
2. Potenciar el desarrollo de los alumnos hacia niveles superiores de desempeño, a través de la realización de tareas cada vez más complejas, incluso de carácter interdisciplinario, y el transito progresivo de la dependencia a la independencia y la creatividad.
3. Plantear el estudio de los nuevos contenidos matemáticos en función de resolver nuevas clases de problemas de modo que la resolución de problemas no sea solo un medio de para fijar, sino también para adquirir nuevos conocimientos, sobre la base de un concepto amplio de problema.
4. Propiciar la reflexión, la comprensión conceptual junto con la búsqueda de significados, el análisis de qué métodos son adecuados y la búsqueda de los mejores, dando posibilidades para que los alumnos elaboren y expliquen sus propios procedimientos, de modo de alejar todo formalismo en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

2.2 Análisis del estado inicial del problema

Para la valoración del estado inicial (pretest) del nivel real en el que se encontraban los 34 alumnos pertenecientes a la muestra, en el desarrollo de la habilidad resolver problemas se aplicaron diferentes métodos al comienzo del pre-experimento.

La dimensión cognitiva y la procedimental se evaluó a través de la prueba pedagógica inicial (Anexo 1), la cual demostró el estado real inicial en el que se encontraba el desarrollo de la habilidad resolver problemas. La dimensión motivacional se evaluó mediante la observación participante (Anexo 3) la cual es desempeñada por el profesor.

En este epígrafe se presenta el análisis de los resultados obtenidos a partir del pre-experimento realizado, con la medida pretest

Para la evaluación del nivel alcanzado en el desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado, se aplicó el procedimiento siguiente:

1) Determinación de dimensiones e indicadores.

2) Modelación matemática de los indicadores mediante variables.

3) Valoración de estado inicial y final del problema.

4) Procesamiento estadístico de los datos.

Determinación de dimensiones e indicadores:

En el análisis del nivel alcanzado por los alumnos en el desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas, se identificaron tres dimensiones con sus indicadores.

Modelación matemática de los indicadores mediante variables

La modelación matemática de los indicadores requiere de la ejecución de las acciones siguientes:

1. Representar cada indicador mediante una variable.

2. Determinar el dominio de la variable.

3. Determinar los criterios para asignar a la variable cada uno de los elementos del dominio.

En la tabla 1 (Anexo 2) se muestran las escalas de medición de la variable en correspondencia de los indicadores con las dimensiones.

Valoración del estado inicial del problema

Estado inicial de la dimensión cognitiva:

- **Indicador 1: Interpretar el problema que se plantea.**

En este indicador se incluyó el desarrollo alcanzado por los estudiantes en la habilidad interpretar problemas.

Los datos recopilados demostraron que de los 34 estudiantes a los que se les aplicó la prueba pedagógica inicial, 9 (26%) se dan cuenta de lo que pide el problema, 5(15%) se dan cuenta, en parte, de lo que pide el problema y 20 (59%) no se dan cuenta de lo que pide el problema.

- Indicador 2: Esbozar la figura de análisis.

Este indicador incluyó si el estudiante es capaz de esbozar el problema mediante una figura de análisis.

En este indicador se constató que solo 8(23%) estudiantes esbozan la figura de análisis correcta, 7(21%) la esbozan con inseguridad y 19(56%)no esbozan la figura de análisis correcta.

- Indicador 3: Representar el modelo matemático

Este indicador incluyó la habilidad del estudiante de representar la ecuación cuadrática correspondiente a lo planteado en el problema.

La valoración de este indicador permitió determinar que de los 34 estudiantes solo 9 (26%) modelan correctamente la ecuación cuadrática, 5(15%) modelan con imprecisiones la ecuación cuadrática y 20 (59%) no modelan correctamente la ecuación cuadrática.

- Indicador 4: Resolver el modelo matemático.

Este indicador recogió la habilidad que poseen los estudiantes para resolver una ecuación cuadrática.

La valoración de este indicador permitió determinar que 10(29%) estudiantes solucionan correctamente la ecuación cuadrática, 7(21%) solucionan con imprecisiones la ecuación cuadrática y 17 (50%) no saben solucionar la ecuación cuadrática.

