

UNIVERSIDAD DE SANCTI SPÍRITUS  
“JOSÉ MARTÍ PÉREZ”  
FACULTAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES

LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE  
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA  
FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

ORTELIO NILO QUERO MÉNDEZ

Sancti Spíritus

2018

UNIVERSIDAD DE SANCTI SPÍRITUS  
“JOSÉ MARTÍ PÉREZ”  
FACULTAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES

LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE  
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA  
FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

Autor: MSc. Ortelio Nilo Quero Méndez

Tutores: Prof. Aux. Aldo Medardo Ruiz Pérez, Dr. C.

Prof. Tit. Ramón Luis Herrera Rojas, Dr. C.

Sancti Spíritus

2018

## Agradecimientos

- ❖ Al Dr. C. Aldo Medardo Ruiz Pérez, mi tutor, por su ayuda incondicional, sus valiosas enseñanzas, orientaciones, recomendaciones y exigencia.
- ❖ Al Dr. C. Ramón Luis Herrera Rojas, mi tutor, por su disposición a ayudarme en la elaboración de la tesis, sus sugerencias y correcciones.
- ❖ A la Dr. C. Marta María Álvarez Pérez, por haberme motivado a realizar la tesis y por la revisión de las versiones de esta obra.
- ❖ A mis compañeros del Departamento de Matemática-Física que me animaron y apoyaron siempre para que concluyera la tesis.
- ❖ A los profesores del Departamento de Ciencias Naturales, que tuvieron la paciencia de escucharme en los talleres de tesis.
- ❖ A los expertos, que a pesar de ser personas muy ocupadas, encontraron el tiempo para valorar el modelo y ofrecer sus valiosas recomendaciones y sugerencias.
- ❖ A los oponentes y miembros de los colectivos científicos de los talleres y la predefensa por sus críticas y recomendaciones.
- ❖ A todos los que en algún momento fueron mis profesores.
- ❖ A todos los que han contribuido a que esta obra se concluyera.

## Dedicatoria

- ❖ A la memoria de mis padres, que tanto contribuyeron a mi educación y siempre me estimularon a seguir estudiando.
- ❖ A toda mi familia, especialmente a Verónica, Osmany y David que tanto me han inspirado para seguir adelante en esta compleja obra.

## SÍNTESIS

El objeto de esta investigación es el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática y tiene como objetivo proponer un modelo didáctico de la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica en la formación inicial de estos profesionales. El principal resultado de esta tesis es el modelo didáctico. Las contribuciones a la teoría son: una concepción de la representación de los objetos de la Geometría Analítica en el PEA, la cual incluye las definiciones de los conceptos de representación, transferencia entre representaciones y sistema de representación de objetos de la Geometría Analítica y un modelo didáctico de la transferencia. Las contribuciones de la investigación a la práctica son: procedimientos para la planificación a largo plazo de la transferencia entre representaciones en los tres componentes del proceso de formación del profesional; un programa heurístico particular para resolver tareas que exigen transferencia y una tipología de tareas de aprendizaje para ejecutar este proceso con lápiz y papel o mediante software. En la evaluación del modelo según el criterio de expertos, estos ofrecieron opiniones favorables acerca de su calidad y en su implementación experimental se obtuvieron resultados a favor de su validez.

## ÍNDICE

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y DIAGNÓSTICO DE LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA	11
1.1. Concepción de la representación de los objetos de la Geometría Analítica en el PEA	12
1.1.1. El concepto de representación en la Geometría Analítica	12
1.1.2. La transferencia entre representaciones en la Geometría Analítica	19
1.1. 3. Sistemas de representación en la Geometría Analítica	25
1.2. La transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica y su diagnóstico en situación habitual	26
1.2.1. La transferencia entre representaciones en los componentes del proceso de formación inicial de profesores de Matemática	26
1.2.2. La transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica	29
1.2.3. Estado del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en situación habitual	43
2. MODELO DIDÁCTICO DE LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA	48
2.1. Presentación general del modelo	50

2.2. Planificación de la transferencia entre representaciones	52
2.2.1. Planificación a largo plazo	53
2.2.2. Planificación a mediano y corto plazos	66
2.3. La dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente académico del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica	68
2.3.1. Primera fase: formación y desarrollo del concepto de transferencia entre representaciones, conceptos auxiliares y conceptos subordinados	69
2.3.2. Segunda fase: elaboración del Programa Heurístico para la Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica	76
2.3.3. Tercera fase: aplicación del Programa Heurístico	85
2.3.4. Cuarta fase: aplicación de los procedimientos de transferencia	86
2.3.5. Evaluación y control del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones en el componente académico	89
2.4. La dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente laboral e investigativo	91
3. EVALUACIÓN DEL MODELO SEGÚN EL CRITERIO DE EXPERTOS Y DE SU EFECTIVIDAD EN LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA	95
3.1. Evaluación del modelo según el criterio de expertos	96
3.1.1. Selección de los expertos	97
3.1.2. Definición y operacionalización del constructo objeto de evaluación	99
3.1.3. Diseño de la medición de los indicadores, de las dimensiones y del constructo	100
3.1.4. Elaboración de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y confiabilidad. Recogida y procesamiento estadístico de los datos	102
3.1.5. Análisis de los resultados	102
3.2. Experimentación del modelo en la práctica pedagógica	105
3.2.1. Organización del pre-experimento	106
3.2.2. Desarrollo del pre-experimento	108
CONCLUSIONES	118
RECOMENDACIONES	120

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

## INTRODUCCIÓN

Una característica de la geometría analítica<sup>1</sup> es la de ser un método para el estudio de la geometría euclidiana en el que se utilizan sistemas de coordenadas para representar puntos, rectas, planos, curvas y superficies.

La Geometría Analítica desempeña una doble función en la formación inicial de profesores de Matemática porque por una parte su proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) contribuye al dominio de la Matemática de la Educación General y su didáctica y por otra aporta conocimientos y habilidades necesarios para el aprendizaje de otras disciplinas de la carrera, especialmente el Análisis Matemático.

La Geometría Analítica está incluida en los programas de Matemática del nivel medio de educación<sup>2</sup>. En la Educación Secundaria Básica se utilizan los sistemas de coordenadas rectangulares para representar puntos y rectas; en undécimo grado se estudian la recta en el plano, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

Los tres conceptos didácticos centrales de la teoría de las representaciones de los objetos de la Geometría Analítica son los conceptos de representación, transferencia entre representaciones y sistema de representación, los cuales se analizan y reconceptualizan en los fundamentos teóricos de esta tesis. A continuación se aclara el significado con que se utilizan debido a que tienen un carácter polisémico en la didáctica de la Matemática.

La palabra representación tiene doble significado en la matemática y en su PEA: designa un proceso y el resultado de un proceso, es decir, posee un significado operacional y un significado estructural (Sfard, 2000).

Se asume, en el sentido estructural, que una representación de un objeto de la Geometría Analítica es el objeto material o mental que lo sustituye y lo hace presente, determinándolo de forma única en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación con el uso de un sistema de coordenadas elegido convenientemente como sistema de referencia. En este concepto de representación intervienen dos objetos importantes: el objeto representado y el representante.

---

<sup>1</sup> Cuando se habla de geometría analítica como ciencia, su nombre se escribe con letras minúsculas. Cuando se refiere a una asignatura o tema de una asignatura, las palabras que componen su nombre se escriben con inicial mayúscula: Geometría Analítica.

<sup>2</sup> El nivel medio incluye la Secundaria Básica, la Educación Preuniversitaria, la Educación Técnica y Profesional y la Educación de Adultos (Mined, 2009).

En la Geometría Analítica se utilizan varias representaciones para un mismo objeto, lo cual exige compararlas y agruparlas en tipos, según “la naturaleza de los componentes predominantes en el objeto representante”, para así formar conceptos subordinados al concepto de representación.

Además del concepto de tipo de representación, en la tesis se utiliza como herramienta teórica el concepto de forma de representación para comparar dos representaciones de un mismo tipo, entendida como la configuración del objeto representante, de modo que dos representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas.

El significado operacional de la frase “representación de un objeto de la Geometría Analítica” se refiere al proceso de representación, es decir, al proceso dirigido a obtener una representación del objeto en el sentido estructural y expresarla externamente, ya sea, la primera de sus representaciones o una representación a partir de otra existente. Este último caso corresponde a la transferencia.

La importancia de las representaciones en el PEA de la Matemática es ampliamente reconocida por la comunidad de investigadores en la didáctica de esta disciplina. Ejemplos que lo demuestran son los siguientes:

- En los últimos años se ha prestado especial atención a este tema en la Educación General cubana. Una muestra de ello es que en el cuarto de los lineamientos correspondientes al enfoque metodológico general de la asignatura Matemática se plantea: “Propiciar la reflexión, el análisis de los significados y formas de representación de los contenidos, el establecimiento de sus relaciones mutuas, [...]” (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p. 2).
- Entre las líneas directrices en la enseñanza de la Matemática en Cuba está una denominada “Adiestramiento lógico-lingüístico” en la cual se incluye “trabajar con representaciones de objetos matemáticos” y se concibe que los alumnos del nivel medio deben ser capaces de: identificar distintas formas de representar los objetos matemáticos y establecer relaciones entre ellas; transferir de una forma de representación a otra de un objeto matemático; seleccionar o elaborar la representación más conveniente de un objeto matemático, de acuerdo con la situación planteada; evaluar distintas formas de representación atendiendo a sus fines; reconocer la generalización de representaciones de conceptos, relaciones y procedimientos y comprender representaciones no utilizadas con anterioridad y evaluar su pertinencia (Álvarez y otros, 2014).

- Los dos problemas generales de la geometría analítica enunciados por Lehmann (1972, p. 1) dada una ecuación, construir la gráfica correspondiente y 2) dada una figura geométrica o la condición que deben cumplir sus puntos, determinar su ecuación, son tareas de transferencia entre representaciones.
- En el ámbito internacional este proceso ha sido objeto de atención. En los Principios y Estándares 2000 del Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (citado por Godino, Batanero y Font, 2003, p. 35) la representación es el segundo de los cinco procesos matemáticos reconocidos y con respecto a él se espera que los alumnos puedan: 1) crear y usar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas; 2) seleccionar, aplicar y transferir entre representaciones en la resolución de problemas y 3) utilizar representaciones para modelar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.
- Un clásico en el estudio de las representaciones como lo es el investigador francés Raymond Duval considera que la transferencia entre representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2006).
- En el marco teórico y especificaciones de evaluación del TIMSS<sup>3</sup> 2011 se plantea: “La representación de ideas crea el núcleo del pensamiento matemático y de la comunicación, y la capacidad para crear representaciones equivalentes es fundamental para conseguir el éxito en la asignatura” (Mullis, Martin, Ruddock, O’Sullivan y Preuschoff, 2011, p. 42).
- En el marco teórico y pruebas de evaluación del Proyecto Pisa<sup>4</sup> se consideran siete capacidades, la tercera de ellas denominada representación incluye representaciones de objetos y situaciones matemáticas e “implica la selección, interpretación, traducción, y la utilización de una variedad de representaciones [...]” (Ministerio de Educación, Deporte y Cultura de España, 2015, p. 78).

El autor de esta tesis coincide con los autores señalados respecto a la importancia de las representaciones en el PEA de la Matemática y considera que el trabajo con representaciones y

---

<sup>3</sup> El Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) es un proyecto de la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA). La IEA es una institución independiente de cooperación internacional que agrupa a instituciones de investigación nacionales y organismos gubernamentales y que ha estado realizando estudios transnacionales de rendimiento desde 1959.

<sup>4</sup> El proyecto PISA tiene el propósito de establecer un seguimiento regular de los resultados de los sistemas educativos de los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), en cuanto al rendimiento de los alumnos, dentro de un marco internacional común. Abarca tres áreas: lectura, matemáticas y ciencias.

particularmente con la transferencia debe formar parte de la formación inicial de los profesores de Matemática, por lo que todas las disciplinas y asignaturas matemáticas del currículo han de contribuir a ella, especialmente la Geometría Analítica por las potencialidades que tiene: sus dos problemas generales son de transferencia entre representaciones.

Para concretar esta formación en términos de la actuación, el autor de la presente tesis considera que el concepto adecuado es el de desempeño del alumno<sup>5</sup> en la transferencia entre representaciones, entendido como el sistema de acciones que él ejecuta realizando la transferencia o a propósito de ella en los tres componentes del proceso de formación. El concepto de habilidad para la transferencia expresa este desempeño en el componente académico, pero en el componente laboral e investigativo se requiere de la integración de esta habilidad con otras, propias de este componente.

En el programa de la disciplina Geometría para la formación de profesores de Matemática (planes D y E) se concibe la formación inicial en la transferencia entre representaciones, aunque en él no se utiliza explícitamente el término transferencia ni otros términos de la teoría de las representaciones: “Es importante tratar la representación gráfica de rectas y planos en un sistema de coordenadas, así como la representación de regiones planas y espaciales [...]” (Cisneros y otros, 2012, p. 7) y se agrega: “El estudio de las cuádricas y las cónicas se debe comenzar por la reducción de la ecuación general de segundo grado en dos y tres variables a la forma canónica y a partir de las ecuaciones transformadas, identificar el lugar geométrico representado analíticamente, [...]” (Cisneros y otros, 2012, p. 7).

En una encuesta realizada a profesores de la asignatura Geometría Analítica de distintas provincias del país (Anexo 1) se conoció lo siguiente:

- En el programa de la asignatura Geometría Analítica no se utiliza explícitamente la frase “transferencia entre representaciones” en los objetivos, en el sistema de conocimientos ni en el sistema de habilidades. En consecuencia en las orientaciones metodológicas no se ofrecen recomendaciones explícitas dirigidas a este proceso.
- Los casos posibles de transferencia entre representaciones que se tratan en el PEA se toman de los libros recomendados en la bibliografía del programa de la asignatura sin realizar un análisis de si se cubren los casos más importantes.

---

<sup>5</sup> En la Educación Superior es común referirse al estudiante y no al alumno, no obstante en esta tesis se utilizará el vocablo alumno.

- No se dispone de una tipología de tareas que se corresponda con los casos más importantes de la transferencia entre representaciones.
- La resolución de las tareas de aprendizaje que exigen transferencia se realiza utilizando el programa heurístico general, sin procurar la elaboración de un programa heurístico particular.
- La transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica se centra en el componente académico y no se tienen en cuenta las oportunidades que ofrece el componente laboral e investigativo para propiciar la formación de los alumnos a propósito de este proceso.
- Es limitado el uso de software en la transferencia entre representaciones de objetos geométricos.

Todas estas limitaciones tienen una implicación directa en el desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones. A ello se suman las propias dificultades que se presentan en la implementación del currículo concebido, como muestran los resultados de la aplicación de diferentes métodos de investigación por el autor de esta tesis, entre ellos la observación (Anexo 2) y las pruebas pedagógicas (Anexo 3), a una muestra de 15 alumnos que se formaban como profesores de Matemática en la Universidad de Sancti Spíritus:

- El 53% (8) no identificaron las representaciones dadas y buscadas, el 60% (9) no conocían los pasos del procedimiento para realizar la transferencia y el 66,6 % (10) no lo ejecutaron correctamente.
- El 60 % (9) no fueron perseverantes ante la complejidad de las tareas y el 40% (6) no manifestaron un estado de ánimo favorable durante las clases.

Al revisar los libros de geometría analítica recomendados por el programa de la asignatura se constató que las tareas de aprendizaje que aparecen en ellos no abarcan la totalidad de casos posibles de transferencia y privilegian unas formas y tipos de representación en detrimento de otros, además son poco frecuentes tareas donde se exige la transferencia de la representación gráfica a las analíticas y a las verbales, de analíticas a verbales y de una verbal a otra verbal.

En estos libros la exposición está estructurada al estilo clásico de las teorías matemáticas y no se enfoca de forma intencionada al desarrollo de la transferencia como proceso consciente.

Estas limitaciones y carencias de la bibliografía se concretan en dificultades en el desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones porque sus profesores se basan en los libros.

A criterio del autor de esta tesis una posible causa de las limitaciones y carencias antes señaladas es el limitado desarrollo de la didáctica de la Geometría en términos de la actualización de sus contenidos en correspondencia con los nuevos lineamientos metodológicos de la asignatura Matemática respecto al trabajo con representaciones.

Los estudios relacionados con las representaciones en el PEA de la Matemática tienen entre sus antecedentes los trabajos de Janvier (1978) acerca de las dificultades en la comprensión del concepto de función basada en representaciones gráficas. Los trabajos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983) se encuentran entre los pioneros en el estudio de las representaciones para el conjunto de los números racionales.

Se destacan también los trabajos de Duval desde la década del 80 del pasado siglo sobre la noción de representación y la comprensión de los objetos matemáticos (Duval, 1993, 1999). Otro momento importante lo constituyen los trabajos sobre pensamiento numérico de Castro (1995), González (1995), Romero (1995), Lacasta (1995), Fernández (1997), Gairín (1998) y Ruiz (2000). También han estudiado y publicado sobre el tema Goldin (1993), Hitt (1997), Kaput (1985, 1987a, 1987b, 1989, 1991) y Font (2000, 2001, 2001a), pero ninguno ha investigado la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

En Cuba se han realizado investigaciones relativas a la transferencia entre representaciones de las funciones en la Educación Preuniversitaria (Gómez, 2005; Cañizares, 2010) y en la formación de ingenieros en informática (Leyva, 2012), pero no se han identificado investigaciones sobre el tema relacionadas con la Geometría.

Según consta en las fuentes bibliográficas citadas, la investigación sobre la transferencia entre representaciones de objetos matemáticos en Cuba y el extranjero se ha centrado en el tema de las funciones y en el pensamiento numérico.

La revisión de las fuentes citadas permitió identificar las siguientes limitaciones teóricas de la didáctica de la Geometría respecto a las representaciones de objetos de la Geometría Analítica:

- No se analiza la relación entre los conceptos de representación y de estructura matemática en el marco de la relación objeto representado-objeto representante.

- Las definiciones del concepto representación de un objeto matemático tienen carácter extensional o son generales resultando de poca utilidad para su uso en el PEA de la Geometría Analítica.
- No se establece diferencia entre los conceptos de tipo de representación y forma de representación, los cuales en ocasiones se utilizan indistintamente.
- No se define ni se caracteriza el concepto de transferencia entre representaciones y se trata indistintamente con otros nombres, entre ellos: traducción y conversión.
- Las definiciones del concepto sistema de representación no se ajustan a la Geometría Analítica.

Si se tiene en cuenta la contradicción existente entre la necesidad y la posibilidad de potenciar la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica y su estado en la situación habitual de este proceso<sup>6</sup>, que se aprecia en la correlación entre las dificultades manifestadas por los alumnos, las insuficiencias de los textos y la falta de recomendaciones de carácter metodológico en los programas de disciplina y asignatura, las cuales tienen como causa común el insuficiente desarrollo de la didáctica de la Geometría para dar respuesta a esta demanda, puede afirmarse la existencia del siguiente:

Problema científico: ¿Cómo potenciar la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática?

El objeto de estudio es el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática. En correspondencia con el problema científico y teniendo en cuenta el objeto, se precisa como campo de estudio la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica (Teroga). La unidad de estudio es el alumno que se forma como profesor de Matemática, la variable de estudio es el desempeño del alumno en la Teroga y la unidad de análisis es la tarea que exige transferencia entre representaciones.

Las carencias y limitaciones señaladas anteriormente en relación con los textos, los programas de la disciplina y asignatura, el nivel de desarrollo de la didáctica de la Geometría en relación con la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica y los aportes de la metodología de la investigación acerca de la relación entre el problema y el resultado científico (Bueno, 2003; Fuentes, Matos y Cruz, 2004; Marimón y Guelmes, 2011), indican que una solución del

---

<sup>6</sup> Se refiere al estado del PEA en las condiciones normales de su desarrollo sin introducir ningún cambio sustancial debido a la investigación.

problema científico que ha originado este trabajo puede ser un modelo didáctico (Valle, 2007), pues este exige representar la esencia de un proceso inmanente al de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica. Por esta razón el objetivo de la investigación es:

Proponer un modelo didáctico<sup>7</sup> que potencie la Teroga en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.

El problema científico fue descompuesto en las preguntas científicas siguientes:

1. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática?
2. ¿Cuál es el desempeño de los alumnos que se forman como profesores de Matemática en la Teroga en situación habitual del PEA de la Geometría Analítica?
3. ¿Cómo estructurar un modelo didáctico de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática?
4. ¿Cuáles son los resultados de la evaluación del modelo didáctico concebido según el criterio de expertos?
5. ¿Cuál es la efectividad, en el desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones, asociada a la implementación en la práctica pedagógica del modelo didáctico propuesto?

En el desarrollo de la investigación se ejecutaron las tareas científicas siguientes:

1. Análisis crítico y complementación de contribuciones de las ciencias a los fundamentos de la investigación con énfasis en los conceptos centrales de la teoría de las representaciones, especialmente la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica.
2. Diagnóstico del desempeño de alumnos que se forman como profesores de Matemática en la Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez” en la Teroga en situación habitual del PEA de la Geometría Analítica.
3. Estructuración de un modelo didáctico de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.
4. Evaluación del modelo didáctico concebido según el criterio de expertos.
5. Evaluación de los efectos, en el desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones, asociados a la implementación del modelo en la práctica mediante un pre-experimento pedagógico.

---

<sup>7</sup> En esta investigación se asume, siguiendo a Valle (2007, p. 11), que un modelo didáctico es una “representación de aquellas características esenciales del proceso de enseñanza-aprendizaje o de alguno de sus componentes con el fin de lograr los objetivos previstos”.

En el desarrollo de la investigación se tomaron en cuenta varios métodos, que atendiendo a la tipología desarrollada por algunos autores (Pérez, García, Nocedo y García, 1996; Cerezal y Fiallo, 2001), se pueden resumir en los siguientes:

#### Métodos teóricos

Los métodos analítico-sintético e inductivo-deductivo, fueron empleados en el estudio de las fuentes de información, para extraer de ellas regularidades relacionadas con las representaciones de los objetos de la Geometría Analítica, la transferencia entre estas y los sistemas de representación utilizados en la Geometría Analítica, y también para fundamentar el problema de investigación y operacionalizar la variable de estudio; el método de análisis histórico-lógico, permitió analizar el comportamiento del problema de investigación según los diferentes enfoques estudiados y la evolución de las soluciones propuestas; el método sistémico estructural funcional orientó el estudio relacionado con el conocimiento de la Geometría Analítica y el PEA de esta asignatura en la formación inicial de profesores de Matemática y el método de modelación, la elaboración del modelo didáctico.