- Indicador 5: Comprobar el resultado con la situación planteada.

En este indicador se evaluó la habilidad de comprobar de los estudiantes según lo planteado en el problema.

En este indicador se obtuvo como resultado que solo 10(29%) estudiantes prueban que el resultado es el correcto, en 8 (23%) la repuesta no se corresponde con la situación planteada pero está entre los parámetros lógicos y en 16(48%) la respuesta es ilógica.

Estado inicial de la dimensión motivacional

- Indicador 1: Interés por resolver los problemas.

Este indicador incluyó, el interés que muestra el estudiante durante el desarrollo de las clases por resolver los problemas.

En la observación participante se pudo constatar, que solo 7(21%) estudiantes muestran interés por resolver los problemas, 13(38%) muestran poco interés por resolver los problemas y 14(41%) no muestran interés por resolver los problemas.

Estado inicial de la dimensión procedimental

- Indicador 1: Desarrollo del proceso de resolución del problema

Este indicador evaluó el tránsito de los estudiantes por las distintas etapas de resolución de un problema.

La prueba pedagógica inicial permitió constatar que solo 9 (26%) estudiantes transitan por todas las etapas, 11 (33%) transitan por las fundamentales y 14 (41%) no transitan por ningunas de las etapas.

El análisis efectuado anteriormente por cada uno de los indicadores de las distintas dimensiones permitió constatar que existen grandes dificultades en la habilidad resolver problemas en los estudiantes de décimo grado, esto está dado en que la mayoría no interpretan el problema que se les plantea, no saben plantear la ecuación cuadrática y no transitan por las etapas de resolución de un problema, ni sienten interés por resolverlos.

Procesamiento estadístico de los datos

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas (Fi) y relativas porcentual (f i%)de las escalas por indicador de lo expuesto anteriormente

Tabla 2

ESCALAS								D1D2	D3					
	1	2	3	4	5	1	1							
	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %
B	9	26%	8	23%	9	26%	10	29%	10	29%	7	21%	9	26%
R	5	15%	7	21%	5	15%	7	21%	8	23%	13	38%	11	33%

M	20	59%	19	56%	20	59%	17	50%	16	48%	14	41%	14	41%

La elaboración de los problemas surge de la convicción de la autora acerca de la necesidad e importancia de su contribución al cumplimiento de todas las exigencias del programa de Matemática y con el objetivo de eliminar las dificultades anteriores y , en particular lo que se refiere al tratamiento de los problemas por sus múltiples posibilidades formativas de las nuevas generaciones, concediendo a las exigencias actitudinales el lugar que le corresponde al lado de las teorías, técnicas, conceptos y métodos matemáticos como elementos del contenido de la asignatura en el décimo grado.

2.3 Formulación de los problemas

El contexto en el que se sitúen los problemas tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los alumnos, y para la vida futura de estos (Rizo y Campistrous, 1999:38).

La contextualización de la enseñanza de la Matemática genera en los docentes la necesidad de contar con problemas actualizados e interesantes para ser utilizados en las diferentes funciones que se requiere de ellos, pero estos no siempre están disponibles en los libros de texto y materiales escolares como sucede por ejemplo los problemas geométricos que se modelan con ecuaciones cuadráticas en la enseñanza preuniversitaria, de ahí la necesidad de aprender a crearlos.

Los problemas matemáticos propuestos en este trabajo constan de dos etapas:

Etapa I: Creación los problemas.

Incluye la formulación de los problemas y su clasificación.

Etapa II: Planificación del proceso enseñanza - aprendizaje.

Incluye la selección del problema y la planificación para su tratamiento en clases.

En la Etapa I una de las claves del éxito para la propuesta es la creación y actualización del banco de problemas para lo cual es determinante contar con una adecuada estrategia de formulación de problemas (Anexo 4).

La formulación de un problema puede realizarse para ser utilizado en una clase en particular con una intención específica según la función que debe desempeñar.

Inicialmente se elige la información previamente seleccionada que cumple los requisitos necesarios para el tipo de problema que se desea formular. Es necesario tener en cuenta que una misma información puede ser fuente para la elaboración de problemas variados según la intención.