#### Métodos empíricos

La encuesta se empleó en recopilar datos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto; el análisis de los productos del proceso pedagógico, la observación y la triangulación en la valoración del proceso y los resultados del desempeño de los alumnos en la resolución de tareas relativas a la Teroga. La evaluación según el criterio de expertos fue usada en la valoración del modelo y el método experimental en contrastar el modelo en la práctica.

#### Métodos matemáticos y métodos estadísticos

En la investigación también se han utilizado métodos matemáticos, particularmente la regla del producto de la teoría combinatoria en la determinación de casos posibles de transferencia y tipos de tareas, modelación matemática en la medición del desempeño y métodos estadísticos, entre ellos, métodos de muestreo, en la selección de candidatos a expertos, muestras de alumnos y tareas, métodos de la estadística descriptiva, en la caracterización del desempeño de los alumnos en la resolución de las tareas y prueba de hipótesis en la evaluación del modelo según el criterio de expertos.

La novedad del resultado científico que aporta esta tesis consiste en que propone un nuevo enfoque de la planificación y la dinámica de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica en

que se aprovechan las potencialidades de los tres componentes del proceso de formación y su integración para potenciar la transferencia a partir de una nueva concepción de la representación como proceso y resultado que devela los factores fundamentales de este proceso teniendo en cuenta el enfoque metodológico de la asignatura Matemática.

Las contribuciones a la teoría son: una concepción de la representación de los objetos de la Geometría Analítica en el PEA, la cual incluye las definiciones de los conceptos de representación, transferencia entre representaciones y sistema de representación de objetos de la Geometría Analítica y un modelo didáctico de la transferencia entre representaciones.

Las contribuciones de la investigación a la práctica son: un procedimiento para la determinación de los casos posibles de transferencias, identificación y elaboración de procedimientos de transferencia y ordenamiento y distribución de las transferencias en el PEA; un procedimiento para el análisis de la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura; un procedimiento para la planificación de la Teroga en el componente laboral e investigativo; un programa heurístico particular para resolver tareas que exigen transferencia y una tipología de tareas de aprendizaje para ejecutar este proceso con lápiz y papel o mediante software y su ejemplificación.

La actualidad del resultado científico que aporta la tesis se expresa en dos direcciones. Por una parte, contribuye al cumplimiento de los Lineamientos de la Política Económica y Social del Partido y la Revolución relativos a la necesidad de continuar avanzando en la elevación de la calidad y el rigor del proceso docente-educativo y de formar con calidad y rigor el personal docente (PCC, 2011) y por otra, se enfoca en uno de los lineamientos del enfoque metodológico de la asignatura Matemática que incorpora tendencias actuales de la didáctica de esta disciplina.

La tesis está estructurada en introducción, cuerpo, compuesto por tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. Cada capítulo está dividido en secciones y las secciones en epígrafes.

En el capítulo I se exponen los fundamentos teóricos del modelo didáctico propuesto y los resultados de un diagnóstico del desempeño en la Teroga de los alumnos de una muestra. El capítulo II contiene el modelo y en el III se presentan los resultados de su evaluación según el criterio de expertos, así como los resultados de su implementación en la práctica mediante un pre-experimento pedagógico.

I: FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y DIAGNÓSTICO DE LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

## CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y DIAGNÓSTICO DE LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

El presente capítulo contiene los principales fundamentos teóricos relacionados con la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática, que se han conformado a partir de la revisión de una amplia bibliografía, que incluye fuentes sobre geometría, matemática, filosofía, pedagogía, didáctica general, didáctica de la Matemática, metodología de la investigación educativa, psicología, lógica y semiótica.

El análisis de la bibliografía se ha realizado tomando como base las posiciones filosóficas del materialismo dialéctico, de los postulados fundamentales de la psicología histórico-cultural, de los aportes de la pedagogía y la didáctica general, y los relativos a la didáctica de la Matemática utilizada en Cuba en la formación de profesores de Matemática.

El capítulo se ha dividido en dos secciones. En la primera sección se expone una concepción de la representación de los objetos de la Geometría Analítica en el PEA; en la segunda, se analiza la transferencia entre representaciones como uno de los procesos fundamentales del PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática y se exponen los resultados de un diagnóstico del desempeño de los alumnos de una muestra en este proceso en situación habitual de su desarrollo.

### 1.1. Concepción de la representación de los objetos de la Geometría Analítica en el PEA

En la presente sección se analizan los conceptos de representación, transferencia entre representaciones y sistema de representación desde la perspectiva de su uso didáctico en el PEA de la Geometría Analítica.

#### 1.1.1. El concepto de representación en la Geometría Analítica

En este epígrafe se analizan diferentes puntos de vista acerca de las representaciones a partir de la consulta de varias fuentes, entre ellas las correspondientes a los clásicos del tema, se define

el concepto de representación de un objeto geométrico que se utilizará en la tesis, se definen conceptos subordinados a este y se caracteriza el concepto de forma de representación.

En el *Diccionario de la Real Academia Española (DRAE)* (2006) aparecen varios significados de la palabra “representación”. Los que se ajustan a los objetos geométricos son: 1) acción y efecto de representar, 2) figura, imagen o idea que sustituye a la realidad, 3) cosa que representa otra y 4) imagen o concepto en que se hace presente a la conciencia un objeto exterior o interior.

Del segundo de los significados, según el cual una representación puede ser una figura, una imagen, una idea o una cosa, se deduce que esta palabra designa tanto a objetos materiales como objetos mentales.

El primero de los significados remite al verbo representar entre cuyos significados se encuentra el que más se ajusta al contexto del PEA de la Geometría Analítica: “Hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene”. De aquí se deriva que las representaciones tienen como función la sustitución de objetos reales o mentales con el objetivo de hacerlos presentes, por tanto, en el uso de esta palabra está implícita la idea de una relación entre por lo menos dos objetos: el representado y el representante y de la actuación del sujeto que realiza la representación.

También en los significados de la palabra representación en el *DRAE* se aprecia que las representaciones pueden adoptar distintas formas: palabras, figuras, imágenes, conceptos, ideas y cosas que pueden ser internas o externas respecto a quien las utiliza.

Por otra parte, el *DRAE* aclara que la palabra representación designa tanto a una acción (proceso) como su resultado. En lo adelante para evitar ambigüedades se utilizará la palabra “representación” para hacer referencia al resultado y la frase “proceso de representación” para la acción.

Estos significados constituyen una guía para su uso en el contexto del PEA de la Geometría Analítica, pero se requiere profundizar en sus aspectos singulares confrontándolos con otros significados. En este análisis se tendrán en cuenta tres dualidades en el concepto de representación: proceso-resultado, interna-externa y representado-representante.

En la teoría leninista del conocimiento (Lenin, 1984), el concepto de representación juega un rol importante y aparece relacionado con los conceptos de sensación y percepción:

Representación [es la] imagen generalizada, sensorialmente evidente de los objetos y fenómenos de la realidad; se conservan y reproducen en la conciencia sin que los propios objetos y fenómenos actúen directamente sobre los órganos de los sentidos. La representación constituye un elemento necesario de la conciencia pues vincula sin cesar la significación y el sentido de los conceptos con las imágenes de las cosas [...]. (Rosental e Iudin, 1981, p. 401)

En la definición anterior la representación se define utilizando el concepto de imagen de la teoría leninista del conocimiento, que es referido a la conciencia, por lo que el concepto de representación que se maneja es de naturaleza mental (interna en el sujeto cognoscente).

De forma similar a lo que se expresa en el *Diccionario de la Real Academia Española*, aquí las representaciones tienen una función sustitutiva (objetos representantes); en este caso con el objetivo de que los objetos y fenómenos de la realidad se conserven y reproduzcan en la conciencia sin que actúen directamente sobre los órganos de los sentidos.

Este punto de vista filosófico concibe a la representación como el resultado de un proceso en el que los objetos representados son objetos y fenómenos de la realidad y los representantes son imágenes. El siguiente punto de vista psicológico la concibe como un proceso interno relativo a la memoria:

Desde el punto de vista psíquico, el factor más importante de la memoria es la REPRESENTACIÓN, que consiste en reproducir pasadas percepciones y experiencias en la forma de imágenes mentales [...], que nos releva de la necesidad de percibir, directa e inmediatamente, un objeto, cada vez que deseamos o somos impulsados a pensar en él. Estos procedimientos, mediante los cuales se hace posible lo indicado, se llaman procesos de REPRESENTACIÓN, porque por medio de ellos las pasadas experiencias de la percepción son PRESENTADAS de nuevo a la conciencia. (Cortese, sf, p. 194)

En este punto de vista se percibe que el objeto representado es un objeto cualquiera no precisado y se señala que se representan percepciones y experiencias pasadas sobre este objeto mediante imágenes mentales (objetos representantes). Desde esta perspectiva psicológica, el objeto representado puede ser interno o externo, mientras que el representante es interno.

Uno de los investigadores que más ha aportado a la teoría de las representaciones en la didáctica de la Matemática es James J. Kaput (1942-2005). Según este autor:

El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados. (Kaput, 1987b, p. 23)

Este planteamiento de Kaput se centra en la dualidad representando-representante afirmando que en el concepto de representación se deben considerar los dos componentes de la dualidad y su correspondencia.

En este contexto Kaput hace un planteamiento de gran importancia teórica:

Cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades: los objetos representados, los objetos representantes, qué aspectos del mundo representado se representan, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos. (Kaput, 1987b, p. 23)

El autor de la presente tesis desarrolló esta idea de Kaput para los objetos de la Geometría Analítica. Las entidades 1 y 3, referidas respectivamente a los objetos representados y a qué aspectos de estos se representan, las relaciona con el concepto de estructura geométrica ofreciendo una solución teórica satisfactoria a la primera limitación teórica señalada en la introducción porque los conceptos geométricos, y fundamentalmente los conceptos básicos, se forman como estructuras geométricas en el PEA.

Respecto a la entidad 3, referida a los objetos representantes, el autor define el concepto de representación de un objeto de la Geometría Analítica resolviendo con ello la segunda limitación teórica de la didáctica de la Geometría señalada en la introducción.

Con relación a la entidad 4, referida a qué aspectos del mundo representante realizan la representación, introdujo los conceptos de tipo de representación y forma de representación de modo que cada uno tiene una función específica en este contexto. Así resolvió la tercera limitación teórica señalada en la introducción.

Respecto a la entidad 5, referida a la correspondencia entre el objeto representante y el representado, el autor asume las posiciones teóricas de Janvier (1987) según las cuales las representaciones de un solo tipo no agotan todos los significados del concepto y por ello es necesaria la utilización de representaciones de distintos tipos y formas para el mismo objeto en el PEA y la transferencia de una a otra.

A continuación se presenta una síntesis de lo descrito en los párrafos anteriores.

- Los objetos representados. Su relación con el concepto de estructura

Particularizando la idea de Kaput en la Geometría Analítica es necesario partir del concepto de estructura para precisar los objetos representados y qué aspectos de estos se representan:

Una estructura es un  $n$ -uplo ordenado  $(C_1, C_2, \dots, C_m, R_1, R_2, \dots, R_{n-m})$  cuyos primeros  $m$  elementos ( $m < n$ ), son conjuntos no vacíos, llamados conjuntos bases de la estructura y los restantes  $n-m$  elementos son relaciones o conjuntos de relaciones entre los conjuntos bases de la estructura. (Castro y otros, 1992, p. 3)

Cuando en una estructura los conjuntos bases están formados por elementos de la extensión de conceptos geométricos, se dice que la estructura es geométrica.

La pregunta referida a ¿qué entes de una estructura se representan en el PEA de la Geometría Analítica?, tiene varias posibles respuestas en dependencia del nivel educativo en el cual se produce este proceso. En general se representan: los conjuntos bases de la estructura y sus elementos, las relaciones de la estructura y sus elementos y la propia estructura. Esta tesis trata sobre el proceso de representación de elementos de los conjuntos bases de estructuras geométricas a los cuales se les llamará en lo adelante objetos geométricos.

- Los objetos representantes, sus tipos y formas

Considerando los distintos significados de la palabra representación analizados en el inicio de este epígrafe y teniendo en cuenta las especificidades de la Geometría Analítica el autor define el concepto de representación que se utilizará en esta tesis.

Se llama representación de un objeto de la Geometría Analítica al objeto material o mental, que lo sustituye y lo hace presente determinándolo de forma única en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación con el uso de un sistema de coordenadas elegido convenientemente como sistema de referencia.

El concepto de representación anteriormente definido tiene naturaleza dual respecto a lo interno y externo. El aspecto interno de una representación está dado por su uso en el pensamiento, mientras que el externo viene determinado por su uso en la comunicación (Fernández, 1997).

La relación entre lo interno y lo externo en este concepto se concibe en términos de la relación entre pensamiento y lenguaje de acuerdo con los puntos de vista de Vigotski: la representación interna de un objeto geométrico, no se expresa en la externa, sino que se realiza en ella.

La relación entre el pensamiento y la palabra no es una cosa, sino un proceso; dicha relación es el movimiento del pensamiento a la palabra y [...] de la palabra al pensamiento, el cual se presenta [...] como un proceso en desarrollo que pasa por una serie de fases y estadios y sufre todos los cambios que, por sus rasgos sustanciales, pueden ser llamados desarrollo [...]. No es un desarrollo evolutivo, sino funcional, pero el movimiento del proceso del pensamiento a la palabra es desarrollo. El pensamiento no se expresa en la palabra, sino que se realiza en ella. (Vigotski, 1989, p. 169)

El precursor de la idea esencial de la geometría analítica fue René Descartes (1596-1650) (Ríbnikov, 1987) y consiste en asignar a todo segmento un número real positivo que expresa la medida de su longitud respecto a una unidad. Esta idea permite la introducción de los sistemas de coordenadas para representar los objetos geométricos y sus relaciones de modo que cada representación determina de forma única el objeto representado.

Para simbolizar un sistema de coordenadas cualquiera en esta tesis se utiliza la letra C seguida de un subíndice. En el plano se utilizan sistemas de coordenadas de tipo cartesiano o polar y en el espacio sistemas de coordenadas de tipo cartesiano, esférico o cilíndrico. Para simbolizar el tipo de un sistema de coordenadas se utiliza la letra griega  $\tau$  con un subíndice.

En la Geometría Analítica se utilizan varias representaciones para un mismo objeto; al compararlas y agruparlas en clases, según “la naturaleza de las componentes predominantes en el objeto representante”, se forman conceptos subordinados al concepto de representación.

Una de las vías para obtener subclases de la extensión de un concepto es la tipología, que a diferencia de la clasificación (Mederos y Ruiz, 2007), no exige que las clases obtenidas agoten la extensión del concepto.

Los tipos de representación de un objeto de la Geometría Analítica (subclases de la extensión de este concepto) considerados por el autor de esta tesis, según “la naturaleza de los componentes predominantes en el objeto representante”, son el verbal, el gráfico y el analítico.

Estos tipos son las extensiones de los conceptos de representación verbal, representación gráfica y representación analítica de un objeto de la Geometría Analítica que se describen a continuación. Para simbolizar un tipo de representación se utiliza la letra T con un subíndice.

Representación verbal de un objeto de la Geometría Analítica: es una representación del objeto mediante una frase compuesta por palabras del lenguaje común, palabras de la terminología matemática y eventualmente por signos matemáticos.

Representación gráfica de un objeto de la Geometría Analítica: es una representación en la cual predomina una figura geométrica, es decir, es una representación que siempre contiene una figura geométrica y eventualmente frases o signos matemáticos.

Representación analítica de un objeto de la Geometría Analítica: es una representación en la que predomina un par ordenado de números reales, un trío ordenado de números reales, una ecuación, inecuación, sistema de ecuaciones o sistema de inecuaciones, es decir, es una representación que siempre contiene uno o varios de estos objetos y eventualmente frases o signos matemáticos.

Para comparar dos representaciones de un mismo tipo se utiliza su forma. La forma de una representación<sup>8</sup> es la configuración general del objeto representante, de modo que dos representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas. Para simbolizar una forma cualquiera se utiliza la letra F con un subíndice.

El conocimiento geométrico tiene un carácter institucional porque se construye en el marco de una comunidad científica y como cualquier otro conocimiento es un producto histórico-cultural. Una de las implicaciones de este carácter institucional es, que los objetos de las estructuras geométricas tienen formas de representación establecidas por la institución matemática, a las cuales se les llama en esta tesis formas reconocidas de representación.

Un factor importante que determina la forma de las representaciones de los objetos de la Geometría Analítica es el sistema de referencia que se utiliza para representar los puntos, es decir, el sistema de coordenadas.

La forma de la representación de todo punto del plano o del espacio cambia cuando cambia el sistema de coordenadas. Como los objetos de la Geometría Analítica están formados por puntos, la forma de su representación también cambia de un sistema de coordenadas a otro.

Sin embargo, en el PEA de la Geometría Analítica es usual que no se especifique el sistema de coordenadas de las representaciones verbales y las representaciones analíticas de los objetos, pudiendo el profesor o los alumnos escogerlo libremente. También en este proceso es usual asumir que todos los objetos se representan utilizando el mismo sistema de coordenadas

---

<sup>8</sup> En la bibliografía que trata la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos se suelen utilizar indistintamente los conceptos de forma de representación y tipo de representación y en algunas fuentes se utilizan indistintamente los conceptos de forma de representación y sistema de representación. En esta tesis se asume que estos tres conceptos no son idénticos y cada uno tiene una función diferente en la teoría de las representaciones.

cartesianas, a menos que exista un interés especial en estudiar las implicaciones del cambio del sistema de coordenadas en la forma de representación de los objetos.

### 1.1.2. La transferencia entre representaciones en la Geometría Analítica

En este epígrafe se define el concepto de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica resolviéndose la cuarta limitación teórica señalada en la introducción. Además se introducen diferentes tipos y formas de representación de la transferencia, se determinan sus factores fundamentales y se clasifica el concepto de transferencia. La caracterización didáctica de este concepto se expone en 1.2.2.

El significado operacional de la frase “representación de un objeto” se refiere al proceso de representación, es decir, al proceso dirigido a obtener una representación del objeto y expresarla externamente, ya sea, la primera de sus representaciones o una representación a partir de otra existente. Este último caso corresponde a la transferencia.

Acerca de la transferencia se publica frecuentemente, sin embargo en la mayoría de las ocasiones este concepto no se define (Gómez, 2005; Leyva, 2012).

Algunos autores (Nickerson, Perkins y Smith, 1994; Camarena, 2004) consideran que la transferencia del conocimiento es una habilidad de orden superior. Es así que Camarena la define como “la habilidad que tiene un individuo para plasmar su bagaje matemático en la resolución de un problema, [...para] transitar entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático (en ambas direcciones)” (2004, p. 160).

El significado del término transferencia del conocimiento es más amplio que el considerado en esta tesis aunque tiene aspectos comunes.

Algunos autores como Font y Rico (Font, 2001a; Rico, 2009) se refieren a la traducción entre representaciones en lugar de la transferencia. Otros como D'Amore utilizan el término conversión (D'Amore, 2006). Duval (1998) emplea el término “tratamiento” para referirse a la transferencia entre dos representaciones del mismo tipo y “conversión” para la transferencia entre representaciones de diferentes tipos. En cambio Douady (2000) utiliza la frase “juego de marcos” para ambos casos.

Como muestran los párrafos anteriores, en las fuentes bibliográficas consultadas se utilizan distintos términos para nombrar el mismo concepto que en esta tesis se nombra con la frase “transferencia entre representaciones”.

La idea esencial de la transferencia entre dos representaciones de un objeto geométrico  $O$  en el PEA considera que para  $O$  existen dos representaciones  $R_1$  y  $R_2$ , de las cuales una es conocida y la otra desconocida. El proceso que consiste en obtener la representación desconocida a partir de la conocida se llama transferencia entre esas dos representaciones. Por ejemplo, se sabe que para toda recta del plano existe una ecuación paramétrica (representación  $R_1$ ) y una ecuación general (representación  $R_2$ ). Si para una recta particular se conociera su ecuación general y se desconociera su ecuación paramétrica, el proceso mediante el cual se obtiene la ecuación paramétrica a partir de la ecuación general es la transferencia de  $R_2$  a  $R_1$ .

Para perfeccionar la idea anterior el autor de esta tesis consideró, además, las formas respectivas  $F_1$  y  $F_2$  de las representaciones  $R_1$  y  $R_2$ , los respectivos tipos  $T_1$  y  $T_2$  de estas representaciones, los sistemas de coordenadas  $C_1$  y  $C_2$  utilizados en las representaciones  $R_1$  y  $R_2$  y los respectivos tipos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de estos sistemas de coordenadas. La definición resultante a partir de esta consideración es la siguiente:

Si  $O$  es un objeto de la Geometría Analítica, determinado por su representación  $R_1$  en la forma  $F_1$  del tipo  $T_1$  correspondiente al sistema de coordenadas  $C_1$  de tipo  $\tau_1$  y se desconoce su representación  $R_2$  en la forma  $F_2$  del tipo  $T_2$  correspondiente al sistema de coordenadas  $C_2$  de tipo  $\tau_2$ , el proceso mediante el cual se obtiene  $R_2$  a partir de  $R_1$  se llama transferencia de  $R_1$  a  $R_2$ . Si inversamente se conociera  $R_2$  y desconociera  $R_1$ , el proceso que permite obtener  $R_1$  a partir de  $R_2$  se llama transferencia de  $R_2$  a  $R_1$ .

Cuando  $C_1=C_2$  la transferencia se llama transferencia intrasistema, si en cambio  $C_1 \neq C_2$ , esta se denomina transferencia intersistemas.

Cuando  $T_1=T_2$  la transferencia se llama transferencia intratipo, si en cambio  $T_1 \neq T_2$ , esta recibe el nombre de transferencia intertipos.

Si quien realiza la transferencia de  $R_1$  a  $R_2$  o de  $R_2$  a  $R_1$  no utiliza una tercera representación reconocida del objeto  $O$  como representación intermedia, la transferencia se llama directa. En otro caso la transferencia se llama compuesta.

Una transferencia entre representaciones de un objeto  $O$  será directa o compuesta en dependencia del desarrollo del sistema de representación y del procedimiento utilizado por el sujeto que la realiza.

La transferencia entre dos representaciones de un objeto de la Geometría Analítica es un proceso que requiere de la aplicación de un procedimiento que garantice la obtención de una

representación desconocida a partir de una conocida. A la primera se le llama representación dada (RD) y a la segunda, representación buscada (RB).