Una vez elegida la información se procede a la búsqueda de regularidades, relaciones y dependencias entre los elementos que intervienen.

Las regularidades están dadas por la existencia de determinado orden o regla en cuanto a la presentación de los datos que permita definir una secuencia u ordenamiento de estos.

Las relaciones se manifiestan en las conexiones existentes entre dos datos o grupos de datos (volumen de cuerpos, áreas y perímetros de figuras planas y longitud de lados) por las correspondencias entre ellos.

Las dependencias están dadas por la existencia de subordinaciones (dimensiones).

La próxima acción es decidir el tipo de problema posibles a formular y se procede, si es necesario, a prescindir de algunos elementos o introducir otros de manera que se obtenga una situación problémica que pueda ser interpretada o explicada matemáticamente, mediante modelos matemáticos, en este caso los estudiados o profundizados en décimo grado.

En este momento se está en condiciones de plantear el problema, brindando la información necesaria y de formular la pregunta o exigencia de manera precisa según el tipo de problema.

La otra parte de la etapa I consiste en la clasificación de los problemas. Esta tiene como objetivo facilitar la orientación al momento de seleccionar el problema adecuado para ser situado como tarea docente en las distintas clases Esta clasificación es por el nivel de asimilación del contenido.

El nivel de asimilación significa el nivel de dominio que deberá tener el estudiante del contenido. Este nivel se puede clasificar en reproductivo o productivo.

El reproductivo es aquel nivel de asimilación que exige que el estudiante sea capaz de repetir el contenido que se le ha informado, ya sea este en forma declarativa o resolviendo problemas iguales o muy similares a los ya resueltos.

El productivo es aquel nivel de asimilación que exige que el estudiante sea capaz de aplicar, en situaciones nuevas para el alumno, los contenidos. De tal forma cuando el estudiante resuelve problemas cuya situación le es desconocida y que exige que él conciba el modo de su solución, se está ante un nivel productivo. La enseñanza problémica, heurística, investigativa, es consecuencia de tener objetivos a un nivel productivo.

El nivel más alto de lo productivo es lo creativo. En este nivel creativo el estudiante tiene que hacer aportes cualitativamente novedosos para él, utilizando para ello, la lógica de la investigación científica.

La etapa II consta de dos partes fundamentales, la primera es la selección del problema indicado en dependencia del objetivo que se persiga en la clase, ya sea, de introducción de un nuevo contenido, fijación o aplicación de determinado contenido o enseñanza de la resolución de problemas en correspondencia a la clasificación antes planteada.

Finalmente, se desarrolla la otra clave del éxito de la propuesta: la planificación del tratamiento del problema, anticipando cuidadosamente el papel que desempeñará tanto el docente como el estudiante durante la realización de la tarea.

La experiencia ha permitido constatar que todo el esfuerzo realizado en las etapas anteriores puede fructificar según el tratamiento didáctico que se le dé al problema; la calidad del problema formulado se manifiesta en el valor formativo que éste tenga para los jóvenes y se evidencia en el momento de la realización de la tarea docente, una mala orientación y tratamiento puede conllevar al fracaso del mejor problema.

2.3.1 Ejemplos de elaboración y tratamiento de los problemas

A continuación se presentan algunos problemas, fundamentando en algunos casos los pasos necesarios para formularlos y en otros las ideas metodológicas recomendadas para planificar y dirigir el proceso de orientación y resolución de los mismos.

El siguiente problema es reproductivo y se aplicó como primer ejercicio en la clase # 38(frontal) donde se ejercita la resolución de ecuaciones cuadráticas pero a partir de la resolución de problemas. Es la primera clase donde se trabajan los problemas geométricos.

Se seleccionó este problema dada las potencialidades que tiene para ampliar el horizonte matemático de los jóvenes y su preparación para asimilar otros contenidos, en particular la línea directriz: trabajo con variables, ecuaciones e inecuaciones y sistemas.

“Un constructor tiene que levantar una casa en un terreno de forma rectangular y se conoce que el largo del terreno excede al ancho en 5m. Si el área del terreno es de 84m2. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno?”