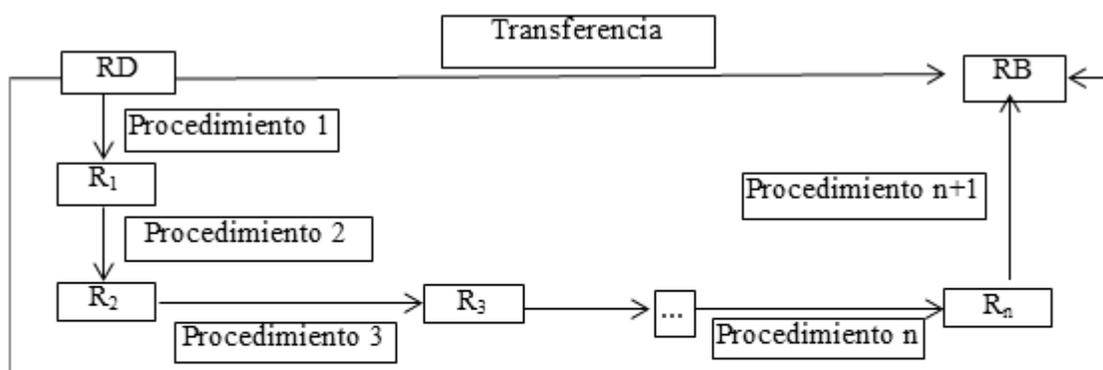
En la revisión bibliográfica realizada no se han encontrado aportes explícitos acerca de la representación de la transferencia, lo cual condujo a que el autor de esta tesis tuviese que desarrollarla utilizando los conceptos de tipo y de forma manejados para el estudio del concepto de representación.

Se consideran como tipos de representación de la transferencia el simbólico, el gráfico y el verbal. En el tipo simbólico se introduce la “forma basada en flecha y vértices”; en el gráfico, el mapa de transferencia y en el verbal, la descripción del procedimiento.

Cada una de estas formas ofrece una información parcial respecto a este proceso. Por eso es recomendable utilizar por lo menos dos de las formas para representar la transferencia.

Para representar simbólicamente una transferencia en la “forma basada en flecha y vértices” se utilizan etiquetas para identificar la representación dada y la buscada y una flecha cuyo origen indica la RD y su extremo la RB.

Un mapa de transferencia (Fig. 1) entre representaciones de un objeto geométrico  $O$  se basa en un grafo orientado (Bandomo, 2009; Chacón, 2016), cuyos vértices y aristas modelan, respectivamente, a las representaciones de  $O$  involucradas en la transferencia y a los procedimientos de su realización. La primera y última aristas del grafo corresponden a la RD y la RB, respectivamente.



**Leyenda:**

RD: representación dada.

RB: representación buscada.

R<sub>1</sub>: representación 1.

Fig. 1: Representación de un mapa de transferencia.

R<sub>2</sub>: representación 2.

R<sub>n</sub>: representación n.

La información textual de un mapa de transferencia se corresponde con la naturaleza del proceso que representa. En primer lugar, como sus vértices se refieren a representaciones de un

objeto geométrico  $O$ , cuyos respectivos nombres están compuestos por dos o más palabras, es conveniente utilizar etiquetas para estos nombres y una leyenda que aclare su significado.

Para las transferencias directas, el mapa de transferencia es más sencillo pues solo contiene la RD, la RB, la flecha que indica la transferencia, el procedimiento y la leyenda.

Una representación verbal de la transferencia consiste en una descripción del procedimiento utilizado para obtener la RB a partir de la RD.

De la definición de Teroga y de sus conceptos subordinados se infiere que en este proceso intervienen, entre otros, los factores siguientes: 1) relación entre los tipos de los sistemas de coordenadas de la RD y la RB, 2) tipo del procedimiento de transferencia, 3) tipo de la RD y la RB, 4) relación entre los sistemas de coordenadas de la RD y la RB y 5) medios disponibles para realizar la transferencia.

El factor referido a la relación entre los tipos de los sistemas de coordenadas de la RD y la RB tiene nexos con el factor referido a la relación entre los sistemas de coordenadas.

Si los sistemas de coordenadas de la RD y la RB son del mismo tipo ( $\tau_1 = \tau_2$ ), la transferencia puede ser intrasistema o intersistemas.

Si los sistemas de coordenadas de la RD y la RB son de tipos diferentes ( $\tau_1 \neq \tau_2$ ), la transferencia es intersistemas. En el PEA de la Geometría Analítica considerado interesa este caso solo cuando uno de los sistemas de coordenadas es cartesiano y el no cartesiano es asociado al cartesiano.

En el análisis de la relación entre los tipos de los sistemas de coordenadas es necesario diferenciar la geometría analítica plana de la espacial.

Para el caso de la geometría plana se estudian los sistemas de coordenadas cartesianas y polares. Por tanto son posibles cuatro casos de transferencia variando el tipo de sistema de coordenadas en la RD y la RB: 1) cartesiano  $\rightarrow$  cartesiano, 2) cartesiano  $\rightarrow$  polar, 3) polar  $\rightarrow$  cartesiano y 4) polar  $\rightarrow$  polar. El cuarto caso no es de interés en el PEA de la Geometría Analítica y los casos 2 y 3 tienen interés por su aplicación en el PEA del Análisis Matemático.

Si se trata de la geometría analítica del espacio los sistemas de coordenadas más utilizados son el cartesiano, el cilíndrico y el esférico. Variando el sistema de coordenadas de la RD y la RB, resultan 9 casos: 1) cartesiano  $\rightarrow$  cartesiano, 2) cartesiano  $\rightarrow$  cilíndrico, 3) cilíndrico  $\rightarrow$  cartesiano, 4) cartesiano  $\rightarrow$  esférico, 5) esférico  $\rightarrow$  cartesiano, 6) cilíndrico  $\rightarrow$

cilíndrico, 7) cilíndrico  $\rightarrow$  esférico, 8) esférico  $\rightarrow$  cilíndrico y 9) esférico  $\rightarrow$  esférico. Los casos 6, 7, 8 y 9 no son de interés en el PEA de la Geometría Analítica.

Los factores referidos al tipo de procedimientos de transferencia, tipo de la RD y la RB y relación entre los sistemas de coordenadas de la RD y la RB se pueden utilizar para obtener una clasificación del concepto de transferencia entre representaciones, muy útil para su uso en el PEA. Para obtener la clasificación se han aplicado ideas de Mederos y Ruiz (2007).

Sean las propiedades:

$q_1$ : en la transferencia se utiliza una representación reconocida intermedia.

$q_2$ : la transferencia se realiza entre representaciones del mismo tipo.

$q_3$ : en la transferencia se utiliza el mismo sistema de coordenadas para todas las representaciones.

Considerando todas las posibles conjunciones de estas propiedades y de sus negaciones lógicas resultan las siguientes ocho propiedades<sup>9</sup>:

$p_1 = q_1 \wedge q_2 \wedge q_3$ ,  $p_2 = q_1 \wedge q_2 \wedge (q_3)'$ ,  $p_3 = q_1 \wedge (q_2)' \wedge q_3$ ,  $p_4 = q_1 \wedge (q_2)' \wedge (q_3)'$ ,  $p_5 = (q_1)' \wedge q_2 \wedge q_3$ ,  $p_6 = (q_1)' \wedge q_2 \wedge (q_3)'$ ,  $p_7 = (q_1)' \wedge (q_2)' \wedge q_3$  y  $p_8 = (q_1)' \wedge (q_2)' \wedge (q_3)'$ .

El conjunto  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_8\}$  es un criterio de clasificación del concepto de transferencia entre representaciones de un objeto geométrico  $O$  según la relación entre los tres factores mencionados. Las transferencias que satisfacen cada propiedad  $p_i$  forman la extensión de un nuevo concepto (Fig. 2).

El mapa de extensiones que relaciona entre sí los ocho conceptos que se obtienen según este criterio y con el resto de los conceptos definidos se representa en la Figura 2.

---

<sup>9</sup> El símbolo  $\wedge$  denota la conjunción de la lógica proposicional y el símbolo  $(p)'$  denota la negación de la proposición  $p$ .

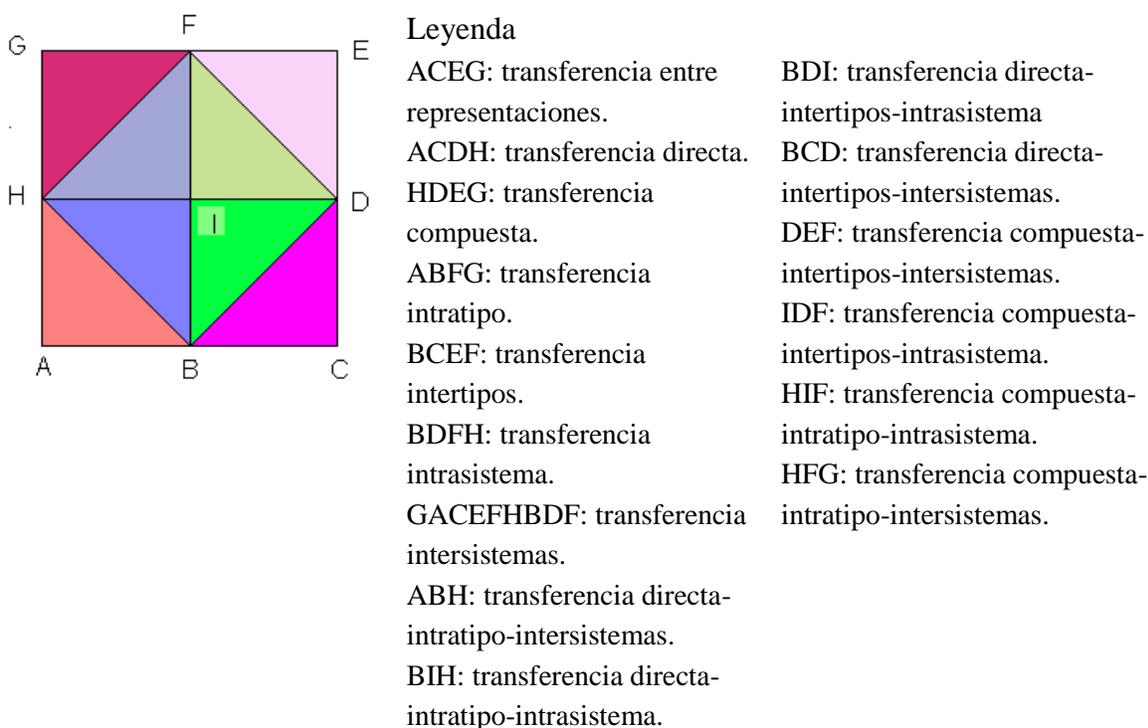


Fig. 2: Clasificación del concepto de transferencia entre representaciones de un objeto O.

El análisis del factor referido a los medios para realizar la transferencia conduce a diferenciar las transferencias que se realizan en la forma tradicional con lápiz y papel de las que se realizan con el uso de algún software. Es por eso que en esta tesis se consideran dos tipos de transferencia, según los medios utilizados: transferencia con lápiz y papel y transferencia con el uso de un software. En el segundo caso el software solo es un medio de modo que la transferencia es siempre un proceso ejecutado por un ser humano.

Puesto que la Teroga es un proceso, sus estados en el tiempo se agrupan en fases. En las fuentes bibliográficas consultadas no se exponen ni describen tales fases. Ello se realiza solo para casos particulares de la transferencia.

En esta tesis interesan las fases de la transferencia cuando quien la realiza es un alumno que se forma como profesor de Matemática para el nivel medio en Cuba, es decir, interesan las fases de este proceso en el contexto del PEA de la Geometría Analítica, las cuales no aparecen determinadas en las fuentes bibliográficas consultadas<sup>10</sup>.

En la definición de transferencia entre representaciones no se especifica si quien debe realizar la transferencia conoce o no el procedimiento para hacerlo. En el caso del PEA el alumno puede conocer o no el procedimiento. Cuando lo conoce la realización de la transferencia constituye

<sup>10</sup> En el capítulo II se exponen estas fases a partir de un programa heurístico particular.

una tarea rutinaria; cuando no lo conoce y está interesado en realizar la transferencia está ante un problema de transferencia entre representaciones.

La resolución de problemas de Teroga está regida por los mismos factores que la resolución de problemas de otros contextos y exigencias, particularmente transcurre según las fases del programa heurístico general (Ballester y otros, 1992, p. 239) de forma específica, es decir, según un programa heurístico particular del que no se dispone en la bibliografía consultada.

### 1.1.3. Sistemas de representación en la Geometría Analítica

En este epígrafe se exponen los fundamentos de la investigación referido al concepto de sistema de representación, el cual fundamenta la existencia de varias representaciones para un mismo objeto y la posibilidad de la transferencia y se resuelve la quinta limitación teórica de la didáctica de la Geometría señalada en la introducción.

En matemática la teoría sobre sistemas de representación tiene un carácter local; lo mismo que la teoría de la representación de los objetos matemáticos: en cada teoría matemática se desarrolla lo concerniente a los sistemas de representación de los objetos de esa teoría, pero no existe una teoría matemática global acerca de sistemas de representación. Los desarrollos teóricos que existen sobre este tema provienen de quienes se dedican a la investigación sobre el PEA de la Matemática (Castro y Castro, 1997; Fernández, 1997; Castro, Rico y Romero, 1997; Duval, 1995, 1998, 2006; Gómez y Rico, 2002; D'Amore, 2011).

Algunos de estos autores (Castro y Castro, 1997; Hitt, 2001) suelen utilizar el concepto de sistema de representación con el sentido que en esta tesis se utiliza el de forma de representación, pero sin exponer una definición rigurosa del concepto. En la tesis de doctorado de Fernández (1997) se expone una definición de este concepto, la cual es inconveniente para su uso en el PEA de la Geometría Analítica porque la extensión conceptual que determina no incluye sistemas particulares de representación de la Geometría Analítica.

Mediante la aplicación del método inductivo a partir del análisis de casos particulares de la Geometría Analítica, el autor de esta tesis ha definido el concepto de sistema de representación.

Un sistema de representación de elementos de un conjunto base  $B$  de una estructura geométrica  $E$ , es un subsistema del sistema de conocimientos relativos a  $E$  (conceptos, proposiciones, razonamientos, reglas y procedimientos) con las características siguientes:

1) Establece y fundamenta la existencia de una forma de representación  $F$  para cada uno de los elementos de  $B$  o de una parte de  $B$ .

2) Contiene los procedimientos o reglas para la representación de elementos de B en la forma F, particularmente los procedimientos de transferencia para obtener la representación de elementos de B en la forma F a partir de otras formas de representación.

3) Incluye definiciones, proposiciones o reglas que caracterizan las relaciones de E en las que los elementos de B intervienen representados en la forma F.

El concepto de sistema de representación incluye en su tercera característica definiciones y proposiciones que caracterizan las relaciones de la estructura en las que intervienen los elementos representados en la forma del sistema. Esto significa que se deben transferir las definiciones y proposiciones formuladas en los sistemas de representación anteriores, al nuevo sistema de representación.

La definición de transferencia entre representaciones del epígrafe 1.1.2 se refiere a representaciones de los elementos de un conjunto base de una estructura, pero no incluye la transferencia entre relaciones donde estos elementos intervienen.

En la geometría analítica no están completamente desarrollados todos los sistemas de representación. Una de las carencias observadas en la bibliografía consultada por el autor de esta tesis en el proceso de investigación y durante más de treinta y cinco años en su labor como profesor de esta materia es la no existencia de procedimientos para algunas transferencias importantes, lo cual constituye un potencial para el desarrollo del pensamiento de los alumnos en términos de la resolución de problemas de transferencia entre representaciones.

## 1.2. La transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica y su diagnóstico en situación habitual

Esta sección está dividida en tres epígrafes. En el primero se analiza la transferencia entre representaciones como un proceso del PEA de la Geometría Analítica imbricado en los tres componentes de la formación inicial de profesores de Matemática, en el segundo se examina la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica según componentes y eslabones de este proceso y se caracteriza didácticamente la transferencia y en el tercero se exponen los resultados de un diagnóstico del desempeño de alumnos en este proceso.

### 1.2.1. La transferencia entre representaciones en los componentes del proceso de formación inicial de profesores de Matemática

La frase “formación inicial de profesores de Matemática” se utiliza en esta tesis para denominar el sistema de los procesos que tienen lugar hasta que los alumnos obtienen el título de

licenciados que los acredita para ejercer como profesores de Matemática en el nivel medio de la Educación General.

La formación inicial de profesores de Matemática incluye procesos cuya finalidad fundamental es el dominio del contenido de las disciplinas del currículo y especialmente el contenido matemático porque esa es la base en la que se sustentan muchos otros procesos de formación. A la necesidad del dominio del contenido de la materia que se enseña se han referido muchos pedagogos. José Martí (1853-1895) afirma que “Es a más cosa cierta que no se habla mal de aquello que se conoce bien [...] y la palabra sobre materia conocida debe ser, sin duda alguna, a la par que sólida e instructiva, galana y fácil” (1963, p. 236).

Pero también el alumno que se forma como profesor de Matemática debe dominar el contenido de otras disciplinas que propician la preparación para la enseñanza y la educación. El dominio de estas materias es tan importante como el dominio del contenido matemático. Martí (1963, p. 235) lo expresa cuando afirma que “La manera de decir realza el valor de lo que se dice: tanto, que algunas veces suple a esto”.

Los procesos de formación cuyo fin fundamental es el dominio del contenido de las disciplinas del currículo se agrupan bajo el nombre de componente académico del proceso de formación del profesor de Matemática.

La formación de profesionales y particularmente de profesores de Matemática incluye procesos dirigidos a la formación práctica, es decir, a aquella que vincula al alumno con las condiciones reales del desempeño de la profesión. Al subsistema que agrupa estos procesos se le llama componente laboral del proceso de formación.

Los procesos del componente laboral de la formación inicial de profesores de Matemática están vinculados a escuelas del nivel medio de la Educación General.

En el proceso de formación de profesores de Matemática también se incluyen procesos dirigidos a que el futuro graduado sea capaz de investigar su propia práctica y perfeccionarla. El subsistema de estos procesos recibe el nombre de componente investigativo del proceso de formación.

Los componentes anteriormente definidos son conceptos subordinados al concepto de componente del proceso de formación de los profesionales (Fuentes; 2002) que se asume en esta tesis. En las fuentes bibliográficas consultadas no existe unicidad en nombrarlos; Álvarez

(1992) los llama componentes organizacionales y los analiza como formas del proceso de acuerdo con su acercamiento a la realidad social.

Los componentes están definidos en términos del objetivo de los procesos que lo integran, pero en estos procesos suele producirse el aprendizaje indirecto (Klingberg, 1972) de manera que cada componente puede tener implicaciones en los dos restantes.

El MES (Ministerio de Educación Superior de Cuba) concede importancia a la integración de estos componentes en los planes de estudios E, pues en las bases conceptuales para su diseño se plantea: “Lograr una integración adecuada entre las actividades académicas, laborales e investigativas” (MES, 2016, p.12).

En el diseño curricular de las carreras donde se forman profesores de Matemática se concibe una disciplina principal integradora denominada Formación Laboral e Investigativa a la que contribuyen las restantes disciplinas. Esta es una de las razones por las que en esta tesis se trata la planificación y dinámica de los componentes laboral e investigativo de manera integrada con el nombre de componente laboral e investigativo.

El PEA de la Geometría Analítica está imbricado en los componentes del proceso de formación inicial de profesores de Matemática y la transferencia entre representaciones es uno de sus procesos más importantes.

Desde el punto de vista académico este proceso está en el centro de la Geometría Analítica (Lehmann, 1972; Pimienta e Iglesias, 2010) porque los problemas fundamentales de esta disciplina son problemas de transferencia entre representaciones.

La existencia de dos unidades de Geometría Analítica en el del programa de Matemática para undécimo grado (Mined, 2005), en las que la transferencia entre representaciones juega un papel importante, potencia las oportunidades de tratar este proceso en el componente laboral e investigativo.

La formación inicial de los profesores de Matemática para el nivel medio en Cuba se realiza actualmente en la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física, plan D y en la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática, plan E.

En las indicaciones metodológicas y de organización de la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física (Mined, 2014) y perfil Matemática (MES, 2016b) se plantea que todas las disciplinas deben participar en el diseño, realización y valoración de la formación laboral e investigativa de los alumnos y en el programa de la disciplina Geometría (Cisneros y

otros, 2012 y Cisneros, González, Quero y Carbonell, 2016) se sugieren los tipos de tareas a realizar para propiciar la formación laboral e investigativa. En los documentos citados no se particulariza para el caso de la transferencia entre representaciones.

En la bibliografía consultada no se identificaron aportes de la didáctica de la Geometría, referidos al desarrollo de la transferencia entre representaciones en los componentes de la formación inicial de profesores de Matemática.

### 1.2.2. La transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica

El autor asume que el PEA, en el contexto de la formación inicial de profesores de Matemática, es una secuencia de estados de un sistema didáctico que se caracteriza por la existencia de un profesor dispuesto a enseñar un contenido a un alumno que lo pretende aprender en un tiempo; ambos guiados por un objetivo y utilizando ciertos métodos y medios a partir de un sistema de condiciones (Álvarez, 1992; Chevallard, 2000; Ávila, 2001; Ruiz, 2007). El objetivo responde a un encargo social que constituye el problema del PEA.

La organización de las relaciones de los sistemas didácticos en el PEA de la Geometría Analítica se realiza de diferentes formas que dependen de la relación objetivo-contenido-método. En algunas de ellas el profesor interactúa con un único alumno y en otras lo hace con un grupo de alumnos en el mismo espacio.

A las características del PEA se les llama componentes de este proceso (Álvarez, 1992), aunque no lo son en el sentido de partes de un todo<sup>11</sup> como los componentes del proceso de formación de los profesionales con los cuales no deben confundirse.

El autor asume que los componentes del PEA son: problema, objetivos, contenidos, métodos, medios, formas de organización, evaluación, el profesor, los alumnos y el grupo (Álvarez, 1992, 1998; Addine y otros, 1998; Addine, 2004) y que este proceso está regulado por leyes (Klingberg, 1972; Álvarez, 1992; Rangel, 2002; Ruiz, 2007) y principios donde estas se concretan (Rangel, 2002; Silvestre y Zilberstein, 2002).

Existen diferentes sistemas de principios didácticos (Klingberg, 1972; Labarrere y Valdivia, 1988; Davidov y Slobódchikov, 1991; ICCP, 1998; Rangel, 2002). El autor de esta tesis considera que el expuesto por Silvestre y Zilberstein (2002, p. 22) se ajusta a los fundamentos

---

<sup>11</sup> Por esta razón Fuentes (2002) les llama configuraciones a algunas de las características del PEA por considerar que no son partes del PEA, “pues no se les puede ubicar en determinando lugar o momento de dicho proceso”.

teóricos y a las características del PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.