El texto brinda la información imprescindible para lograr su completitud como tarea docente, sin embargo su tratamiento didáctico en el aula permite introducir aspectos importantes de la geometría y al mismo tiempo profundizar en el desarrollo de habilidades en la modelación matemática de situaciones de la vida, en la resolución de problemas y en la interpretación de los resultados.

La elaboración conjunta de la solución puede transcurrir aproximadamente de la siguiente manera:

Profesor: Presenta el problema informando que este problema a trabajar es geométrico.

Estudiantes: Leen el problema tantas veces como sea necesario según sus habilidades, determinan los datos conocidos, construyen una figura de análisis como la siguiente llevando a esta los datos y la relación que existen entre estos.

Datos

Ancho (a): x (m) X

Largo (l): x + 5(m)

Área = 84m2 x + 5

Profesor: Solicita ideas acerca de las posibles vías de solución y va guiando el razonamiento mediante interrogantes como: ¿es necesario declarar variable?, ¿cuántas?, ¿podemos formar la ecuación con los datos que tenemos?, ¿qué dato conocemos que es imprescindible?

Estudiantes: Deben coincidir en la necesidad de declarar una variable expresada en la relación de una dimensión con respecto a la otra.

X: ancho (m)

X + 5: largo (m)

Profesor: Insiste en la importancia de la definición conceptual ¿qué representa la variable?: (la longitud del ancho) y dimensional (unidad de medidas: m).

Estudiantes: Comprenden la necesidad de una ecuación formada a partir de la sustitución de los datos en la fórmula de área de un rectángulo.

$A = l \times a$

$84 = X(X+5)$

$X^2 + 5X - 84 = 0$

Profesor: Aprovecha la oportunidad para insistir en el significado de la ecuación y los elementos que la componen:

El miembro izquierdo o término independiente de la ecuación representa el área del terreno. El miembro derecho es la relación entre las dimensiones del terreno; el signo de igualdad garantiza la fórmula del área de un rectángulo. Insiste en la necesidad de garantizar la dimensionalidad de la ecuación, en este caso (m).

Estudiantes: Proceden a resolver la ecuación cuadrática mediante el procedimiento de solución previamente estudiados, obteniendo como valores

$X_1 = -12$ **ó** $X_2 = 7$

Profesor: Recuerda que las longitudes o dimensiones de cualquier figura son positivas además de la necesidad de escribir una respuesta literal y en la importancia de tener en cuenta para ello la definición declarada de la variable así como la comprobación del resultado en los datos iniciales.

Estudiantes: Formulan la respuesta que debe ser aproximadamente: El ancho del terreno es de 7m y el largo de 12m.

El próximo problema es de tipo productivo y se propuso de estudio independiente en la clase # 44 (v/c #49) para su revisión en la clase # 45 (Frontal) como ANP, la cual tiene como objetivo resolver problemas geométricos que se modelan con ecuaciones cuadráticas. En esta clase se comienza el trabajo con el cálculo de cuerpo de figuras geométricas.

“En una EIDE la piscina de clavado tiene forma de un prisma recto y su base es un rectángulo. Se conoce que la misma tiene un volumen de $624 m^3$ **y que**

su altura es de 4m. Si el largo de su base excede en 1m al ancho. ¿Qué dimensiones tiene la base de la piscina?”

La orientación hacia la resolución de este problema debe ir encaminado a recordar aspectos esenciales sobre el cálculo de cuerpos, estudiados por ellos en Secundaria Básica. En este tipo de problemas es fundamental no obviar ninguna de las etapas de resolución y para ello la autora de este trabajo elaboró algunos pasos que le son de gran ayuda al estudiante

Pasos para resolver un problema:

1. Leer varias veces el problema hasta comprenderlo.
2. Construir la figura de análisis.
3. Determinar los datos y sustituirlos en la figura de análisis.
4. Representar el modelo matemático (ecuación cuadrática) a partir de los datos ofrecidos y la correspondencia que exista entre ellos.
5. Resolver el modelo matemático.
6. Comprobar el resultado en los datos.
7. Escribir la respuesta literal.

Para la aplicación de estos, el maestro puede realizar algunas preguntas de interpretación al estudiante:

Profesor: ¿Qué figura representa una piscina?

Estudiante: Un prisma u ortoedro.

Profesor: ¿Qué elementos del prisma están en los datos del problema?

Estudiante: Base y altura.

Profesor: ¿Cómo calculamos el volumen de un prisma?

Estudiante: V = Ab × h

Profesor: ¿Qué figura tiene por base la piscina? ¿Cómo se calcula su área?

Todas estas preguntas se realizarán después de la orientación del problema y de manera activa para lograr la motivación de los estudiantes y que todos lo resuelvan sin dificultad.

El próximo problema pertenece al nivel más alto del productivo, el creativo, el cual se propuso para ser aplicado en un trabajo de control.

“Dos circunferencias concéntricas son tales que el área del anillo comprendido entre ambas es de 75π cm2. Una cuerda de la circunferencia

mayor mide 20cm. ¿Cuál es la longitud de la cuerda que determina la misma en la circunferencia menor?”

Todos los problemas elaborados y transformados por la autora de este trabajo tienen las mismas características, la resolución de ecuaciones cuadráticas, planteadas a través de problemas geométricos los cuales fueron elaborados basados en el cálculo de cuerpos, aplicación del teorema de Pitágoras, y áreas y perímetros de figuras planas .

2.4 Propuesta de problemas geométricos a aplicar

A continuación se presentan un grupo de problemas geométricos procedentes de la experiencia de la autora. Estos se modelan con ecuaciones cuadráticas y para hallar su solución algunas son con fácil descomposición, otras tienen el uso de Discriminante y siempre se obtienen como soluciones números enteros que en algunos casos los estudiantes tienen que aplicar conocimientos básicos de la matemática aplicados a la vida práctica.

1. Un constructor tiene que levantar una casa en un terreno de forma rectangular y se conoce que el largo del terreno excede al ancho en 5m. Si el área del terreno es de 84m2. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno?

2. En la parcela de una escuela el área sembrada de tomate queda en el lindero que hace esquina entre dos cercas formando un triángulo rectángulo. Este terreno tiene un perímetro de 24m y el mayor de los lados es de 10m. Halla el área del terreno.

3. El terreno donde está enmarcado el platanal de un IPUEC tiene 20m de largo y 10m de ancho. Se decide restar cierta cantidad de metros al largo y adicionarlos al ancho, manteniendo el terreno su forma rectangular y su área. ¿Qué dimensiones tiene el nuevo platanal?

4. Un círculo tiene un área de 100π m2 y tiene inscrito un triángulo equilátero. ¿Cuál es el perímetro del triángulo si se sabe que el radio de la circunferencia tiene 5m menos que la longitud de uno de sus lados?

5. En una EIDE la piscina de clavado tiene forma de un prisma recto y su base es un rectángulo. Se conoce que la misma tiene un volumen de 624m3 y que su altura es de 4m. Si el largo de su base excede en 1m al ancho. ¿Qué dimensiones tiene la base de la piscina?

6. Un arquitecto construyó una pirámide recta para una exposición de figuras en miniatura. La pirámide tiene como volumen 576cm3 y la altura es de 18cm.Si la base de la pirámide es un rectángulo cuyo largo excede en 4cm al ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la base de la pirámide?

7. Una pirámide recta tiene una altura de 12m y su base es un rombo. Si una de las diagonales del rombo excede a la otra en 36m y el volumen de la pirámide es de 1152m3. ¿Qué longitudes tienen las diagonales del rombo?

8. De un cono circular recto se conoce que su altura es 7cm mayor que su radio y su generatriz es de 130 mm. Halla el volumen del cono y su área total en (cm).

9. Se tiene un rodillo para pintar paredes el cual tiene un área lateral de 785cm2 y se conoce que su largo excede al radio en 20cm. Halla las longitudes del radio y del largo del rodillo.

a) ¿Cuál será su área total y su volumen?