Los procesos que componen el PEA, según el factor temporal, se agrupan en etapas (Klingberg, 1972; Jungk, 1978; Baranov, Bolotina y Slastioni, 1989; Davídov y Slobódchikov, 1991; Ballester y otros, 1992; Torres, 1994; Chevallard, 1999; Fuentes, 2002; Godino, 2005) a las cuales se les llama eslabones (Jungk, 1979; Álvarez, 1998; Fuentes, 2002). Los eslabones en que se planifica el PEA se agrupan en la etapa de diseño curricular o de planificación; los que se caracterizan por la interacción entre el profesor y el alumno se llaman funciones didácticas y conforman la dinámica<sup>12</sup> del PEA (Álvarez, 1999; citada por Feria, 2003).

En esta tesis se asumen las funciones didácticas reconocidas por Klingberg (1972), Jungk (1981) y Ballester y otros (2015): 1) aseguramiento del nivel de partida, 2) orientación hacia el objetivo, 3) motivación, 4) tratamiento del nuevo contenido, 5) fijación y 6) control y evaluación.

En los apartados siguientes se analiza la Teroga en relación con la planificación y los componentes del PEA de la Geometría Analítica.

- La transferencia entre representaciones en la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica

La planificación del PEA, es entendida como “la determinación y elaboración de los programas de influencias sobre los alumnos por parte del docente para que se produzca el aprendizaje” (Ruiz, 2007, p. 29). Estos programas de influencias son dos: el programa fundamental que se elabora antes de la interacción alumno-docente y el programa regulador que se confecciona durante esta interacción (Talízina, 1988).

La elaboración del programa fundamental transita por una secuencia de etapas que se inician con la planificación a largo plazo —incluye la planificación de las unidades temáticas— y terminan con la llamada planificación a corto plazo (a cargo del docente), donde se concreta este programa mediante la preparación de los sistemas de clases y de cada una de las clases que conforman un tema (Ballester y otros, 2000; Álvarez y otros, 2014; Pérez, 2015; Ballester y otros, 2015).

---

<sup>12</sup> Carlos Álvarez (1992) le llama ejecución a la dinámica del PEA. El concepto de dinámica del PEA fue introducido en Cuba por Ilsa Álvarez (1999).

Los métodos y procedimientos para la planificación de la enseñanza de la Matemática han sido pródigamente tratados por autores de obras sobre didáctica de la Matemática que se utilizan en Cuba (Jungk, 1978; Ballester y otros, 2000; Álvarez y otros, 2014; Pérez, 2015; Ballester y otros, 2015), pero algunos de estos autores no tratan explícitamente la planificación del trabajo con representaciones y otros lo hacen solo como parte del análisis de las líneas directrices.

En el extranjero es muy interesante el procedimiento, para la planificación, desarrollado por Gómez y Rico (2002) con el nombre de análisis didáctico que incluye el análisis del contenido abarcando varios elementos no considerados explícitamente por Jungk, Ballester y otros, entre ellos, el análisis de las representaciones.

Aunque en el procedimiento propuesto por Gómez y Rico (2002) se presta atención al examen de las representaciones, en lo que se refiere a las operaciones y las relaciones entre representaciones, en el análisis del contenido concebido por estos autores no es objeto de atención la Teroga en lo que respecta a los casos posibles y qué procedimiento de transferencia utilizar en cada caso. Además estos autores se centran en las representaciones con lápiz y papel sin prestar atención al análisis del uso de software en el proceso de transferencia, lo cual constituye una tendencia actual en el PEA de la Matemática<sup>13</sup>.

Los autores anteriormente citados tratan la planificación del PEA de la Matemática para la Educación General, aunque varias de sus ideas esenciales, incluidas las referidas a la planificación a mediano y largo plazos, pueden transferirse a la educación superior, especialmente al PEA de la Geometría Analítica. La limitación fundamental de las ideas de estos autores, en cuanto a la planificación de la Teroga, es que no parten de un análisis del contenido sustentado en la determinación de los casos posibles de transferencia utilizando los conceptos de forma, tipo y sistema de coordenadas, el cual, a criterio del autor de esta tesis, es la cuestión esencial de este proceso.

- La transferencia entre representaciones en el problema del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica

El autor concuerda con Addine y otros (1998, p. 20) en que el problema es “una manifestación del objeto que establece una necesidad en el sujeto que aprende”, es decir, “[...] la necesidad social que se satisface con el proceso docente-educativo [...]”.

---

<sup>13</sup> En el capítulo II se expone un procedimiento de análisis didáctico que soluciona la insuficiencia relativa a la identificación y elaboración de procedimientos de transferencia y distribución de las transferencias en el PEA.

En el diseño del currículo de la formación inicial de profesores de Matemática (Plan D) se explicita el problema del PEA de la Geometría como la “necesidad de fundamentar desde la [...] Geometría los contenidos geométricos que se estudian en la asignatura Matemática de la enseñanza media” (Cisneros y otros, 2012), pero no se concreta en la Geometría Analítica ni en la transferencia entre representaciones. Para hacerlo es oportuno tomar como punto de partida las indicaciones metodológicas y de organización de la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física, correspondientes al plan de estudio D, donde al caracterizar la disciplina Geometría, se afirma que esta “contribuye a la sistematización de los contenidos geométricos de la escuela y permite consolidar modos de actuación [...]” (Mined, 2014, p. 7).

Otro elemento importante a considerar es el objeto de trabajo del profesional de la carrera: “el proceso educativo y en particular, el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática [...], en la educación media básica y media superior [...]” (Mined, 2010, p. 8).

Como se puede apreciar, no es posible estudiar este proceso sin vincularlo con las exigencias que se plantean a la educación media en relación con la Geometría.

Una de las líneas directrices de la enseñanza de la Matemática en este nivel es la Geometría; tiene entre sus objetivos en la Educación Media Superior:

Resolver ejercicios con texto y de aplicación de las secciones cónicas a situaciones de la vida práctica y otras ciencias, sobre la base del conocimiento de sus definiciones como lugares geométricos y de los elementos que las caracterizan y las habilidades para transferir de una forma a otra de representación de ellas. (Álvarez y otros, 2014, p. 84)

Otra línea directriz que también presta atención a la transferencia entre representaciones es la relativa al adiestramiento lógico-lingüístico la cual fue analizada en la introducción.

En el programa de Matemática para el undécimo grado (Mined, 2005) se afirma que los alumnos deben resolver “Problemas de representación de situaciones mediante modelos analíticos y gráficos y viceversa, de interpretación de sistemas de la realidad a partir de modelos dados”. Sin embargo, al formular los objetivos que se deben lograr en las unidades 5 y 6 (relacionadas con la Geometría Analítica) solo se utiliza el vocablo “representar” al referirse a las representaciones gráficas, es decir, no se tiene en cuenta que las ecuaciones son también formas de representar las rectas y las cónicas.

Los conocimientos y habilidades de la Geometría Analítica son imprescindibles para el desarrollo del PEA de otras disciplinas, entre ellas el Análisis Matemático.

Teniendo en cuenta lo expresado se puede formular el problema del PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática como la necesidad de que el alumno se apropie de los contenidos de la Geometría Analítica que fundamentan los contenidos del mismo tipo en la disciplina Matemática del nivel medio así como aquellos contenidos geométricos necesarios para el aprendizaje de otras disciplinas de la carrera.

Este problema incluye la necesidad de que los alumnos que se forman como profesores de Matemática se apropien de los conocimientos y desarrollen habilidades relativos a la Teroga y los integren con otras habilidades, especialmente con habilidades profesionales (Fernández, Ballester y González, 2012; Ballester y otros, 2016) en su desempeño; todo ello con el propósito de propiciar su formación para dirigir el PEA de esta materia en el nivel medio de la Educación General y para el aprendizaje de otras asignaturas de la carrera.

- La transferencia entre representaciones en los objetivos y contenidos de la Geometría Analítica

El objetivo es el componente rector del PEA, representa la modelación subjetiva del resultado esperado y responde a la pregunta ¿Para qué enseñar? (Álvarez, 1992; Addine y otros, 1998; García y otros, 2004 y Addine, 2004). El objetivo determina al resto de los componentes, pero esta relación no es unidireccional.

Los objetivos de la disciplina Geometría en la formación inicial de profesores de Matemática (Cisneros y otros, 2012 y Cisneros y otros, 2016), están orientados a que los alumnos se preparen para: 1) dirigir el PEA de la Geometría; 2) utilizar correctamente la lengua materna como soporte básico de la comunicación; 3) fundamentar científicamente los contenidos geométricos que se estudian en la enseñanza media; 4) resolver y formular ejercicios y problemas geométricos de cálculo y demostración; 5) aplicar los métodos de búsqueda, selección y procesamiento de la información científica para el trabajo con los contenidos geométricos y 6) utilizar métodos científicos para darle solución a los problemas que surjan en la dirección del PEA.

Todos estos objetivos guardan una estrecha relación con la Teroga, pero la relación más directa se establece con los objetivos 1, 2, 4 y 6. Con el número uno, por las razones expuestas en 1.2.2; con el número dos, específicamente en las transferencias entre representaciones verbales; con el número cuatro porque este incluye, aunque no explícitamente, la resolución y formulación de ejercicios y problemas de transferencia y con el seis en la solución de tareas del componente laboral e investigativo.

En las indicaciones metodológicas generales para la disciplina Geometría (Plan D) se plantea: “Es importante tratar la representación gráfica de rectas y planos en un sistema de coordenadas, así como la representación de regiones planas y espaciales dadas las ecuaciones de las curvas o superficies fronterizas respectivamente [...]” (Cisneros y otros, 2012, p. 6). Este planteamiento solo se refiere explícitamente a las representaciones gráficas, pero queda implícita la utilización de representaciones analíticas al referirse a las ecuaciones de las curvas o superficies fronterizas. Las orientaciones metodológicas de la disciplina Geometría para el plan E mantienen este planteamiento.

El contenido de enseñanza-aprendizaje es “aquella parte de la cultura y experiencia social que debe ser adquirida por los estudiantes” (Addine y otros, 1998). Los autores consultados (Danilov y Skatkin, 1980; Addine, y otros, 1998; Álvarez y otros, 2014), cuyos criterios se asumen, consideran que la categoría contenido incluye: el sistema de conocimientos, el sistema de habilidades y hábitos, el sistema de experiencias de la actividad creadora y el sistema de relaciones con el mundo.

Álvarez y otros (2014, p. 28), particularizan este concepto para la asignatura Matemática al considerar que el sistema de conocimientos está formado por: conceptos, proposiciones y procedimientos. Para Ruiz (2007), los conceptos están determinados por su contenido, extensión, significado(s) y representaciones.

En esta tesis se asume que una habilidad es una formación psicológica predominantemente ejecutora, donde se integran lo afectivo y lo cognitivo en el dominio efectivo, eficaz y eficiente de un procedimiento, expresado en una ejecución rápida y consciente para cumplir un objetivo en cada situación en que su aplicación sea pertinente (Ruiz, 2016).

La efectividad del dominio de un procedimiento expresa el grado en que el resultado de la ejecución del procedimiento coincide con el objetivo e indica si el alumno ha aplicado las operaciones del procedimiento correctamente en correspondencia con las condiciones y exigencias de la tarea de aprendizaje; la eficacia es la permanencia de la efectividad al variar el tipo de tarea y la situación de enseñanza-aprendizaje y por tanto es una expresión de la transferencia del aprendizaje (Sánchez, 2002; National Academy Press, 2004) y la eficiencia es la efectividad alcanzada en el menor tiempo posible, gracias al aprovechamiento de los recursos y medios disponibles (Ruiz, 2016).

Se concuerda con Brito y otros (1887, p.57) respecto a la clasificación de las habilidades en:

- Intelectuales y prácticas, atendiendo al plano en que transcurre la habilidad.

- Generales y específicas, atendiendo a la diversidad de formas de actividad en que pueden ser desarrolladas.
- Deportivas, profesionales, laborales y docentes, atendiendo a las formas concretas de realización.

La frase “habilidad para la transferencia entre representaciones” en este contexto se refiere al dominio del procedimiento resultante de particularizar el programa heurístico general que se expone en el capítulo II de esta tesis.

En el sistema de habilidades relativas al PEA de la Matemática se incluyen las que se derivan del dominio de las acciones requeridas para la ejecución de los procedimientos matemáticos específicos, así como habilidades lógicas e intelectuales, que permiten interpretar, elaborar y comunicar ideas matemáticas con ayuda de la terminología y simbología matemáticas, valorar cada inferencia y concepción que se realice y detectar posibles errores (Álvarez y otros, 2014).

Los autores mencionados incluyen en el sistema de experiencias de la actividad creadora los métodos de la actividad cognoscitiva para la resolución de problemas que requieren del adiestramiento lógico-lingüístico y la instrucción heurística. La Teroga constituye un proceso para el desarrollo de estas experiencias por sus potencialidades para la resolución de problemas y la instrucción heurística.

Forman parte del sistema de relaciones con el mundo, según Álvarez, Almeida y Villegas (2014), las convicciones filosóficas, políticas, morales e ideológicas fundamentales, relacionadas con la ciencia matemática o que resultan directamente de ella y las cualidades de la personalidad. La Teroga tiene potencialidades en este aspecto, especialmente porque es aplicable a la solución de problemas relacionados con la práctica.

En el programa de la disciplina Geometría se expone el sistema de conocimientos de la Geometría Analítica referidos a: vectores, sistemas de coordenadas, rectas y planos, cónicas y cuádricas, pero no se precisan los procedimientos que el alumno debe dominar.

Entre las habilidades principales de la disciplina Geometría, en el programa (Cisneros y otros, 2012 y Cisneros y otros, 2016), se incluyen las referidas a: resolver y formular problemas y ejercicios geométricos de cálculo, demostración de proposiciones y de representación gráfica. Se aprecia que solo se considera como tipo de representación la gráfica, pero para resolver ejercicios de cálculo y demostración es necesario utilizar representaciones de otros tipos.

En el programa de la asignatura Geometría Analítica plan D (Geometría I), elaborado en la Universidad de Sancti Spiritus, se estructuró el contenido en tres temas de estudio; en los objetivos y contenidos de todos ellos se incluye la Teroga.

El sistema de conocimientos de la asignatura Geometría I se corresponde con lo concebido en el programa de la Disciplina, aunque con un mayor nivel de precisión.

El autor de esta tesis considera que para propiciar un aprendizaje con comprensión conceptual (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001) de la Teroga, debe incluirse explícitamente en el programa de la asignatura el estudio del concepto de transferencia entre representaciones y los conceptos subordinados cuyas definiciones se han expuesto en 1.1.2. Ello requiere del estudio de los conceptos de estructura geométrica, representación y conceptos subordinados, forma de representación, forma reconocida de representación y sistema de representación.

En la tesis se considera que la habilidad para transferir entre representaciones de los objetos geométricos, es una de las más importantes a desarrollar en el PEA de la Geometría Analítica.

- Métodos y formas de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica y medios para la transferencia entre representaciones

El PEA de la Teroga ocurre según los métodos y formas de organización utilizados en el PEA de la Geometría Analítica. En el caso de los medios, especialmente el software, existen aspectos específicos para la transferencia entre representaciones.

El concepto de método de enseñanza-aprendizaje ha sido tratado por diferentes autores (Klingberg, 1972; Addine, 1998; Álvarez, 1998; Ballester y otros, 1992; Ballester y otros, 2015) quienes coinciden en que el método responde a las preguntas ¿cómo enseñar?, ¿cómo aprender? y que existe relación entre el objetivo, el contenido y el método de modo que el objetivo determina el contenido y la relación objetivo-contenido determina el método.

Cualquier método que se utilice, en el PEA de la Geometría Analítica, debe propiciar el trabajo independiente de los alumnos, que estos participen en la búsqueda del conocimiento, la interacción de cada alumno con sus compañeros, la oportunidad del alumno de exponer sus ideas, y de escuchar a sus compañeros y el intercambio de ideas entre los alumnos y el profesor.

El autor asume la clasificación de los métodos según el “carácter de la actividad cognoscitiva” (Labarrere y Valdivia, 1988): explicativo-ilustrativo, reproductivo, exposición problémica, búsqueda parcial, conversación heurística e investigativo.

Los métodos guardan una relación muy estrecha con las formas de organización (Álvarez, 1992, 1998; Calzado, 2004) a tal punto que autores como Klingberg (1972) las consideran aspectos externos de los métodos.

El programa de la disciplina Geometría (planes D y E) no incluye sugerencias para favorecer la Teroga en el PEA.

Una forma de organización es la configuración de las relaciones entre el profesor y los alumnos y entre los alumnos en el PEA y constituye una manifestación concreta de la dinámica del PEA que depende de varios factores entre ellos: el objetivo, el contenido, el método, los medios, las condiciones, el tiempo y el tipo de componente del proceso de formación.

En el Reglamento de Trabajo Docente Metodológico del MES (MES, 2007), se reconocen como formas de organización fundamentales del PEA las siguientes: la clase, la práctica de estudio, la práctica laboral, el trabajo investigativo de los alumnos, la autopreparación de los alumnos, la consulta y la tutoría. Todas estas formas se utilizan en el PEA de la Geometría Analítica, aunque a la clase se dedica la mayor parte del fondo de tiempo.

Los tipos principales de clases que se utilizan en el PEA de la Geometría Analítica son: la conferencia, la clase práctica y la clase encuentro.

La práctica laboral en la formación inicial de profesores de Matemática (planes D y E) se desarrolla en todos los años de la carrera y tiene entre sus propósitos preparar al alumno para enfrentar los problemas profesionales más comunes que se presentan al profesor de Matemática. Esta debe planificarse y ejecutarse en estrecho vínculo con las actividades del componente académico previstas en los programas de las disciplinas que integran el currículo.

Tradicionalmente se ha considerado a los medios de enseñanza como componentes del PEA (Addine, 1998; Álvarez, 1992, 1998; Silvestre y Zilberstein, 2002). Los medios de enseñanza son elementos facilitadores del proceso y responden a la pregunta "¿Con qué?". En la actualidad la denominación ha cambiado por la de medios de enseñanza y aprendizaje asumida por el autor (González, Recarey y Addine, 2004, Ballester y otros, 2015) debido a que estos son utilizados tanto para la actividad de enseñanza como para la de aprendizaje.

En este apartado se profundizará en dos medios, que a juicio del autor son muy importantes en el PEA de la Geometría Analítica: el texto básico<sup>14</sup> y la computadora.

---

<sup>14</sup> En el Documento Base para el diseño de los planes de estudio E se habla de bibliografía básica porque esta puede estar compuesta por varios libros.

La importancia de los textos es reconocida por diferentes autores (Cockcroft, 1985; Romberg y Carpenter, 1986; Rico, 1990) quienes consideran que: constituyen una ayuda inestimable para el profesor y los alumnos en el trabajo diario, proporcionan seguridad y continuidad en los puntos de vista, constituyen un reflejo de la tradición y la experiencia, son un paradigma del conocimiento y sirven de guía para el aprendizaje.

Destacan los autores antes citados que el profesor debe “ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los textos”. Esta idea es compartida por el autor de esta tesis y adquiere particular importancia en la formación de profesores de Matemática.

La bibliografía básica para el PEA de la Geometría Analítica está constituida por un texto<sup>15</sup> que se caracteriza por un enfoque vectorial. El contenido se estructura a partir de la definición de cada concepto seguida de los teoremas con sus correspondientes demostraciones; al final se presenta una amplia colección de ejercicios para que los alumnos desarrollen las habilidades. En el libro no se utiliza la palabra transferencia entre representaciones, en su lugar se emplean términos específicos de cada contexto.

En el texto no se conciben ejercicios que permitan fijar los procedimientos para todas las posibles transferencias entre las representaciones de los diferentes objetos geométricos estudiados, no se exige la utilización de software en el proceso de transferencia y no se describen los procedimientos a seguir para realizar las transferencias.

Otro medio importante, para el trabajo en la asignatura, es la computadora. Respecto a su uso en el PEA de la Matemática Gil y de Guzmán (1994, p. 69) señalan: “La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora y el ordenador actuales está comenzando a influir fuertemente en los intentos por orientar nuestra educación matemática [...] adecuadamente, de forma que se aprovechen al máximo tales instrumentos”.

Existen diferentes software profesionales que se pueden utilizar en el PEA de la Geometría Analítica y particularmente en la Teroga. El autor de esta tesis considera que el GeoGebra, versión 5.0.32.0, es adecuado porque se recomienda su uso en el nivel medio de la Educación General, su interfaz es amigable y se ajusta a las exigencias actuales de este proceso.

Según Hohenwarter y Hohenwarter (2009), GeoGebra es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo ofreciendo tres perspectivas diferentes

---

<sup>15</sup> Se refiere al texto *Geometría Analítica* (Tomos 1 y 2) de un colectivo de autores encabezado por Serguei Cherbakov.

de cada objeto matemático: vista gráfica, vista numérica y vista algebraica. Reconocen, además, que esta multiplicidad permite apreciar los objetos matemáticos en tres tipos de representaciones diferentes: gráfica, algebraica y en celdas de una hoja de cálculo.

Este software, según la experiencia del autor de esta tesis, se puede utilizar con diferentes propósitos: favorecer la comprensión de conceptos, ejecutar procesos que tradicionalmente se realizan con lápiz y papel como es el caso de la Teroga, elaborar conjeturas, comprobar los resultados obtenidos al trabajar con lápiz y papel, mostrar las posibilidades que ofrecen las vistas gráfica y algebraica en el proceso de transferencia y demostrar que existen diferencias entre el proceso de transferencia al trabajar con lápiz y papel y el que se realiza con el uso del software GeoGebra.

El uso de software contribuye al cumplimiento del noveno de los lineamientos para el trabajo en la asignatura Matemática referido a “utilizar las tecnologías, [...], con el objetivo de adquirir conocimientos y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos” (Álvarez y otros, 2014, p. 2).

La utilización del software en el PEA de la Teroga implica riesgos que pueden evitarse si se tienen en cuenta las experiencias obtenidas por los estudiosos del tema (Cortés, 2005; Gamboa, 2007; Carrillo de Albornoz, 2012; Jiménez y Jiménez, 2017).

Una de esas experiencias es la desarrollada por los profesores japoneses H. Murakami y M. Hata (Guzmán, 1994, p. 37) en que se concibe la introducción de un nuevo tema en relación con la secuencia de los que le preceden. Se consideran dos fases para el aprendizaje del nuevo tema: la fase básica y la fase de su uso y aplicación.

Los objetivos de la fase básica consisten en que el alumno: entienda a fondo los problemas que dan lugar al tema, que conozca bien los conceptos, estrategias, métodos fundamentales a propósito del tema, que domine razonablemente el funcionamiento de las herramientas y rutinas que resuelven los problemas del tema.

La enseñanza de la fase básica se lleva a cabo de modo cercano al convencional<sup>16</sup>, pero se puede dedicar más tiempo para lo básico, rehuyendo problemas complicados, se utiliza el apoyo de la computadora para la realización de actividades, que ayuden a una mejor comprensión de los problemas e ideas claves, no se utiliza el software en esta fase para realizar las tareas del

---

<sup>16</sup> Se refiere al PEA donde no se utiliza la computadora.

tema con las que el alumno se ha de hacer familiar a través de casos sencillos, ya que ello impediría el dominio de las tareas propias del tema.

Se utiliza el programa en esta fase para realizar las tareas propias de temas que ya se suponen dominados.

Los objetivos de la fase de uso y aplicación del tema son: que el alumno compruebe la potencia del tema para resolver problemas más complicados, que entienda a fondo la relación del tema con otros temas y que perciba la utilidad del tema en aplicaciones. Durante esta fase se hace uso pleno del software para todas las tareas en las que resulte conveniente.

Para aplicarlas las ideas anteriores a la Teroga sin riesgos para el aprendizaje de los procesos matemáticos hay que insertarlas en las distintas etapas.

El autor de esta tesis recomienda que durante la fase básica las transferencias se realicen primero con lápiz y papel y solo en la fase de “evaluación del proceso de transferencia”, correspondiente al programa heurístico particular, se use GeoGebra al valorar si existen otros procedimientos para realizar la transferencia. Durante la fase de uso y aplicación se recomienda trabajar primero con lápiz y papel y después con el software, especialmente en tareas de transferencia de contexto extramatemático que requieren de procedimientos complejos.

En el programa de la disciplina Geometría (planes D y E) no se ofrecen recomendaciones a los profesores acerca del uso de este importante medio.

- La evaluación del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones

La evaluación del aprendizaje en la educación superior tiene carácter continuo, cualitativo e integrador y se basa, esencialmente, en el desempeño del alumno durante el PEA (MES, 2007; Horruitiner, 2007).

Las formas de evaluación que se utilizan en el PEA de la Geometría Analítica son: frecuente, parcial y final. Los tipos fundamentales de evaluación parcial son: la prueba parcial, el trabajo extraclase y el encuentro comprobatorio.

La evaluación de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica debe cumplir con las funciones que atribuye la didáctica a este proceso: control, instructiva, educativa, de diagnóstico y de desarrollo (Álvarez y otros, 2014).

La función de control se ejerce mediante el elogio, el estímulo, la exhortación y la crítica que el profesor realiza a sus alumnos y permite que estos se percaten de cuáles son sus avances e insuficiencias y qué nivel han alcanzado en la Teroga.

La función instructiva requiere “establecer con precisión la relación objetivo-evaluación, cuando el alumno se orienta adecuadamente hacia los objetivos tiene clara conciencia de qué es lo esencial [...], que camino debe seguir y como comprobar el grado de eficacia de su actividad.” (Álvarez y otros, 2014, p. 150).

La función educativa se cumple si se logra que cada alumno se comprometa y motive por obtener mejores resultados, sea perseverante y se trace metas superiores. Es importante que el profesor sea justo y actúe con imparcialidad.

La función de diagnóstico se ejerce cuando el profesor obtiene información acerca del cumplimiento de los objetivos, conoce las potencialidades y limitaciones colectivas e individuales en el desempeño de los alumnos, determina las causas de las limitaciones e introduce las correcciones necesarias en el PEA.

La función de desarrollo se cumple si las tareas evaluativas estimulan la inventiva y originalidad y están dirigidas a la zona de desarrollo próximo.

- Caracterización de la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica

Según lo argumentado en este epígrafe 1.2.2, el autor de esta tesis propone un sistema de características que determinan unívocamente la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica. Las características son las siguientes:

1. Constituye uno de los procesos fundamentales de la Geometría Analítica porque los problemas fundamentales de esta disciplina son problemas de transferencia entre representaciones.
2. Es un proceso reversible de modo que a cada transferencia le está asociada su transferencia inversa.
3. Se puede representar simbólicamente, gráficamente y de forma verbal.
4. Para su ejecución el alumno puede utilizar lápiz y papel o un software, aunque el uso del software no presupone renunciar al uso de lápiz y papel.
5. Se presenta en situaciones variadas que están determinadas por varios factores, entre ellos:
  - 1) la relación entre los tipos de los sistemas de coordenadas de la RD y la RB, 2) el tipo del

procedimiento de transferencia, 3) el tipo de la RD y la RB, 4) la relación entre los sistemas de coordenadas de la RD y la RB, y 5) por los medios disponibles para realizar la transferencia.

6. En muchos casos no se realiza con un procedimiento algorítmico necesitando de la aplicación de la heurística.
7. Se presenta frecuentemente en el PEA de la Geometría Analítica.
8. Requiere de planificación a largo, mediano y corto plazos.
9. Tiene una doble significación para la formación del profesor de Matemática: como contenido necesario para comprender las materias del currículo y como parte de la formación matemática del futuro profesor.
10. Ocurre mientras los alumnos resuelven tareas de aprendizaje, lo cual exige elaborar una tipología de tareas que incluya los casos fundamentales que se puedan presentar.
11. Su aprendizaje en el componente académico se produce en forma de habilidad, y en el componente laboral e investigativo se integra con otros conocimientos y habilidades, especialmente con habilidades profesionales.
12. Contribuye a la fijación de los conocimientos y habilidades de la geometría euclidiana y al desarrollo de la comunicación matemática.
13. La evaluación del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones se realiza en los tres componentes del proceso de formación según las formas: frecuente, parcial y final.

- Requisitos de un modelo didáctico de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica

Los fundamentos teóricos expuestos en este capítulo han permitido al autor de esta tesis establecer un sistema de requisitos a tener en cuenta en la estructuración de un modelo didáctico de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica. Los requisitos son los siguientes:

1. Abarcar los tres componentes del proceso de formación del profesional y aprovechar las potencialidades de cada uno para propiciar la transferencia entre representaciones.
2. Prestar atención a todos los componentes del PEA teniendo en cuenta que debe formarse y desarrollarse el concepto de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica y otros conceptos relacionados y que los alumnos deben ser capaces de elaborar procedimientos de transferencia y aplicarlos a la resolución de ejercicios y problemas.
3. Incluir tanto la planificación como la dinámica del PEA de manera que el modelo tenga utilidad práctica para el profesor de Geometría Analítica.

4. Incluir procedimientos didácticos de planificación que le permitan al profesor de Geometría Analítica determinar todos los casos posibles de transferencia a partir de considerar los principales factores derivados de la definición de este concepto y valorar la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura.
5. Elaborar las tareas de aprendizaje teniendo en cuenta como variables de tarea los factores fundamentales de la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica derivados de la definición de este concepto.
6. Tener en cuenta que el PEA de la Geometría Analítica no se reduce a la transferencia entre representaciones y por tanto en el modelo didáctico debe articularse este proceso con el resto de los procesos que integran el PEA.

#### 1.2.3. Estado del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en situación habitual

En esta investigación la variable de estudio es el desempeño del alumno en la Teroga. En la experimentación del modelo didáctico esta tiene la función de variable dependiente y en la evaluación diagnóstica que se expone en este epígrafe solo se analiza como variable de estudio.

El diseño de la medición de la variable de estudio se realizó según el procedimiento propuesto por Ruiz (2006): 1) definición de la variable, 2) determinación de las dimensiones y de los indicadores de cada dimensión, 3) modelación de los indicadores mediante variables estadísticas, 4) establecimiento de los criterios de medición de los indicadores y su representación en matrices de valoración, 5) diseño de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y confiabilidad y 6) diseño de la medición de las dimensiones y de la variable.

La definición del desempeño en la Teroga se expuso en la introducción y se fundamenta en el concepto de desempeño cognitivo introducido por investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (Puig, 2003).

En la investigación se asume que los indicadores son características de la variable de estudio que se pueden medir directamente (Campistrous y Rizo, 2000a), mientras que las dimensiones son características que no se miden directamente porque agrupan varios indicadores los cuales se pueden organizar en dimensiones más específicas llamadas subdimensiones. En la tesis se utilizan indicadores, subdimensiones, dimensiones y variable de estudio (constructo).

Los fundamentos psicológicos para la determinación de las dimensiones de la variable de estudio tienen su origen en las áreas de la personalidad que considera la psicología histórico-cultural, es decir, las áreas cognitivo-instrumental y afectivo-motivacional y el papel de la comunicación en el PEA.

Además de estos fundamentos teóricos, en la determinación de los indicadores, subdimensiones y dimensiones se utilizó el contenido de la sección 1.1, especialmente la definición del concepto de transferencia entre representaciones y la caracterización del concepto de transferencia entre representaciones que se expone en el epígrafe 1.2.2.

Utilizando estos fundamentos teóricos se determinaron las dimensiones del “desempeño del alumno en la Teroga”: dimensión cognitivo-procedimental, dimensión afectivo-motivacional y dimensión comunicacional. Para la dimensión cognitivo-procedimental se determinaron cinco subdimensiones de primer nivel, para cada una de ellas se establecieron subdimensiones de segundo nivel e indicadores. La dimensión comunicacional cuenta solo con subdimensiones de primer nivel e indicadores y la afectivo motivacional solo con indicadores (Anexo 4).

Para la determinación de los indicadores de la primera dimensión se tuvieron en cuenta todos los componentes del proceso de formación y las acciones a ejecutar por los alumnos en la solución de las tareas de aprendizaje propias de cada uno de los componentes.

Una vez determinados los indicadores se modelaron estos mediante variables estadísticas cuyo dominio de variación es un continuo (Junker, 1999), se determinaron sus escalas de medición y se elaboraron las matrices de valoración (Anexo 5) para representar los criterios de medición a partir de los cuales se interpretan cualitativamente los resultados cuantitativos de la medición.

Como instrumentos de medición se utilizaron una prueba pedagógica (Anexo 3) y una guía de observación (Anexo 2) las cuales fueron sometidas a evaluación de validez y confiabilidad. La prueba se elaboró teniendo en cuenta algunos indicadores de la dimensión cognitivo-procedimental y los objetivos del programa de la asignatura. La guía de observación se elaboró teniendo en cuenta indicadores del resto de las dimensiones. La observación se aplicó en clases prácticas en que se resolvían tareas que exigían Teroga.

En la evaluación diagnóstica no se midieron todos los indicadores de la variable de estudio porque en la situación habitual del PEA de la Geometría Analítica hay indicadores que no se han tenido en cuenta, pues este ha estado centrado en el componente académico.

La medición de las dimensiones y del constructo se realizó utilizando un índice para obtener el valor de las variables de dimensiones a partir de los valores de las variables de indicadores y el valor de la variable de constructo a partir de los valores de las variables de dimensiones, se utilizaron coeficientes de ponderación para cada indicador y dimensión (Anexo 6). Obtenido el valor de cada índice se utilizó una escala de cinco valores (muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto) para expresar los resultados de la medición del constructo (Anexo 7).

Se determinó también el índice promedio para cada indicador, dimensión y constructo el cual pertenece al intervalo [0,100].

La muestra para la medición la integraron 20 alumnos del tercer año de la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física (Anexo 8).

Los indicadores con mayor índice promedio son:

- Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor (62,5), en este caso 10 (50%) de los 20 alumnos de la muestra respondieron las interrogantes formuladas, 5 (25%) responden con dificultades y 5 (25%) no lo hicieron.
- Actitud ante las críticas (50), pues 5 (25%) alumnos aceptaron las críticas y se esforzaron por corregir los errores cognitivos, 10 (50%) aceptaron las críticas, pero en ocasiones no se esforzaron por corregir los errores y 5 (25%) no aceptaron las críticas o no se esforzaron por corregir los errores.
- Interés por resolver las tareas de las clases prácticas (50), debido a que 5 (25%) alumnos comenzaron a resolver las tareas cuando el profesor las orientó sin necesidad de impulsos, 10 (50%) necesitaron impulsos para comenzar a resolverlas y 5 (25%) no comenzaron a resolver las tareas aunque recibieron impulsos.

Los indicadores con menor índice promedio son<sup>17</sup>:

- Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado (17,5), debido a que 2 (10%) alumnos comprobaron y explicaron correctamente, 3 (15%) comprobaron correctamente, pero la explicación fue incompleta y 15 (75%) no comprobaron o la explicación fue incorrecta.
- Determinación de si la representación obtenida es única (26,7), porque 2 (10%) alumnos determinaron si la representación era única y argumentaron, 4 (20%) ofrecieron una

---

<sup>17</sup> Los tres primeros corresponden a la subdimensión “Resolución de ejercicios cuya finalidad es la transferencia”.

argumentación incompleta, 2 (10%) no argumentaron y 12 (60%) no comprobaron ni argumentaron correctamente.

- Ejecución del procedimiento con lápiz y papel (30), pues 3 (15%) alumnos lo ejecutaron correctamente, 2 (10%) cometieron solo errores de cálculo, 5 (25%) cometieron errores no relativos al cálculo, pero obtuvieron una representación del mismo tipo y forma que la buscada y 10 (50%) no ejecutaron el procedimiento o lo hicieron de forma incorrecta.
- Atención prestada a las explicaciones de los compañeros de clase (30), debido a que 2 (10%) alumnos atendieron de forma voluntaria, 8 (40%) atendieron solo cuando el profesor lo solicitó y 10 (50%) no atendieron aunque el profesor lo solicitara.

El índice promedio de la dimensión cognitivo-procedimental es 31,3, el de la afectivo-motivacional 44,4 y el de la comunicacional es 40. El correspondiente al constructo es 36,7 que se ubica en la categoría “bajo”. En el Anexo 8D se muestra la distribución de frecuencias de las dimensiones y el constructo.

En el proceso de diagnóstico se identificaron como tipos fundamentales de errores cognitivos cometidos por los alumnos en la Teroga los siguientes:

- Desconocimiento del procedimiento de transferencia.
- Subdeterminación de la representación: utilización de representaciones verbales que no determinan de forma única al objeto geométrico.
- Sobredeterminación de la representación: inclusión en la representación verbal del objeto de características no necesarias.
- Determinación de una representación incompatible: representación de un objeto geométrico que no corresponde a la representación dada.
- Errores algebraicos al realizar transformaciones en las ecuaciones.
- Otros errores: incluyen errores de cálculo al determinar coordenadas de puntos que satisfacen la ecuación de un lugar geométrico y el uso de datos que no se corresponden con las condiciones de la tarea.

### Conclusiones del capítulo

El contenido del capítulo permite plantear las conclusiones siguientes:

- En la teoría de las representaciones existen tres conceptos centrales que son los de representación, transferencia entre representaciones y sistema de representación. Aunque estos conceptos han sido analizados y utilizados por varios autores cubanos y extranjeros, en esta tesis ha sido necesario contextualizarlos en el PEA de la Geometría Analítica y

reconceptualizarlos y para ello han resultado muy útiles ideas expuestas por Kaput acerca de las entidades a tener en cuenta en la representación de los objetos matemáticos.

- En las fuentes bibliográficas consultadas se suelen utilizar indistintamente los conceptos de forma de representación y tipo de representación y en algunas fuentes se utilizan indistintamente los conceptos de forma de representación y sistema de representación. En esta tesis se asume que estos tres conceptos no son idénticos y cada uno tiene una función diferente en la teoría de las representaciones.
- El análisis de distintos significados del concepto transferencia, permitió al autor de esta tesis caracterizar la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica, con el propósito de elaborar un modelo didáctico de este proceso.
- Los alumnos diagnosticados mostraron aciertos en algunos indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional, y presentaron dificultades en su desempeño en la transferencia entre representaciones en indicadores de la dimensión cognitivo-procedimental.
- En la bibliografía consultada sobre didáctica de la Matemática, se concede gran importancia al trabajo con las representaciones en el PEA de esta disciplina. Sin embargo, la concepción del programa de la disciplina Geometría y de la asignatura Geometría Analítica para la formación inicial de profesores de Matemática en los planes D y E, no se corresponde con las necesidades actuales de esta formación en lo concerniente al tratamiento de las representaciones y la transferencia entre ellas.
- En los fundamentos teóricos desarrollados por el autor se resuelven las carencias teóricas de la didáctica de la Geometría señaladas en la introducción.

II: MODELO DIDÁCTICO DE LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

## CAPÍTULO II: MODELO DIDÁCTICO DE LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

En este capítulo se expone el modelo didáctico concebido por el autor como solución al problema científico declarado en la introducción. En su estructuración se han tenido en cuenta ideas de Valle (2007, 2012) acerca del concepto de modelo didáctico, sus componentes y de las acciones a ejecutar para su elaboración, puntos de vista de Ruiz (2007) en torno a la organización de los componentes de un modelo didáctico, criterios obtenidos en la socialización de diferentes versiones del modelo en eventos científicos, talleres e intercambios profesionales, criterios de los expertos que opinaron sobre la calidad de una de las versiones del modelo y los resultados en su implementación experimental.

El modelo se ha estructurado en los tres componentes siguientes: 1) presentación general, 2) concepción de la planificación y 3) concepción de la dinámica, los cuales incluyen componentes considerados por Valle (2007) tales como el objetivo, las formas de implementación y las formas de evaluación, pero organizados teniendo en cuenta los fundamentos teóricos del PEA y de la formación del profesional asumidos en la tesis.

En la presentación general del modelo se ha incluido su definición, precisión de los fundamentos teóricos<sup>18</sup> en que se basa, su objetivo, descripción general de la concepción de la planificación de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica, descripción general de la concepción de la dinámica de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica y representación gráfica del modelo.

En la concepción de la planificación se incluyen las acciones fundamentales relativas a la planificación a largo, mediano y corto plazos de la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica teniendo en cuenta los tres componentes del proceso de formación y todos los componentes del PEA.

---

<sup>18</sup> Los fundamentos teóricos del modelo no se incluyen en sus componentes (Valle, 2007), sino que se tienen en cuenta en su conformación.

En la concepción de la dinámica se incluyen las acciones fundamentales de la ejecución de la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica en correspondencia con la concepción de la planificación.

### 2.1. Presentación general del modelo

En esta tesis se entiende por modelo didáctico de la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática, una representación que interpreta, diseña y ajusta este proceso de transferencia mediante la concreción de sus características esenciales expuestas en el capítulo I, en términos de su concepción en la planificación del PEA y su ejecución en el transcurso de las etapas que representan su dinámica en los tres componentes del proceso de formación (Fig.3).

El modelo interpreta el proceso de transferencia porque parte de sus características esenciales, lo diseña al proyectar la concreción de estas características y lo ajusta al adaptarlo a las condiciones concretas del PEA de la Geometría Analítica con el propósito de perfeccionarlo.

Este modelo se basa en los fundamentos teóricos expuestos en el capítulo I, sustentados en la psicología histórico-cultural, la filosofía marxista-leninista, la pedagogía, la didáctica general y la didáctica de la Matemática desarrolladas en Cuba y la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos. Particularmente el modelo se basa en los “principios didácticos dirigidos a un proceso de enseñanza-aprendizaje que instruya, eduque y desarrolle” (Silvestre y Zilberstein, 2002) y tiene como objetivo contribuir a potenciar la transferencia entre representaciones en los tres componentes del proceso de formación correspondientes al PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.

La idea esencial del modelo es que la transferencia entre representaciones reciba un tratamiento especial en la planificación y dinámica del PEA de la Geometría Analítica por parte del profesor y que este proceso juegue un papel importante en el aprendizaje de los alumnos como parte de su formación geométrica para su futuro desempeño como profesores de Matemática del nivel medio y para el estudio de otras disciplinas de la carrera.

En el modelo se concibe que la dinámica de la transferencia entre representaciones se estructure con un enfoque en el que se aplique la heurística una vez que los alumnos se hayan apropiado de este concepto de transferencia.

Desde esta perspectiva se asume que las fases de la dinámica de la Teroga en el componente académico transcurren según las funciones didácticas analizadas en el capítulo I. Estas fases

son las siguientes: 1) formación y desarrollo del concepto de transferencia entre representaciones, conceptos auxiliares y conceptos subordinados, 2) elaboración del Programa Heurístico para la Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica (PH- Teroga), 3) aplicación del PH- Teroga y 4) aplicación de procedimientos de transferencia.

La Teroga en el componente laboral e investigativo del PEA de la Geometría Analítica está estructurada en torno a la resolución de tareas que integran este proceso con habilidades profesionales. Se concibe que la Teroga se incluya explícitamente en las actividades en que el profesor de Geometría Analítica interactúa en el mismo espacio con todos los alumnos del grupo, en las actividades que los alumnos desarrollan con la supervisión del tutor en la escuela y en la autopreparación que estos realizan.

En la representación gráfica del modelo las flechas continuas representan relaciones diacrónicas y las discontinuas relaciones sincrónicas. Existe una relación diacrónica entre dos procesos cuando uno antecede al otro en el tiempo. En la representación de esta relación con una flecha, el origen de la flecha está en el proceso que ocurre primero.

Existe una relación sincrónica entre dos procesos cuando estos ocurren a la vez en ciertos momentos. Si uno se inicia primero que el otro, en la representación de esta relación con una flecha, el origen de la flecha está en el proceso que se inicia cuando el otro está ocurriendo.