10. El área de la base de un cono es de 25πdm2 y se conoce que su radio es la longitud de la altura disminuida en 5 dm. Halla la longitud del radio y la generatriz del cono.

11. El área total de una esfera es igual al área lateral de un cono que tienen el mismo radio y solo se conoce que la generatriz del cono excede en 81cm al radio. Calcula el área de la esfera y la altura del cono.

12. Una caja en forma de ortoedro tiene un volumen de 1500dm3. Su profundidad excede en 10dm al ancho de la base y su largo es de 20dm. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

13. Una piñata en forma de prisma, tiene como base un rectángulo, en el que su ancho tiene 4cm más que su profundidad y el largo de la base es de 14cm. ¿Qué dimensiones tiene la piñata? ¿Cuántos caramelos se podrán echar si se sabe que por cada 4cm3 solo pueden haber 3 caramelos?

14. Se tiene un cilindro cuya base coincide con la de un cono circular recto que está dentro de él y sus alturas tienen la misma longitud. Se conoce que el diámetro de la base del cilindro es 0,8cm más largo que la generatriz del cono. Si la razón entre la altura de ambas figuras respecto al radio es 4: 3 ¿Cuál es el volumen del cilindro?

15. Dos circunferencias concéntricas son tales que el área del anillo comprendido entre ambas es de 75π cm2. Una cuerda de la circunferencia

mayor mide 20cm. ¿Cuál es la longitud de la cuerda que determina la misma en la circunferencia menor?

Estos problemas fueron aplicados en la Unidad 1 “Aritmética, trabajo con variables y ecuaciones” dentro de la cual se realizó una distribución de los mismos entre las clases (38 – 55) como ejercicios en las clases frontales, de estudio independiente y en trabajos de control.

2.5 Valoración del estado final del problema

Después de aplicado el diagnóstico inicial y conocido el estado en que se encontraba la muestra se decidió aplicar la propuesta de solución. Durante su puesta en práctica no hubo necesidad de hacer cambios ni adaptaciones y a la vez tuvo una buena acogida por los estudiantes.

Para la valoración del estado final (postest) se realizó un trabajo similar al realizado en el pretest, se aplicó una prueba pedagógica final (Anexo 5) para medir la dimensión cognitiva y la procedimental, y la observación participante (Anexo 3) constató el desarrollo en la dimensión motivacional respectivamente luego de la aplicación de la propuesta.

Estado final de la dimensión cognitiva

- Indicador 1: Interpretar el problema que se plantea.

Los datos recopilados con la prueba pedagógica de salida evidenciaron que 28 (82%) estudiantes se dan cuenta de lo que pide el problema, 2(6%) se dan cuenta, en parte, de lo que pide el problema y que solo 4 (12%) no se dan cuenta de lo que pide el problema.

- Indicador 2: Esbozar la figura de análisis.

En este indicador se constató que 26(76%) estudiantes esbozan la figura de análisis correcta, 5(15%) esbozan con inseguridad la figura de análisis y solo 3(9%) no esbozan la figura de análisis correcta

- Indicador 3: Representar el modelo matemático.

La valoración final de este indicador permitió determinar que de los 34 estudiantes ya 28 (82%) modelan correctamente la ecuación cuadrática, 2 (6%) modelan con imprecisiones la ecuación cuadrática y solo 4 (12%) no modelan correctamente la ecuación cuadrática.

- Indicador 4: Resolver el modelo matemático.

La valoración final de este indicador permitió determinar que 29(85%) estudiantes solucionan correctamente la ecuación cuadrática, 2(6%)

solucionan con imprecisiones la ecuación cuadrática y solo 3 (9%) no saben solucionar la ecuación cuadrática.

- Indicador 5: Comprobar el resultado con la situación planteada.

En este indicador se obtuvo como resultado que 27(79%) estudiantes prueban que el resultado es el correcto, en 4(12%) la repuesta no se corresponde con la situación planteada pero está entre los parámetros lógicos y solo 3(9%) su respuesta es ilógica.

Estado final de la dimensión motivacional

- Indicador 1: Interés por resolver los problemas.