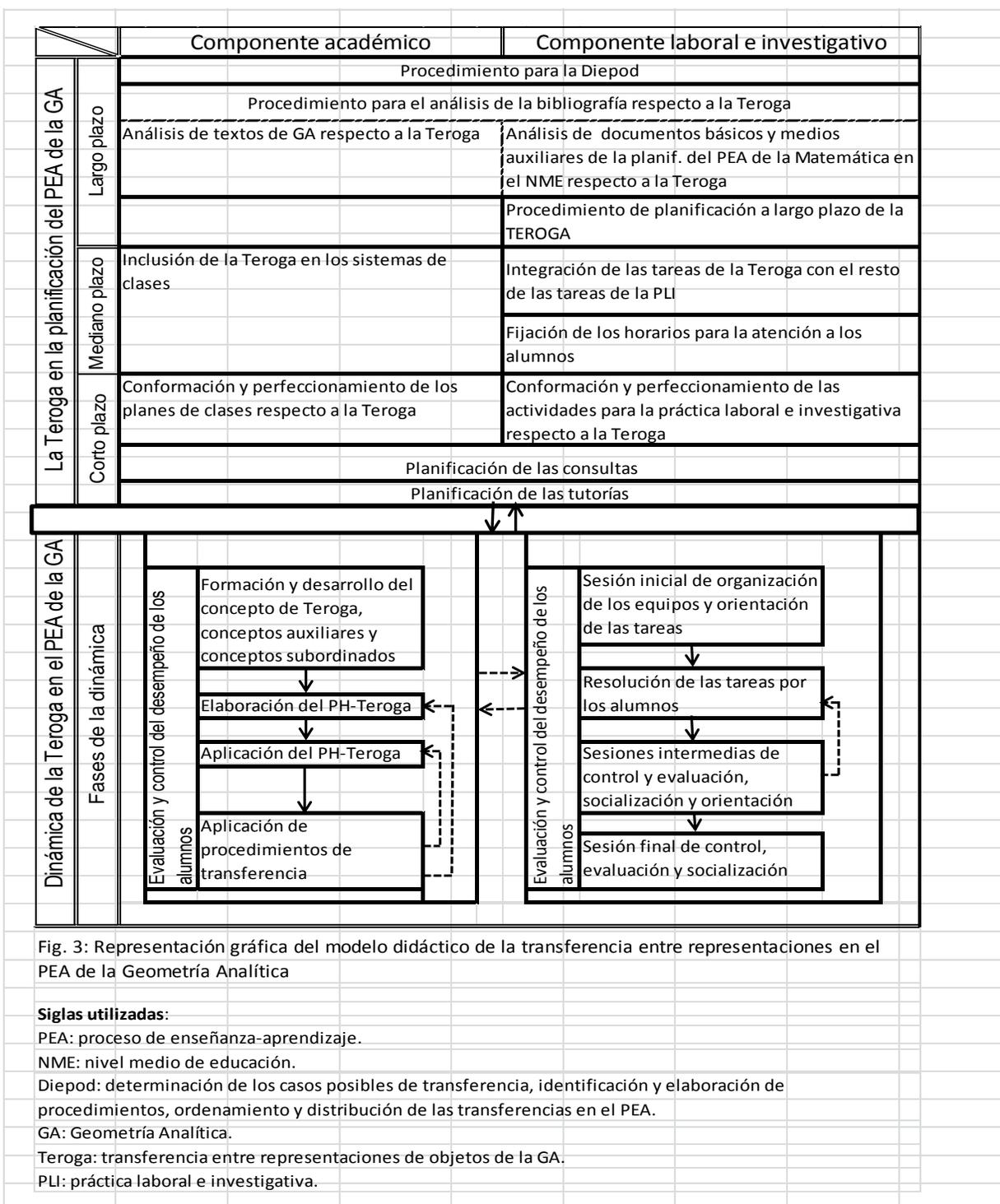


Fig. 3: Representación gráfica del modelo didáctico de la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica

**Siglas utilizadas:**

PEA: proceso de enseñanza-aprendizaje.

NME: nivel medio de educación.

Diepod: determinación de los casos posibles de transferencia, identificación y elaboración de procedimientos, ordenamiento y distribución de las transferencias en el PEA.

GA: Geometría Analítica.

Teroga: transferencia entre representaciones de objetos de la GA.

PLI: práctica laboral e investigativa.

## 2.2. Planificación de la transferencia entre representaciones

Esta sección contiene procedimientos para la planificación a largo plazo de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica en cada uno de los componentes del proceso de formación del profesional.

En la sección se exponen, también, las acciones esenciales de la planificación a corto y mediano plazos para los componentes académico y laboral e investigativo y sus resultados fundamentales.

### 2.2.1. Planificación a largo plazo

El programa de la asignatura y el plan calendario (P-1) encabezan la lista de los documentos fundamentales de la planificación a largo plazo de una asignatura en la Educación Superior Cubana.

El programa contiene los objetivos generales a lograr en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura en los componentes académico y laboral e investigativo; las formas organizativas del PEA y tipos de clases por temas de la asignatura; el fondo de tiempo por temas, los contenidos básicos (conocimientos esenciales, habilidades y valores) por temas; las indicaciones metodológicas y de organización (incluye las actividades para el componente laboral e investigativo); el sistema de evaluación y la bibliografía.

El plan calendario de la asignatura es un documento de planificación a largo plazo que contiene la distribución y ordenamiento de los contenidos por formas de organización del PEA con énfasis en su componente académico.

El programa y el plan calendario constituyen puntos de partida para la dirección del PEA por el profesor, pero deben ser complementados con los resultados del análisis didáctico de sus componentes. En el caso específico de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica es muy importante disponer de todas las posibles transferencias que el programa de la asignatura incluye explícita e implícitamente, determinar procedimientos a utilizar en cada una de ellas y distribuir las por formas de organización del PEA y tipos de clase. También es de gran importancia realizar un análisis de la bibliografía recomendada por el programa para identificar las potencialidades e insuficiencias de esta.

En este epígrafe se exponen procedimientos de análisis didáctico y planificación con cuya aplicación se logró el perfeccionamiento del programa de la asignatura y del P-1. La exposición de cada procedimiento incluye sus operaciones y las condiciones de partida.

- Determinación de los casos posibles de transferencia, identificación y elaboración de procedimientos, ordenamiento y distribución de las transferencias en el PEA (Diepod)

El estudio de la Teroga requiere que en la planificación a largo plazo de su PEA el profesor disponga de todos los casos posibles de transferencia y de al menos un procedimiento de su

realización para cada caso de modo que pueda ordenarlas y distribuirlas por formas de organización de este proceso y tipos de clase. Como no se disponía de ningún procedimiento para dar respuesta a esa necesidad, el autor de esta tesis elaboró uno que se ejemplifica en este epígrafe con el plano. El procedimiento se aplicó al resto de los objetos geométricos más importantes generándose un novedoso y voluminoso material didáctico (Quero y Ruiz, 2015a, 2016a, 2016b, 2017, 2018).

El procedimiento se aplica para la Diepod a cada objeto de la Geometría Analítica y está dirigido a los objetivos siguientes: 1) determinar todos los casos posibles de transferencia entre representaciones del objeto, 2) identificar los procedimientos de transferencia disponibles en la bibliografía, crear otras variantes de estos y elaborar procedimientos para los casos de transferencias que la bibliografía no trata (en todos los casos teniendo en cuenta dos variantes: uso de lápiz y papel o uso del software GeoGebra), 3) ordenar las transferencias para su estudio y 4) distribuirlas por formas de organización del PEA y tipos de clase.

Son condiciones de partida para aplicar el procedimiento disponer del modelo del profesional, del programa de la disciplina Geometría, del programa de la asignatura Geometría Analítica, de las fuentes bibliográficas de geometría analítica recomendadas por el programa de la asignatura y de otras fuentes bibliográficas que traten el contenido y pudieran complementar a estas últimas.

Operaciones o fases del procedimiento:

- 1) Identificar los tipos de sistemas de coordenadas en que se debe representar el objeto en el PEA.
- 2) Determinar los tipos de representación del objeto para cada tipo de sistema de coordenadas.
- 3) Determinar las formas de las representaciones de cada tipo.
- 4) Determinar los casos de las transferencias intratipo y de transferencias intertipos en el mismo sistema de coordenadas.
- 5) Determinar los casos de las transferencias intersistemas (según exigencias del programa de la asignatura).
- 6) Investigar para cuáles casos de transferencias se expone algún procedimiento en la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura (con lápiz y papel o con el uso de software).

7) Elaborar procedimientos para aquellas transferencias que en la bibliografía no se expone ningún procedimiento y analizar la existencia de procedimientos alternativos de los expuestos en la bibliografía (con lápiz y papel y con el uso de software).

8) Ordenar las transferencias para su estudio en el PEA.

9) Distribuir las transferencias por formas de organización (FO) del PEA y tipos de clase.

A continuación se explican cada una de las fases del procedimiento y se ejemplifican utilizando como objeto el plano (en el Anexo 9 se explican para la recta en el plano).

1) Identificar los tipos de sistemas de coordenadas en que se debe representar el objeto en el PEA.

En esta operación se identifican los tipos de sistemas de coordenadas (analizados en el capítulo I) en los que se debe representar el objeto en el PEA. Estos tipos dependen de la dimensión del espacio que incluye al objeto. Si la dimensión del espacio es dos, hay dos posibles tipos de sistemas de coordenadas: cartesiano y polar. Si la dimensión del espacio es tres, hay tres posibles tipos: cartesiano, cilíndrico y esférico.

En el caso del plano el espacio de inclusión del objeto es de dimensión tres. En el programa de la asignatura solo se exige la representación del plano en sistemas de coordenadas cartesianas. Los sistemas de coordenadas esféricas y cilíndricas solo se utilizan para representar planos en casos de regiones limitadas por planos y cuádricas en el PEA del Análisis Matemático.

2) Determinar los tipos de representación del objeto para cada tipo de sistema de coordenadas.

Como resultado de esta operación han de quedar determinados los tipos de representación (verbal, gráfica, analítica) a utilizarse para el objeto en cada tipo de sistema de coordenadas.

Según el programa de la asignatura Geometría Analítica para el plano (en coordenadas cartesianas) deben utilizarse representaciones verbales, gráficas y analíticas.

3) Determinar las formas de las representaciones de cada tipo.

En esta operación se determinan las formas de las representaciones de cada tipo según la conceptualización del capítulo I.

En el programa de la asignatura Geometría Analítica se establecen las formas<sup>19</sup> de las representaciones del plano por tipo (Tabla 1).

---

<sup>19</sup>Se hace referencia solo a las formas de representación analítica estudiadas en el curso y a las más conocidas de las representaciones verbales.

Tipo de representación	Forma de representación
Representación verbal	1) Frase con tres puntos no alineados, 2) frase con un punto del plano y un vector normal, 3) frase con un punto del plano y dos vectores de dirección, 4) frase con un punto del plano y una recta que no pasa por el punto, 5) frase con dos rectas que se cortan y 6) frase con dos rectas paralelas diferentes.
Representación analítica	1) Sistema de ecuaciones paramétricas y 2) ecuación general.
Representación gráfica	Es única para cada sistema de coordenadas.

4) Determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos en el mismo sistema de coordenadas.

Esta operación está dirigida a determinar todos los casos posibles de transferencias intratipo e intertipos según la conceptualización del capítulo I. Las transferencias se representan en la forma basada en flecha y vértices y su número se calcula aplicando el principio de multiplicación de la teoría combinatoria. A continuación se exponen los casos posibles para el plano:

4a) Casos posibles de transferencias entre representaciones verbales de un plano.

Aplicando el principio de multiplicación de la teoría combinatoria se obtienen 30 casos posibles de transferencia entre representaciones del tipo verbal (Tabla 2).

RD: TP	RD: PVD	RD: PVN	RD: PR	RD: RRC	RD: RRP
1) TP→PVD	6) PVD→TP	11) PVN→TP	16) PR→TP	21) RRC→TP	26) RRP→TP
2) TP→PVN	7) PVD→PVN	12) PVN→PVD	17) PR→PVD	22) RRC→PVD	27) RRP→PVD
3) TP→PR	8) PVD→PR	13) PVN→PR	18) PR→PVN	23) RRC→PVN	28) RRP→PVN
4) TP→RRC	9) PVD→RRC	14) PVN→RRC	19) PR→RRC	24) RRC→PR	29) RRP→PR
5) TP→RRP	10) PVD→RRP	15) PVN→RRP	20) PR→RRP	25) RRC→RRP	30) RRP→RRC
Etiquetas:					
TP: plano representado verbalmente utilizando tres puntos.					
PVD: plano representado verbalmente por un punto y dos vectores de dirección.					
PVN: plano representado verbalmente por un punto y un vector perpendicular.					
PR: plano representado verbalmente por un punto y una recta que no pasa por el punto.					
RRC: plano representado verbalmente por dos rectas que se cortan.					
RRP: plano representado verbalmente por dos rectas paralelas diferentes.					

Los casos en que interviene una recta se desdoblan en nuevos casos según la forma de representación de la recta.

4b) Casos posibles de transferencias entre representaciones analíticas de un plano.

Con razonamientos análogos a los realizados para el caso de representaciones verbales resulta que existen dos casos de transferencias entre representaciones analíticas. Si se denota por EP la representación paramétrica del plano y por EG su ecuación general, las posibles transferencias son: 31) EP→EG y 32) EG→EP.

4c) Casos posibles de transferencias intertipos a partir de una representación verbal de un plano.

Si se aplica el mismo razonamiento a las transferencias en que la representación dada es verbal y la buscada es analítica, resultan 12 casos posibles (Tabla 3).

Tabla 3: Casos posibles de transferencia de una representación verbal a una analítica					
RD: TP	RD: PVD	RD: PVN	RD: PR	RD: RRC	RD: RRP
33) TP→EP	35) PVD→EP	37) PVN→EP	39) PR→EP	41) RRC→EP	43) RRP→EP
34) TP→EG	36) PVD→EG	38) PVN→EG	40) PR→EG	42) RRC→EG	44) RRP→EG
Etiquetas: Se utilizan las etiquetas de la Tabla 2 y de las transferencias 31 y 32.					

Como existe una única representación gráfica de un plano para cada sistema de coordenadas, existen seis casos posibles de transferencia de una representación verbal a una gráfica. Si se denota la representación gráfica por G, estos son los casos: 45) TP→G, 46) PVD→G, 47) PVN→G, 48) PR→G, 49) RRC→G y 50) RRP→G.

4d) Casos de transferencias intertipos a partir de una representación analítica de un plano.

Hay 12 casos posibles de transferencias donde la RD es analítica y la RB es verbal (Tabla 4).

Tabla 4: Casos posibles de transferencia de una representación analítica a una verbal			
RD: EP		RD: EG	
51) EP→TP	54) EP→PR	57) EG→TP	60) EG→PR
52) EP→PVD	55) EP→RRC	58) EG→PVD	61) EG→RRC
53) EP→PVN	56) EP→RRP	59) EG→PVN	62) EG→RRP
Etiquetas: Se utilizan las etiquetas de la Tabla 2 y de las transferencias 31 y 32.			

Existen dos casos posibles de transferencia de una representación analítica a una gráfica. Utilizando las etiquetas introducidas, estos son: 63) EG→G y 64) EP→G.

4e) Casos posibles de transferencias a partir de la representación gráfica de un plano.

Existen seis casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es verbal. Estos son: 65) G→TP, 66) G→PVD, 67) G→PVN, 68) G→PR, 69) G→RRC y 70) G→RRP.

Existen dos casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es analítica. Estos son: 71)  $G \rightarrow EP$  y 72)  $G \rightarrow EG$ .

5) Determinar los casos de las transferencias intersistemas.

En esta operación se determinan las transferencias intersistemas de coordenadas que exige el programa de la asignatura según la conceptualización del capítulo I.

En el caso del plano el programa de la asignatura solo exige representaciones en un mismo sistema de coordenadas cartesianas de modo que no deben estudiarse transferencias intersistemas.

6) Investigar para cuáles casos de transferencias se expone algún procedimiento en la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura.

Esta operación se enmarca en el análisis de la bibliografía de geometría analítica que recomienda el programa de la asignatura. Se trata de identificar en cada fuente bibliográfica cuáles de las transferencias se tratan, si se expone algún procedimiento para realizarlas con lápiz y papel o con ayuda de un software y el nivel de profundidad de la exposición del procedimiento.

En el caso del plano, de los 72 casos posibles de transferencias descritas en la tercera operación del procedimiento solo se expone algún procedimiento, con lápiz y papel, en la bibliografía recomendada para las 8 identificadas con los números: 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 y 64.

Para las transferencias de la 65 a la 72 la existencia de los procedimientos depende de la información que se pueda obtener del gráfico.

En las que se ha identificado algún procedimiento se observan como limitaciones que en todos los casos los medios utilizados son lápiz y papel y en la mayoría de ellos no se describe el procedimiento, sino que se presenta en el proceso de resolución de una tarea de aprendizaje.

7) Elaborar procedimientos para aquellas transferencias que en la bibliografía no se expone ningún procedimiento y analizar la existencia de procedimientos alternativos de los expuestos en la bibliografía.

Esta operación está dirigida a complementar la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura en lo que respecta a la transferencia entre representaciones mediante la elaboración de los procedimientos inexistentes en ella.

El autor de esta tesis elaboró 64 procedimientos de transferencia, con lápiz y papel, que corresponden a las identificadas con las etiquetas: 1-30, 39-63 y 65-72.

Se elaboraron procedimientos de transferencia con GeoGebra para las identificadas con las etiquetas: 1-31, 34, 36, 38, 40, 42, 44-72.

#### 8) Ordenar las transferencias para su estudio en el PEA.

Esta operación se enmarca en la secuenciación de los contenidos para su estudio. Se trata de ordenar los procedimientos teniendo en cuenta su nivel de complejidad para su apropiación por los alumnos.

Las transferencias entre representaciones del plano se han agrupado para su ordenamiento en tres clases, según el tipo de la representación dada. En cada clase se ha establecido un orden considerando la forma de la representación buscada y la complejidad de los procedimientos de transferencia con lápiz y papel (Tabla 5).

Tabla 5: Ordenamiento de las transferencias según el tipo de la representación dada y la complejidad de los procedimientos

Tipo de RD: verbal			Tipo de RD: analítica	Tipo de RD: gráfica
35) PVD→EP	49) RRC→G	15) PVN→RRP	31) EP→EG	65) G→TP
33) TP→EP	50) RRP→G.	16) PR→TP	32) EG→EP	66) G→PVD
37) PVN→EP	1) TP→PVD	17) PR→PVD	51) EP→TP	67) G→PVN
39) PR→EP	2) TP→PVN	18) PR→PVN	52) EP→PVD	68) G→PR
41) RRC→EP	3) TP→PR	19) PR→RRC	53) EP→PVN	69) G→RRC
43) RRP→EP	4) TP→RRC	20) PR→RRP	54) EP→PR	70) G→RRP.
38) PVN→EG	5) TP→RRP	21) RRC→TP	55) EP→RRC	71) G→EP
36) PVD→EG	6) PVD→TP	22) RRC→PVD	56) EP→RRP	72) G→EG
34) TP→EG	7) PVD→PVN	23) RRC→PVN	57) EG→TP	
40) PR→EG	8) PVD→PR	24) RRC→PR	58) EG→PVD	
42) RRC→EG	9) PVD→RRC	25) RRC→RRP	59) EG→PVN	
44) RRP→EG	10) PVD→PRP	26) RRP→TP	60) EG→PR	
45) TP→G	11) PVN→TP	27) RRP→PVD	61) EG→RRC	
46) PVD→G	12) PVN→PVD	28) RRP→PVN	62) EG→RRP	
47) PVN→G	13) PVN→PR	29) RRP→PR	63) EG→G.	
48) PR→G	14) PVN→RRC	30) RRP→RRC	64) EP→G	

#### 9) Distribuir las transferencias por formas de organización del PEA y tipos de clase

En esta operación el profesor distribuye las transferencias por formas de organización del PEA para su futuro estudio por los alumnos. En vista de que el número de transferencias puede ser

grande, se debe decidir cuáles se tratarán en clase y cuáles en otras formas de organización del PEA.

El número de transferencias entre representaciones del plano no permite que todas sean tratadas en clases, por lo que es recomendable aprovechar las posibilidades que ofrecen la autopreparación, la práctica laboral de los alumnos como formas organizativas del PEA y el trabajo extraclase, como tipo de evaluación parcial (Tabla 6).

En la distribución es deseable que en las conferencias se traten transferencias: entre representaciones verbales, entre representaciones analíticas, intertipos a partir de una representación verbal, intertipos a partir de una representación analítica y a partir de una representación gráfica.

Tabla 6: Distribución de las transferencias entre representaciones del plano por FO del PEA y tipos de clase	
FO/tipo de clase	Transferencias
Conferencias C-1	31, 32, 33,34, 35 y 36.
C-2	63, 65, 66, 71 y 72.
Clases prácticas	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, 12, 13, 14 y 15.
CP-1 y CP-2	45, 46, 47, 48, 64, 67, 68, 69, 70, 71 y 72.
Autopreparación	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 37, 38, 57, 58, 59, 60, 67 y 68.
Trabajo extraclase	26, 27, 28, 29, 30, 39, 41, 43, 51, 52, 53, 54, 55 y 56.
1. La autopreparación incluye la que se realiza previa a la clase práctica y la posterior a esta. 2. El trabajo extraclase puede ser diferenciado, por lo que cada alumno no tendrá que realizar todas las transferencias	

- Análisis de la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura respecto a la Teroga

Este análisis se divide en dos fases: la primera se centra en textos de geometría analítica y la segunda en documentos básicos y medios auxiliares de la planificación del PEA de la Matemática en el nivel medio de educación.

#### 1) Análisis de los textos de geometría analítica.

En esta fase el profesor analiza cada texto de geometría analítica de la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura examinando tanto su exposición teórica como las tareas para la fijación de los conocimientos y el desarrollo de habilidades.

Una condición de partida obligatoria para el análisis de los textos es disponer de todas las posibles transferencias entre representaciones de los objetos geométricos cuyo estudio se prevé en el programa.

El análisis de la exposición teórica del texto debe centrarse en: 1) identificar los objetos geométricos del contenido del programa que se tratan, los tipos y formas de representación utilizadas para estos objetos por tipo de sistema de coordenadas, las transferencias entre representaciones que se exponen y si estas se ejemplifican, si se describen los procedimientos o se realiza alguna otra representación de las transferencias que se exponen y si en estas se utiliza algún software y 2) valorar las potencialidades e insuficiencias de la exposición teórica del texto con respecto a las exigencias del programa referidas a la Teroga, incluido el uso de la terminología propia del trabajo con representaciones.

El análisis de las tareas del texto para la fijación de los conocimientos y el desarrollo de habilidades ha de centrarse en: 1) determinar la correspondencia entre las posibles transferencias entre representaciones de cada objeto geométrico y las tareas del texto, 2) identificar si en la resolución de las tareas se exige el uso de algún software, especialmente GeoGebra y 3) valorar las potencialidades e insuficiencias de las tareas propuestas en el texto respecto a las exigencias del programa. La relación entre transferencias y tareas se puede representar en una tabla.

En la asignatura Geometría I (Geometría Analítica) se estudia la recta en el plano y en el espacio, el plano, las secciones cónicas y las superficies cuádricas. Para la ejemplificación se ha realizado un doble muestreo: primero de los libros y después de un objeto geométrico del libro seleccionado. Si se selecciona el texto Kletenik (1967) y el plano como objeto geométrico, como resultado del análisis se obtiene una caracterización de la exposición teórica y de las tareas:

Caracterización de la exposición teórica<sup>20</sup>:

Los tipos de representación que se utilizan son el verbal y el analítico. Las formas de las representaciones verbales son: plano representado verbalmente utilizando tres puntos, plano representado verbalmente por un punto y dos vectores de dirección, plano representado verbalmente por un punto y un vector perpendicular, plano representado verbalmente por un

---

<sup>20</sup> Este libro es un texto de ejercicios y problemas; su exposición teórica es sintética y breve.

punto y una recta que no pasa por el punto y plano representado verbalmente por dos rectas paralelas. Las rectas se representan por sus ecuaciones paramétricas, canónicas y generales.

La forma de representación analítica utilizada, para el plano, es la general.

La exposición teórica del texto es muy breve y no se presentan las transferencias entre representaciones y por ello tampoco se ejemplifican ni se describen los procedimientos de transferencia. En el libro no se utilizan los términos transferencia entre representaciones, ni sistema de representación y la palabra representación solo se utiliza para referirse a las representaciones gráficas. Estas características del texto constituyen limitaciones para su utilización con el propósito de estudiar el contenido relativo a las representaciones y la transferencia entre ellas.

Análisis de las tareas:

El resultado del análisis de la correspondencia entre las posibles transferencias entre representaciones del plano y las tareas del texto se muestra en el Anexo 10.

Las tareas propuestas exigen transferencia en que la RD es verbal y la RB es la ecuación general del plano, pero no existen tareas para el resto de las transferencias, ni se exige el uso de software en el proceso de transferencia.

2) Análisis de documentos básicos y medios auxiliares de la planificación del PEA de la Matemática en el nivel medio de educación respecto a la Teroga.

Son condiciones de partida disponer de los programas y libros de textos de Matemática del nivel medio de educación.

Uno de los documentos básicos de la planificación del PEA de la Matemática en el nivel medio de educación que se debe analizar es el programa de Matemática de undécimo grado porque es en este grado donde se incluye explícitamente por primera vez el estudio de la Geometría Analítica. El análisis debe centrarse en: 1) identificar las unidades en que se estudian contenidos de Geometría Analítica, los objetos geométricos del contenido, los tipos y formas de representación para estos objetos, las transferencias entre representaciones y los objetivos que se plantean respecto a las representaciones y transferencias entre ellas y 2) valorar la relación entre objetivos y contenidos del programa de Matemática de undécimo grado con los del programa de Geometría Analítica de la carrera en términos de objetos geométricos, formas, tipos de representación y transferencias a realizar. La relación entre ambos programas para cada objeto geométrico puede representarse en una tabla.

El análisis del programa de Matemática de undécimo grado, permitió identificar que la Geometría Analítica se estudia en las unidades “Geometría Analítica de la Recta en el Plano” y “Curvas de Segundo Grado. Secciones Cónicas” y que los objetos geométricos a estudiar son la recta en el plano, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

Para la recta en el plano, el objetivo referido a las representaciones y las transferencias entre ellas es resolver ejercicios de aplicación que requieran hallar ecuaciones de rectas, el cual incluye las transferencias a las formas analíticas de representación de la recta en el plano.

Las formas para el tipo verbal que se identifican son la determinada por dos puntos y por un punto y la pendiente. Las formas analíticas son la ecuación general y la ecuación con un punto y la pendiente.

En el programa no se explicitan todas las posibles transferencias a realizar, pero se pueden identificar transferencias donde la RD es verbal y la RB es analítica, la RD es analítica y la RB es gráfica y viceversa.

La relación entre ambos programas para la recta se muestra en el Anexo 11.

Entre los medios auxiliares de la planificación se encuentra el libro de texto de la asignatura en el grado, el cual debe ser analizado con el objetivo de valorar: 1) si se describen y ejemplifican los procedimientos para las transferencias contenidas en el programa, 2) la relación con el programa en cuanto a si los ejercicios que contiene cubren los objetivos y contenidos referidos a la transferencia entre representaciones y 3) si se proponen ejercicios que exigen transferencia entre representaciones con el uso de software, especialmente GeoGebra.

El estudio del libro de texto de la asignatura para el grado permitió identificar ejemplos y ejercicios de transferencia<sup>21</sup>, para la recta en el plano, que se corresponden con las identificadas con los números: 20, 21, 29 y 30 en el Anexo 9.

En el texto se describen procedimientos para realizar estas transferencias con lápiz y papel, pero no se describen procedimientos para ejecutarlas con el uso del software GeoGebra.

Existen seis transferencias a las que no corresponden ejercicios, lo cual dificulta la fijación de los procedimientos de transferencia. Estas transferencias corresponden a las etiquetadas con los números: 16, 18, 48, 49, 55, 56 en el Anexo 9.

No se proponen ejercicios que exijan el uso de GeoGebra<sup>22</sup>, ni de otro software (Anexo 12).

---

<sup>21</sup> Se refiere a las que se corresponden con las formas estudiadas en el grado, pues la forma paramétrica no se estudia en este grado.

- La planificación a largo plazo de la Teroga en el componente laboral e investigativo. Tipos de tareas de aprendizaje

En el proceso de planificación de la Teroga en el componente laboral e investigativo del PEA de la Geometría Analítica se utilizan algunos de los resultados obtenidos en los dos primeros apartados de este epígrafe. A continuación se expone un procedimiento que tiene el propósito de realizar organizadamente el proceso de planificación de la Teroga para este componente, el cual se ejemplifica con la recta en el plano.

Condiciones de partida:

Entre estas condiciones está “disponer del análisis del programa de Matemática para undécimo grado y del libro de texto de este grado” respecto a la transferencia entre representaciones.

Operaciones o fases del procedimiento:

1. Análisis de documentos rectores de la carrera respecto a su relación con la Teroga.
2. Proyección del tratamiento de la Teroga en las actividades de la práctica laboral e investigativa correspondientes al PEA de la Geometría Analítica.
3. Creación de condiciones en el centro de práctica.
4. Determinación de los tipos de tareas a realizar por los alumnos.
5. Concepción de las formas de orientación, evaluación y control a utilizar.

Explicación del procedimiento y ejemplificación con la recta en el plano

1. Análisis de documentos rectores de la carrera respecto a su relación con la Teroga.

Los documentos rectores de la carrera a analizar son el modelo del profesional y los programas de las disciplinas Formación Laboral e Investigativa y Geometría.

El estudio del modelo del profesional se realiza para identificar los problemas profesionales, así como las tareas y funciones del profesional. El programa de la disciplina FLI incluye los tipos de tareas que se sugieren para la formación laboral e investigativa en los distintos años y el de la disciplina “Geometría” los tipos de tareas que se sugieren para propiciar la formación laboral e investigativa en el PEA de la disciplina.

En el modelo del profesional se exponen los cuatro problemas profesionales y las tres funciones del profesional a las que corresponden 21 tipos de tareas.

---

<sup>22</sup> Este libro se publicó en el año 1967 cuando no existía GeoGebra ni se utilizaban software en el PEA de la Matemática.

En el programa de la disciplina FLI se sugieren 14 tipos de tareas a realizar por los alumnos y en el de la disciplina Geometría se recomiendan seis tipos de tareas estrechamente relacionadas con las que se proponen en la disciplina FLI.

De estos tipos de tareas las que más se ajustan a los propósitos del tercer año y de la asignatura Geometría I, incluida la Teroga son las que plantean que los alumnos deben ser capaces de:

- Resolver ejercicios y problemas geométricos de cálculo y demostración de los libros de texto del nivel medio de educación.
  - Formular ejercicios y problemas geométricos que complementen el sistema de ejercicios de los libros de texto del nivel medio de educación.
  - Diagnosticar dificultades de aprendizaje de los contenidos geométricos en sus alumnos.
  - Proponer alternativas para solucionar, de manera diferenciada, dificultades de aprendizaje de los contenidos geométricos en el nivel medio de educación.
  - Realizar trabajos científico-estudiantiles.
2. Proyección del tratamiento de la Teroga en las actividades de la práctica laboral e investigativa correspondientes al PEA de la Geometría Analítica.

En esta fase se desarrollan las ideas acerca de la inserción de la Teroga en las actividades del PEA de la Geometría Analítica en la práctica laboral e investigativa lo cual implica su inclusión en el plan de actividades según los objetivos, contenidos y tareas profesionales concebidas en el programa de la práctica, el plan calendario (P-1) de la asignatura Geometría Analítica y la dosificación de la asignatura Matemática en el centro de práctica (de ser posible).

3. Creación de condiciones en el centro de práctica.

En esta fase se debe trabajar en la preparación de los tutores y directivos y en la creación de condiciones materiales necesarias para el cumplimiento de lo proyectado para el tratamiento de la Teroga (bibliografía, locales para el trabajo de los alumnos de la carrera, entre otras).

4. Determinación de los tipos de tareas a realizar por los alumnos.

Se propone que los tipos de tareas a realizar por los alumnos sean: 1) resolver ejercicios y problemas que exigen Teroga de los libros de texto de la escuela y formular nuevos ejercicios y problemas, 2) analizar y valorar los programas y libros de texto de Matemática del nivel medio de educación respecto a la Teroga, en este caso undécimo grado, 3) diagnosticar el nivel de desarrollo de la habilidad de los alumnos para la Teroga, 4) proponer y ejecutar acciones

dirigidas a mejorar el nivel de desarrollo de esta habilidad y 5) elaborar ponencias y otros trabajos investigativos acerca de la Teroga y exponer sus resultados de forma oral.

#### 5. Concepción de las formas de orientación, evaluación y control a utilizar.

La orientación de las tareas que exigen transferencia entre representaciones se debe desarrollar en los distintos tipos de clases, preferiblemente en las conferencias, en el plan del componente laboral e investigativo y en las actividades de la práctica laboral e investigativa.

La evaluación y el control se desarrollan en las sesiones previstas del componente laboral e investigativo, en las consultas, los activos de práctica laboral y en los diferentes tipos de clases de la asignatura. También incluye la revisión de la ponencia elaborada por los alumnos y la valoración de su presentación pública.

#### 2.2.2. Planificación a mediano y corto plazos

La planificación a mediano plazo del componente académico se corresponde con la de los sistemas de clases. La preparación de las clases por el profesor concierne a la planificación a corto plazo, en el caso de la Geometría Analítica se trata de las conferencias y clases prácticas.

Los sistemas de clases correspondientes al PEA de la Geometría Analítica pueden estructurarse en seis subsistemas: S<sub>1</sub>) El concepto de vector. Operaciones con vectores, S<sub>2</sub>) Productos de vectores, S<sub>3</sub>) La recta en el plano, S<sub>4</sub>) El plano y la recta en el espacio, S<sub>5</sub>) Las curvas de segundo grado y S<sub>6</sub>) Las superficies de segundo grado. En cada uno de estos subsistemas está incluida la Teroga.

El sistema de clases debe contener para cada clase: los objetivos, los conceptos, proposiciones y procedimientos a tratar, incluidos los de Teroga con el posible uso del software GeoGebra, los tipos de tareas a resolver, los métodos, los medios, formas de organización, la componente cognitivo-instrumental del nivel de partida y las formas de evaluación y control.

Como parte de la planificación a mediano plazo del componente laboral e investigativo, el profesor debe elaborar las tareas a realizar, coordinar con el profesor principal del año (PPA) y el resto de los profesores del colectivo, la integración de las tareas correspondientes a la Geometría Analítica (incluida la Teroga) con el resto de las tareas de la práctica laboral e investigativa y los horarios en que estas se realizarán en el centro de práctica. Debe preverse al menos una sesión inicial para orientar y organizar el trabajo, una sesión intermedia para evaluar y controlar el desarrollo del trabajo y ofrecer orientaciones con el propósito de tratar las dificultades que se detecten y una sesión final para socializar los resultados obtenidos. En

dependencia de las características de los alumnos y la complejidad de la tarea se pueden realizar consultas y tutorías individuales o colectivas.

El resultado fundamental de la planificación a mediano plazo es la elaboración o perfeccionamiento de los sistemas de clases, la elaboración e integración de las tareas de Geometría Analítica (incluida la Teroga) con las tareas de las demás asignaturas en la práctica laboral e investigativa y la fijación de los horarios para la atención a los alumnos en el componente laboral e investigativo.

Para la recta en el plano un ejemplo de las tareas a proponer es el siguiente.

Tarea: Analiza el programa y el libro de texto de Matemática para el undécimo grado respecto a la recta en el plano, guiándote por las preguntas siguientes, elabora una ponencia basándote en las respuestas y diseña su presentación en PowerPoint:

- a) ¿En qué unidad del programa se concibe el estudio de la recta en el plano?
- b) ¿Qué objetivos referidos a las representaciones y transferencias entre ellas se plantean en el programa?
- c) ¿Cuáles tipos y formas de representación deben ser estudiadas según el programa?
- d) ¿Cuáles son las posibles transferencias a realizar entre las representaciones de la recta, según el programa?
- e) Analiza la correspondencia entre las transferencias identificadas en el inciso d y los ejercicios del libro de texto del grado.
- f) Elabora ejercicios para las transferencias a las que no les corresponde ningún ejercicio del libro.
- g) Valora el programa y el libro de texto en cuanto a la concepción de la utilización del software GeoGebra para realizar las transferencias.
- h) Selecciona al menos dos de las transferencias que se pueden realizar con el Software y describe los procedimientos a aplicar.
- i) Con ayuda del tutor, elabora una prueba que te permita diagnosticar el nivel de desarrollo de la habilidad para la transferencia entre representaciones de la recta, aplícala a un grupo de alumnos, procesa los resultados obtenidos, describe las dificultades de aprendizaje identificadas en términos de los errores cognitivos cometidos por los alumnos, analiza con los alumnos de forma individual y colectiva las posibles causas de los errores y diseña acciones para el tratamiento de estas dificultades y ejecútalas.
- j) Valora la contribución de esta tarea a tu formación como profesor de Matemática.

En cuanto a la planificación a corto plazo, en el componente académico, la planificación de las conferencias es muy importante, pues es ese el momento de concebir la orientación del trabajo independiente a realizar previo a las clases prácticas y por tanto el punto de partida para la concepción del plan de este tipo de clase.

La planificación de clases puede realizarse siguiendo las fases: 1) estudio del contenido; 2) formulación de los objetivos; 3) elaboración o selección de las tareas de aprendizaje a resolver incluidas las tareas que exigen Teroga; 4) concepción de las funciones didácticas y 5) elaboración del plan de clase.

En la novena fase del primer procedimiento descrito en el epígrafe 2.1.1 se expuso una propuesta de las transferencias a considerar en las conferencias, el trabajo independiente y las clases prácticas, pero en este momento de la planificación corresponde la selección o elaboración de las tareas a resolver.

La planificación a corto plazo del componente laboral e investigativo incluye la preparación de las actividades a realizar en el centro de práctica laboral y otros espacios con los alumnos de la carrera, así como de las consultas y tutorías a realizar, también se puede modificar lo planificado previamente a partir de la retroalimentación de las actividades ejecutadas.

El resultado principal de la planificación a corto plazo es la conformación o perfeccionamiento de los planes de clases, de las actividades para el componente laboral e investigativo, las consultas y las tutorías.

### 2.3. La dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente académico del PEA de la Geometría Analítica

El alto número de casos de Teroga causa que los alumnos no puedan apropiarse de todos los procedimientos para ejecutar este proceso. Cuando ellos se enfrentan a una tarea que requiera la aplicación de un procedimiento que desconocen, deben elaborarlo aplicando la heurística.

Es por eso que la dinámica de la Teroga en el componente académico del PEA de la Geometría Analítica debe incluir tanto la aplicación de los procedimientos de transferencia como el aprendizaje de la heurística para su elaboración transitando por cuatro fases o dimensiones.

En la primera fase los alumnos se apropian de los conceptos que les propician la comprensión del proceso de transferencia, en la segunda fase se apropian de la heurística para la elaboración de procedimientos de transferencia, en la tercera aplican esta heurística y en la cuarta aplican la transferencia a la resolución de nuevas tareas.

La elaboración de procedimientos de transferencia requiere de la aplicación de un programa heurístico particular donde se concreten las etapas y acciones del programa heurístico general. A este programa el autor de esta tesis le llamó Programa Heurístico para las Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica (PH-Teroga).

La apropiación de este programa por los alumnos debe transcurrir mientras se resuelven tareas que exijan transferencia cuyo procedimiento no conocen. En términos de la dialéctica herramienta-objeto (Douady y Parzysz, 1998), durante la elaboración del PH-Teroga los procedimientos de transferencia desempeñan el papel de herramientas, mientras el Programa tiene el papel de objeto.

Como en el propio proceso de elaboración del PH-Teroga se elaboran procedimientos de transferencia, estos procedimientos requieren de su fijación para que los alumnos se los apropien. Ello implica que deben ejercitarse y eventualmente aplicarse.

Esta característica de la dinámica de la Teroga hace que sus fases segunda, tercera y cuarta no siempre se ejecuten en ese orden, pues se puede pasar a la aplicación de un procedimiento de transferencia en el propio proceso de elaboración del PH-Teroga.

Si se elabora algún procedimiento de transferencia compuesta durante la elaboración del PH-Teroga, habrá que aplicar un procedimiento de transferencia conocido, lo cual indica que en este caso la cuarta fase de la dinámica se inserta en la segunda.

Si se hiciera lo mismo, pero en la fase de aplicación del PH-Teroga se estaría en un caso donde la cuarta fase de la dinámica se inserta en la tercera.

Por otra parte, el desarrollo de los conceptos relativos a la transferencia que se forman en la primera fase, debe producirse en el resto de las fases.

Lo anteriormente expuesto indica que las relaciones entre las fases de la dinámica de la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica son diacrónicas y sincrónicas, es decir, que unas preceden a las otras, pero también se entremezclan en su transcurso.

2.3.1. Primera fase: formación y desarrollo del concepto de transferencia entre representaciones, conceptos auxiliares y conceptos subordinados

Este epígrafe está dividido en dos partes. En la primera parte se trata lo relativo a la formación y desarrollo de varios conceptos<sup>23</sup> que son necesarios para el estudio de la transferencia, los

---

<sup>23</sup> La formación y desarrollo de conceptos en el PEA se asume con el enfoque de Mederos (2002) y Ruiz (2007).

cuales desempeñan el papel de conceptos auxiliares. En la segunda se expone lo relativo a la formación y desarrollo del concepto de transferencia y conceptos subordinados, los cuales tienen gran importancia para el estudio de este proceso.

El desarrollo de estos conceptos incluye: ampliación de la clase de los elementos conocidos de sus extensiones, incremento del número de representaciones con que se materializan los elementos de sus extensiones, deducción de nuevas propiedades de los objetos de su extensión y determinación de relaciones con otros conceptos.

Los conceptos auxiliares que deben formarse y desarrollarse son: estructura matemática, representación de un objeto matemático y sus conceptos subordinados: representación verbal, representación analítica y representación gráfica, forma de representación, forma reconocida de representación y sistema de representación.

El concepto de transferencia entre representaciones es el más importante de esta sección. Aquí se analiza su formación y desarrollo y también se expone la formación y desarrollo de sus conceptos subordinados: transferencia intrasistema y transferencia intersistemas, transferencia intertipos y transferencia intratipo, transferencia directa y transferencia compuesta, transferencia con lápiz y papel y transferencia con el uso de software.

- Formación y desarrollo de conceptos auxiliares

El concepto de estructura matemática debe formarse en el Tema 1, después de estudiado el concepto de vector, las operaciones con vectores y sus propiedades. Para la formación de este concepto se recomienda la vía deductiva (Ballester y otros, 1992), siguiendo las fases siguientes: asegurar el nivel de partida, motivar y orientar hacia el objetivo, partir del concepto de  $n$ -uplo ordenado y analizar el caso en que sus primeras  $m$  componentes son conjuntos no vacíos y las restantes  $n-m$  componentes son relaciones o conjuntos de relaciones en las que intervienen estos conjuntos y analizar ejemplos y no-ejemplos del concepto, examinando el cumplimiento de cada una de las características que forman su contenido.

La ampliación del conjunto de elementos conocidos de la extensión del concepto de estructura se irá realizando a medida que se estudien los objetos geométricos y sus relaciones.

El resto de los conceptos auxiliares se deben formar en el Tema 2, en la conferencia donde se trate el contenido relacionado con la recta en el plano.

Para la formación del concepto de representación se puede utilizar la vía deductiva partiendo de asegurar el nivel de partida recordando a los alumnos que en el estudio de las funciones ellos

han trabajado con diferentes representaciones de estas (verbales, tabulares, analíticas, gráficas, etc.), pero quizás nunca formularon una definición del concepto de representación. Se puede recordar, también que durante toda la Educación General representaron gráficamente diferentes objetos geométricos (triángulos, cuadriláteros, segmentos, rectas, planos, etc.).

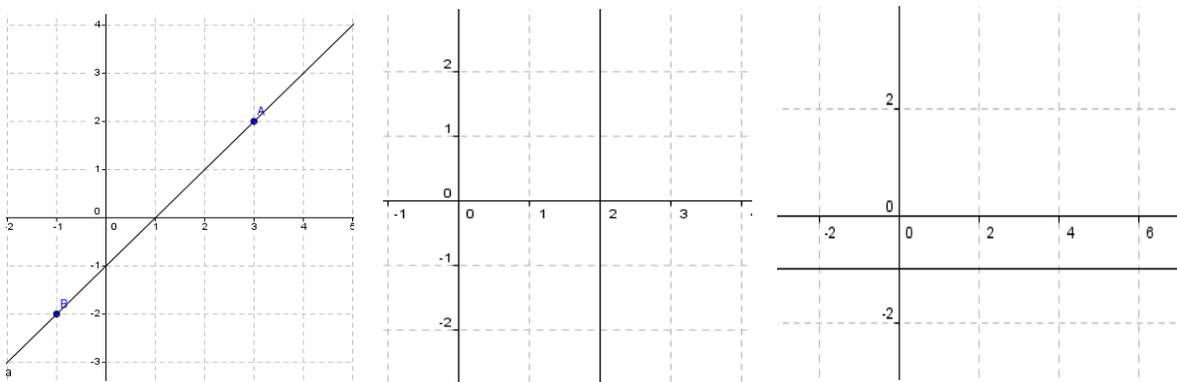
La motivación surge de la necesidad de definir el concepto de representación para los objetos geométricos en el PEA de la Geometría, que incluya en su extensión las representaciones conocidas por ellos de objetos como la recta, la circunferencia y la parábola.

A continuación se presenta a los alumnos la definición que aparecen en 1.1.1 de esta tesis y se analiza el significado de las expresiones “objeto material o mental”, “que lo sustituye y lo hace presente”, “determinándolo de forma única en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación”, “con el uso de un sistema de coordenadas elegido convenientemente como sistema de referencia”.

Después de que los alumnos hayan comprendido el significado de las diferentes partes de la definición de representación se muestran varios ejemplos y no-ejemplos del concepto y se analiza si satisfacen o no las características de su contenido.

El profesor pide a los alumnos que analicen cuáles de las siguientes expresiones corresponden a representaciones de una recta en el plano y argumenten.

- a. Recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(1;2)$  y  $B(2;5)$ .
- b. Recta  $s$  que pasa por el punto  $C(1;-3)$  y es paralela al vector  $a = (1; 3)$ .
- c. Recta  $t$  que pasa por el punto  $D(-1;4)$  y es perpendicular al vector  $n = (2; 5)$ .
- d. Recta  $u$  que pasa por el punto  $E(3;-1)$  y tiene pendiente  $m = \frac{2}{3}$ .
- e. Recta cuya ecuación es  $3x + 2y - 5 = 0$ .
- f. Recta cuya ecuación es  $y = \frac{1}{2}x + 5$ .
- g. Recta que pasa por el punto  $F(2,-5)$ .
- h. Recta de pendiente  $m = \frac{2}{3}$ .
- i. Recta cuyos puntos  $(x;y)$  satisfacen el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$
- j. Rectas que aparecen en el gráfico.



El ejemplo anterior es útil para la formación de los conceptos de representación verbal, representación analítica y representación gráfica.

Una de las posibles alternativas para la formación de estos conceptos es la que se muestra a continuación basada en tipos.

Se motiva a los alumnos a partir de la conveniencia de agrupar las representaciones de los objetos geométricos utilizando como criterio “la naturaleza de los componentes predominantes en el objeto representante”.

Se establece con los alumnos una conversación como la siguiente:

Profesor (P): ¿En cuáles de las representaciones dadas predominan las palabras?

Alumno (A): En las dadas en los incisos a, b, c y d.

P: ¿En cuáles de las representaciones dadas predominan ecuaciones o sistemas de ecuaciones?

A: En las representaciones dadas en los incisos e, f e i.

P: ¿En cuáles de las representaciones dadas predomina una figura geométrica?

A: En las representaciones dadas en el inciso j.

P: Las representaciones de la recta en el plano, dadas en el ejemplo, las agrupamos en tres conjuntos a cada uno de los cuales denominamos tipo de representación.

Es este un momento adecuado para formular las definiciones de los conceptos de: representación verbal, representación gráfica y representación analítica de un objeto de la geometría analítica e identificar y argumentar cuáles de las representaciones dadas son verbales, analíticas o gráficas.

El concepto de forma de representación se puede formar utilizando el mismo ejemplo de la manera siguiente:

P: ¿Qué diferencias ustedes observan entre las representaciones verbales de las rectas dadas en el ejemplo anterior?

A: En la representación del inciso a, la recta está determinada por dos de sus puntos, mientras que en el inciso b se determina por uno de sus puntos y un vector paralelo a la recta, en el inciso c la recta se determina por uno de sus puntos y un vector perpendicular (normal) a la recta, mientras que en el inciso d la recta se determina por uno de sus puntos y la pendiente. En conclusión la diferencia esencial está en la configuración de los elementos que determinan el objeto geométrico.

P: ¿Qué diferencias ustedes observan entre las representaciones analíticas de las rectas dadas en el ejemplo anterior?

A: En la representación del inciso e la recta está dada por una ecuación de la forma  $Ax + By + C = 0$ ,  $A^2 + B^2 > 0$ , es decir, por una ecuación general, mientras que la del inciso f por una ecuación de la forma  $y = mx + n$  y en el inciso i por un sistema de ecuaciones de la forma  $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$ , o sea, un sistema de ecuaciones paramétricas. En conclusión la diferencia está en que en los dos primeros incisos la recta está dada por una ecuación, aunque estas adoptan diferentes formas, mientras que en el último se da por un sistema de ecuaciones.

En este momento se formula la definición del concepto de forma de representación.

Siguiendo ideas análogas a las explicadas anteriormente se pueden formar los conceptos de forma reconocida de representación y sistema de representación. En las clases posteriores se debe trabajar en el desarrollo de los conceptos estudiados.

En la resolución de tareas que exigen transferencia se contribuye al desarrollo del concepto de representación y conceptos subordinados debido a que se amplía la clase de los elementos conocidos de sus extensiones cuando se identifica el tipo de la representación dada y la representación buscada. También se desarrolla el concepto de forma de representación cuando se identifica la forma de la representación dada y la representación buscada.

- Formación y desarrollo del concepto de transferencia entre representaciones y de conceptos subordinados

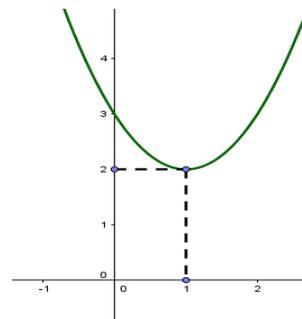
El concepto de transferencia entre representaciones de un objeto de la Geometría Analítica debe formarse en la primera conferencia del tema 2. Para la formación de este concepto se asegura el

nivel de partida y se realiza la motivación y orientación hacia al objetivo en una conversación como la siguiente:

Para la formación del concepto de transferencia entre representaciones de un objeto de la Geometría Analítica se puede utilizar la vía inductiva procediendo de la manera siguiente:

P: En el preuniversitario ustedes resolvieron tareas como las que se muestran a continuación:

- Representa gráficamente la recta cuya ecuación es  $y = 5x + 4$ .
- Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos  $A(2;3)$  y  $B(3,5)$ .
- Determina una ecuación de la recta que pasa por el punto  $Q(6;2)$  y tiene pendiente  $m=2$ .
- Determina la ecuación de la parábola cuya representación gráfica se da en la figura:
- La ecuación  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  corresponde a la recta  $m$ . Represéntela gráficamente y escriba su ecuación general.



La resolución de estas tareas exige un proceso con características particulares que pretendemos estudiar.

P: A las tareas propuestas anteriormente se pueden agregar otras que también pueden resolverse utilizando los conocimientos adquiridos por los alumnos en la educación media.

- Calcula el resultado de  $70 + 24\frac{9}{18} + 5\frac{3}{6}$ .
- ¿Cuántos pares de números enteros no negativos existen tales que  $x + y = 4$ ?
- Calcula la amplitud del tercer ángulo interior de un triángulo sabiendo que los restantes miden  $35^\circ$  y  $95^\circ$ , respectivamente.

P: Para resolver las tareas anteriores el alumno debe seguir diferentes procesos que tienen semejanzas y diferencias entre ellos. Nos interesa identificar los procesos que satisfacen las siguientes condiciones: 1) lo dado es una representación de un objeto geométrico, 2) lo buscado es otra representación de este objeto, 3) las representaciones de lo dado y lo buscado corresponden a sistemas de coordenadas (pueden o no ser el mismo sistema).

A: Estas condiciones las satisfacen las tareas a, b, c, d y e.

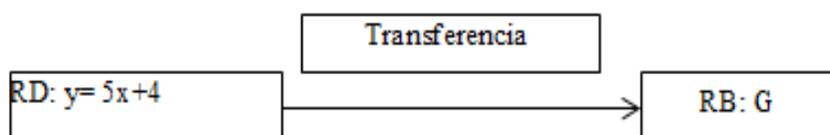
Se formula la definición de transferencia y se citan ejemplos y no-ejemplos del concepto. En el transcurso del PEA de la asignatura se ampliará la clase de elementos conocidos de la extensión del concepto de transferencia entre representaciones.

P: Si se utilizan etiquetas para identificar la RD y la RB y flechas cuyo origen indica la RD y su extremo la RB, es posible representar la transferencia.

Por ejemplo, si en el inciso a utilizamos las etiquetas EPP y G para simbolizar, respectivamente, la representación analítica de una recta por un punto y la pendiente y su representación gráfica respecto a un sistema de coordenadas, la transferencia de la primera representación a la segunda se puede representar simbólicamente por  $EPP \rightarrow G$ . A este tipo de representación de la transferencia se le denomina simbólica.

El proceso de transferencia, para el inciso a, puede describirse de la manera siguiente: 1) se traza un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, 2) se determinan las coordenadas de dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la recta, 3) se representan los puntos  $P_1$  y  $P_2$  en el sistema de coordenadas y 4) se traza la recta que pasa por los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Esta descripción de la transferencia constituye un procedimiento y es una representación verbal de este proceso.

Existe otra forma de representar esta transferencia a la que denominamos mapa de transferencia, que es de tipo gráfica (Fig.4):



Legenda: RD: representación dada, RB: representación buscada, G: representación gráfica

Fig. 4: Mapa de transferencia.

Para la formación de conceptos subordinados al concepto transferencia se puede utilizar la vía deductiva, procediendo de la forma siguiente:

P: Ahora pretendemos formar algunas subclases de la extensión del concepto transferencia entre representaciones. En la definición de este concepto intervienen (entre otros) los conceptos: sistema de coordenadas y tipo de representación.

P: Al analizar la relación entre los sistemas de coordenadas se obtienen dos casos. ¿Cuáles son?

A: Los casos son  $C_1 = C_2$  o  $C_1 \neq C_2$ .

P: A las transferencias en las que  $C_1 = C_2$  se denominan intrasistema. A las que cumplen la condición  $C_1 \neq C_2$  se les denomina intersistemas.

P: Al analizar la relación entre los tipos se tienen dos casos. ¿Cuáles son?

A: Puede suceder que  $T_1 = T_2$  o  $T_1 \neq T_2$ .

P: A las transferencias en las  $T_1=T_2$  se les denomina transferencia intratipo. A aquellas en que  $T_1 \neq T_2$  se les denomina transferencia intertipos.

Es recomendable utilizar la vía deductiva en la formación de otros conceptos subordinados al concepto de transferencia entre representaciones y que se utilice un material complementario donde aparezcan las definiciones de cada concepto y ejemplos y no-ejemplos adecuados para cada uno de ellos. Estos conceptos son: transferencia directa, transferencia compuesta, transferencia con lápiz y papel y transferencia con el uso de software.

En las clases y actividades laborales e investigativas posteriores se debe trabajar en el desarrollo del concepto de transferencia entre representaciones y de los conceptos subordinados.

El desarrollo del concepto de transferencia se produce cada vez que el alumno elabora o aplica procedimientos de transferencias para los nuevos objetos geométricos estudiados, pues está ampliando la clase de elementos conocidos de la extensión de este concepto. También se desarrollan los conceptos subordinados en este sentido cuando se identifica el tipo de transferencia.

### 2.3.2. Segunda fase: elaboración del Programa Heurístico para la Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica (PH-Teroga)

En este epígrafe se expone el PH-Teroga y se describe el proceso de su elaboración en el PEA de la Geometría Analítica.

- Programa Heurístico para la Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica

Para la realización de transferencias en que se desconoce el procedimiento para obtener la representación buscada a partir de la representación dada se concibe la utilización del PH-Teroga (Tabla 7), en el cual se concretan las fases de este proceso.

Este programa se ha elaborado a partir del programa heurístico general compuesto por cuatro fases (Jungk, 1978), las cuales se corresponden con las fases del proceso de resolución de un problema en el PEA de la Matemática propuestas por Polya (1981).

En el programa heurístico particular PH-Teroga, el nombre de las fases y las acciones fundamentales se ajustan a la naturaleza del proceso de transferencia.

Fases fundamentales	Acciones principales
1. Comprensión de la tarea de transferencia.	Reconocer que se trata de un ejercicio o problema de transferencia. Identificar la RD y la RB. Identificar el tipo y la forma de la RD y la RB. Identificar el tipo de transferencia a realizar (intrasistema o intersistemas, intratipo o intertipos). Representar simbólicamente la transferencia.
2. Elaboración de un procedimiento de transferencia	Determinar los medios a utilizar para realizar la transferencia. Decidir si se puede realizar una transferencia directa o es imprescindible realizar una transferencia compuesta. Elaborar un procedimiento de transferencia. Fundamentar el procedimiento. Representar la transferencia mediante un mapa de transferencia.
3. Realización de la transferencia	Ejecutar el procedimiento de transferencia. Tomar decisiones ejecutivas.
4. Evaluación del proceso de transferencia	Comprobar si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado. Determinar si la representación obtenida es única. Determinar si existen otros procedimientos para realizar la transferencia. Valorar si el procedimiento aplicado se puede generalizar a todas las tareas del mismo tipo que la resuelta. Formular nuevos ejercicios o problemas de transferencia.
El concepto de decisión ejecutiva que se asume proviene de los trabajos de Schoenfeld acerca de la resolución de problemas.	

En esta tesis el autor concibe el sistema de preguntas con carácter heurístico (SPCH) como un sistema de reglas o sugerencias heurísticas que favorecen la Teroga en el PEA de la Geometría Analítica. El carácter heurístico del sistema de preguntas está en que estas contribuyen a que los alumnos descubran con la ayuda del profesor las acciones a ejecutar para transferir de una representación a otra.

Las preguntas del SPCH contribuyen a la ejecución de las acciones principales del PH-Teroga y se insertan en sus fases<sup>24</sup> (Tabla 8).

<sup>24</sup> En el proceso de resolución de cada tarea de aprendizaje se pueden agregar otras preguntas.

Tabla 8: Preguntas con carácter heurístico por fases del PH-Teroga	
Fases fundamentales	SPCH
1. Comprensión de la tarea de transferencia.	¿Cuál es el objeto geométrico? ¿Se trata de una tarea de transferencia entre representaciones de un objeto de la Geometría Analítica? ¿De qué tipo es la RD? ¿Qué forma tiene la RD? ¿Qué datos tengo de la RD? ¿De qué tipo es la RB? ¿Qué forma tiene la RB? ¿De qué tipo es la transferencia a realizar? ¿Cuál es la representación simbólica de la transferencia?
2. Elaboración de un procedimiento para la transferencia.	¿Debo realizar la transferencia con lápiz y papel o puedo utilizar un software? ¿Puedo pasar directamente de la RD a la RB? ¿Es útil obtener una representación intermedia? ¿Cómo puedo obtener la RB a partir de la RD? ¿Cómo justifico el procedimiento seguido? ¿Puedo representar la transferencia detalladamente?
3. Realización de la transferencia.	¿Qué hago para ejecutar cada paso del procedimiento? ¿Qué utilidad tiene el resultado parcial que obtengo al ejecutar cada paso?
4. Evaluación del proceso de transferencia.	¿Satisface la representación obtenida las exigencias de la tarea? ¿Cómo lo puedo comprobar? ¿Es única la representación obtenida? ¿Se pueden utilizar otros medios para realizar la transferencia? ¿Cómo procedo si utilizo otros medios? ¿El procedimiento aplicado se puede utilizar en todas las tareas del mismo tipo que la resuelta? ¿Existe otra forma de proceder utilizando los mismos medios? ¿Qué nuevas tareas puedo plantear a partir de la tarea resuelta?

Para la formulación de problemas después de la resolución de un problema existen diferentes técnicas, entre las que se encuentran: ¿qué pasaría si?, inversión y generalización. (Chibás, 1997; Cruz, 2002; Estrada, 2003; Suárez, 2003).

El mapa de transferencia es un medio auxiliar heurístico que favorece el proceso de elaboración de los procedimientos de Teroga; su construcción contribuye a visualizar este proceso en un diagrama.

- El proceso de elaboración del Programa Heurístico

Por elaboración del PH-Teroga se entiende el proceso en que los alumnos guiados por el profesor determinan y comprenden las fases de este programa, las acciones que las componen y las posibles heurísticas a utilizar en cada fase partiendo del programa heurístico general (PHG) en el contexto de la resolución de tareas de aprendizaje que se pueden proponer en conferencias, clases prácticas u otras formas de organización del PEA.

El principal indicador que determina el final de la fase de elaboración en un alumno es que este pueda resolver tareas que exigen Teroga cuyo procedimiento de transferencia sea desconocido para él, sin necesidad de disponer en soporte material de las fases y acciones del PH-Teroga ni de las preguntas del SPCH.

Como los alumnos conocen las fases y sus respectivas acciones principales correspondientes al programa heurístico general, deben participar en la elaboración de un caso particular de este programa (el PH-Teroga) para resolver tareas que exigen Teroga.

Teniendo en cuenta la teoría del aprendizaje como una acción mental (Talízina, 1988) y las características propias de la elaboración del PH-Teroga se consideran tres etapas funcionales o momentos para este proceso: 1) configuración, 2) contextualización y 3) valoración y perfeccionamiento, las cuales transcurren según las funciones didácticas.

En el primer momento se particularizan las fases y acciones del PHG a la transferencia entre representaciones y se elabora una lista inicial de preguntas del SPCH; en el segundo momento los alumnos resuelven tareas que exigen transferencia utilizando las pautas del PH-Teroga y en el tercer momento valoran la utilidad del PH-Teroga y lo perfeccionan con la experiencia adquirida en la resolución de cada tarea. Los momentos segundo y tercero tienen lugar en el contexto de resolución de cada tarea.

En la conformación de las tareas para elaborar el PH-Teroga se consideran las variables: 1) estudio previo por el alumno del contenido matemático necesario para resolver la tarea, 2) tipo de transferencia a realizar y 3) estructura de la tarea según su exigencia.

No se han considerado las variables relativas al estudio previo del procedimiento por el alumno, al papel de la resolución de la tarea según la dialéctica herramienta-objeto ni al contexto de la tarea porque estos factores son fijos: se utilizarán tareas que exigen una transferencia cuyo procedimiento el alumno desconoce, de contexto intramatemático y la resolución de cada tarea juega el papel de herramienta para el aprendizaje del PH-Teroga.

Los valores a considerar de la primera variable son: 1.1) el alumno estudió el contenido o 1.2) el alumno no estudió el contenido.

Los valores a considerar de la segunda variable son los correspondientes a las transferencias intrasistema de acuerdo con lo expuesto en el epígrafe 1.1.2 del capítulo I. Los valores utilizados para la tercera variable son: 3.1) tarea de respuesta abierta o 3.2) tarea de completamiento. Para determinar los tipos de tareas de transferencia entre representaciones, según estas tres variables y sus posibles valores, se aplica la regla del producto de la combinatoria resultando 16 tipos de tareas (Anexo 13A).

En la primera etapa el profesor puede recordar la utilidad que tiene el PHG en la resolución de problemas en el PEA de la Matemática y plantear la necesidad de elaborar un PH-Teroga a partir del programa heurístico general. A continuación se puede entregar a los alumnos una tabla con las fases y acciones principales del PHG y explicar que se pretende particularizar las fases del PHG para el caso de las tareas de transferencia en que se desconoce el procedimiento a seguir. A continuación en una conversación de clase (Klingberg, 1972) el profesor les pide que sugieran nombres para las fases y escucha sus opiniones.

El profesor dirige la conversación de clase y cuando los alumnos concluyen sus intervenciones, expone los nombres para cada fase. Entonces plantea la necesidad de determinar las acciones principales de cada fase y pide a los alumnos que ofrezcan sus opiniones, organizando las intervenciones por fases del PHG. Al finalizar las intervenciones el profesor presenta una tabla como la 7, que se irá enriqueciendo de forma individual y colectiva en el proceso de resolución de tareas que exigen Teroga.

El profesor explica la importancia de elaborar un sistema de preguntas que constituyan un sistema de reglas o sugerencias heurísticas las cuales favorezcan el proceso de transferencia y que se inserten en cada fase del programa. Solicita a los alumnos preguntas para cada acción. Al concluir la conversación de clase el profesor presenta una tabla como la 8, que se irá perfeccionando y ampliando a partir de la experiencia en la resolución de tareas que exigen transferencia.

El momento de contextualización transcurre en la resolución de tareas de aprendizaje que requieren la elaboración de procedimientos de transferencia, bajo la dirección del profesor. Es conveniente comenzar esta etapa con la transferencia de una representación verbal de una recta en el plano a una representación verbal en la segunda conferencia correspondiente al tema 2. A continuación se ejemplifica cómo proceder.

P: ¿Cómo resuelves el siguiente problema?

Una recta  $r$  pasa por el punto  $A(1;3)$  y es paralela al vector  $a=(3;-5)$ . Obtén una representación verbal de  $r$  determinada por dos puntos (tarea del tipo 7, Anexo 13A).

El trabajo con esta tarea se describirá en términos de las funciones didácticas implicadas.

Para asegurar el componente cognitivo-instrumental del nivel de partida, el profesor debe determinar los tipos de tareas que los alumnos deben saber resolver. Estos son: identificar el tipo y la forma de las representaciones de la recta, representar simbólicamente una transferencia, transferir de la representación verbal de una recta determinada por un punto y un vector de dirección a una representación paramétrica, determinar las coordenadas de puntos de una recta, conociendo uno de sus sistemas de ecuaciones paramétricas y representar gráficamente una transferencia.

Los conocimientos y habilidades necesarios para resolver estos tipos de tareas son: las fases y operaciones del PH-Teroga, los conceptos de tipo y forma de representación, los tipos de representación de las transferencias, el procedimiento para transferir de una representación verbal de la recta determinada por un punto y un vector de dirección a una representación paramétrica y la habilidad para calcular el valor numérico de una expresión algebraica.

Debido a que estos conocimientos y habilidades forman parte de los contenidos de la asignatura, el profesor debe conocer si los alumnos poseen las condiciones previas necesarias y prever cómo creará las que no estén disponibles.

La motivación se puede lograr con una conversación como la siguiente:

P: En el preuniversitario ustedes estudiaron algunos de los procedimientos para transferir entre representaciones de la recta en el plano, algunos de ellos los hemos recordado aquí.

P: En este momento vamos a resolver tareas de transferencias para las que no conocemos el procedimiento a seguir por lo que constituyen problemas de transferencia. ¿Cómo utilizar el PH-Teroga en la resolución de estas tareas? ¿Qué analogías y diferencias existen entre los procedimientos de transferencia estudiados anteriormente y el que pretendemos elaborar?

La orientación hacia el objetivo se puede realizar de la siguiente forma:

P: Ahora vamos a resolver una tarea en la que se pretende elaborar un procedimiento para transferir entre representaciones verbales de una recta, utilizando el PH-Teroga.

P: Plantea la tarea a los alumnos.

P: Orienta a los alumnos que utilicen la tabla que contiene las fases y operaciones fundamentales del PH-Teroga y el SPCH y les pide que contesten las preguntas.

A: Trabajan de forma independiente para responder las preguntas.

P: Dirige el intercambio con los alumnos sobre las respuestas a las preguntas del SPCH.

P: ¿