Con la observación participante se pudo constatar, que ya 25(73%) estudiantes muestran interés por resolver los problemas, 6(18%) muestran poco interés por resolver los problemas y solo 3(9%) no muestran interés por resolver los problemas.

Estado final de la dimensión procedimental

- Indicador 1: Desarrollo del proceso de resolución del problema

La prueba pedagógica final permitió constatar que 28 (82%) estudiantes transitan por todas las etapas del proceso de resolución del problema, 3 (9%) transitan por las fundamentales y solo 3 (9%) no transitan por ninguna.

ESCALAS	D1										D2		D3	
	1		2		3		4		5		1		1	
	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %	Fi	fi %
B	28	82%	26	76%	28	82%	29	85%	27	79%	25	73%	28	82%
R	2	6%	5	15%	2	6%	2	6%	4	12%	6	18%	3	9%
M	4	12%	3	9%	4	12%	3	9%	3	9%	3	9%	3	9%

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas (Fi) y relativas porcentual (f i%) de las escalas por indicador luego de aplicada la propuesta

Tabla 3

Como se ilustra en la tabla anterior, los resultados cuantitativos logrados con la aplicación de la propuesta son superiores a los de antes de aplicada. Para una mejor comprensión de estos elementos a continuación se muestran tres tablas comparativas en correspondencia con el estado inicial antes de la aplicación de la propuesta y el final después de la aplicación. La primera corresponde a la dimensión cognitiva, la segunda a la dimensión motivacional y la tercera a la procedimental.

Dimensión cognitiva

	Antes de la aplicación de la propuesta						Después de la aplicación de la propuesta					
indicadores	B	%	R	%	M	%	B	%	R	%	M	%
1	9	26%	5	15%	20	59%	28	82%	2	6%	4	12%
2	8	23%	7	21%	19	56%	26	76%	5	15%	3	9%
3	9	26%	5	15%	20	59%	28	82%	2	6%	4	12%
4	10	29%	7	21%	17	50%	29	85%	2	6%	3	9%
5	10	29%	8	23%	16	48%	27	79%	4	12	3	9%

Dimensión motivacional

	Antes de la aplicación de la propuesta						Después de la aplicación de la propuesta					
indicadores	B	%	R	%	M	%	B	%	R	%	M	%
1	7	21%	13	38%	14	41%	25	73%	6	18%	3	9%

Dimensión procedimental

	Antes de la aplicación de la propuesta						Después de la aplicación de la propuesta					
indicadores	B	%	R	%	M	%	B	%	R	%	M	%

1	9	26%	11	33%	14	41%	28	82%	3	9%	3	9%

En la parte izquierda de las mismas se muestran los resultados y por cientos obtenidos antes de la aplicación de la propuesta y en lado derecho el estadístico obtenido después de aplicada la propuesta.

Según el estado comparativo entre los resultados obtenidos antes y después de aplicada la propuesta se puede apreciar a simple vista que se obtuvo mejores resultados después de la aplicación y se realiza un análisis más específico por los indicadores de las dimensiones se puede afirmar que mientras existía un pequeño % de estudiantes ubicados en la categoría de B antes de aplicada lo propuesta, después de aplicada la misma, este % aumentó en gran medida. En las categorías de R y M se puede observar que va a suceder todo lo contrario es decir, de % elevados de estudiantes en estas categorías se va a obtener % disminuidos de los mismos ubicados aquí después de aplicada la propuesta.

Los resultados anteriores permiten confirmar el problema y demostrar la validez de la propuesta aplicada.

Conclusiones

Con la realización de este trabajo la autora arribó a las siguientes conclusiones:

- **Se dirige el proceso de enseñanza-aprendizaje sustentado en el desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en el décimo grado para elevar el desarrollo integral del educando, garantizando el equilibrio entre lo cognitivo y lo afectivo, potenciando el tránsito progresivo a la independencia cognoscitiva.**

- **La prueba pedagógica inicial permitió constatar que en la práctica existían grandes dificultades en los estudiantes de décimo grado para resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas.**
- **Los problemas elaborados ayudaron al desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas pues se considera necesario la elaboración y tratamiento de problemas reproductivos, productivos y creativos. Estos facilitan la atención diferenciada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.**
- **Después de la aplicación de la propuesta se logró desarrollar con más efectividad la resolución de problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado, lo cual se evidenció con una tabla comparativa entre las dimensiones con sus indicadores, recopilados por una prueba pedagógica inicial y final.**

Recomendaciones

Derivado de las conclusiones anteriores, se recomienda:

- **Continuar el desarrollo de la habilidad resolver problemas geométricos que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas en los restantes grados del preuniversitario.**

- **En coordinación con las estructuras metodológicas del centro, aplicar estos problemas en el décimo grado y se pueden emplear como tareas de trabajo independiente, en turnos de clases frontales o como trabajo práctico y presentar el análisis de las soluciones en clases u horarios escogidos para ello.**

Bibliografía

Álvarez de Zayas, L. M. (1999). La escuela en la vida. Didáctica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ballester, S. y otros. (1992). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. (2 tomos) .La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

________________. (2000).Metodología de la enseñanza de la Matemática. (Tomo 2). México: Editorial Universitario.

Campistrous Pérez, L. y otros. (1990 a). Matemática Décimo Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________________________. (1990 b). Matemática Onceno Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________________________. (2002). IPLAC. Didáctica y solución de problemas. Instituto Pedagógico y Caribeño. La Habana: Edición Especial.

Cervera Márquez, P. (1999). Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en duodécimo grado. Tesis de Maestría. Santiago de Cuba: Instituto Superior Politécnico "Julio Antonio Mella". Facultad de Matemática Física.

Colectivo de autores. (1978). Aristos. Diccionario ilustrado de la lengua española. España: Editorial Ramón.

Cruz, M. (2002). Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Holguín (manuscrito).

Elizalde Pérez, T. (2002). El proceso de búsqueda de relaciones como elemento fundamental de la etapa de comprensión de los problemas matemáticos escolares. Tesis de Maestría. ISP “José de la Luz y Caballero”. Holguín.

Escudero, J. “Resolución de problemas”. Disponible en http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/fraprob.htm.2002.

Gastón, J. y Nocedo, I. (1996). Metodología de la Investigación Pedagógica. (2 tomos). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Labarrere, A.F. (1987). Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

_____________. (1988). Cómo enseñar a los alumnos de Primaria a resolver problemas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación, Cuba. (1971a). Matemática 8. Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

__________________________. (1971b) Matemática 9. Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

__________________________. (2005). VI Seminario nacional para educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

__________________________. (2006). VII Seminario nacional para educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

__________________________. (2006). Programas. Décimo grado educación preuniversitaria. Primer año educación técnica y profesional. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

__________________________. (2007). VIII Seminario nacional para educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Morell Pérez, Leobel. (2006). Alternativa metodológica, para facilitar a los estudiantes de octavo grado modos de actuación durante el proceso de solución de problemas que conducen a ecuaciones lineales. Tesis de Maestría. Centro Universitario “José Martí”. Sancti-Spíritus. Cuba

Palacio Peña, J. (2003). Colección de problemas matemáticos para la vida. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Pérez Rodríguez, G. y otros. (2001). Metodología de la investigación educacional. Primera y Segunda Parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________________________. (2002). Metodología de la investigación educacional. Primera parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Polya, G. (1976). Cómo plantear y resolver problemas matemáticos. México: Editorial Trillas.

Pozo, J. (1995). “Aprendizaje para la solución de problemas en ciencias”. En Revista Alambique 5, 7. España.

Rubinstein S, L. (1977). El desarrollo de la psicología: Principios y métodos. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Santos Trigo, L. M. (1994). CINVESTAV-IPN. La resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática. México. Departamento de Matemática Educativa.

_________________. (1996). Principios y métodos de la resolución de problemas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Sigarreta Almira, J. (2001).Incidencia del tratamiento de los Problemas Matemáticos en la formación de valores. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias, especialidad matemática. Holguín.

Schoenfeld, A. H. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. La enseñanza de las Matemáticas a debate. Madrid.

Vilanova, S. "El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje". Revista La educación matemática, Educación e Internet. Disponible en http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF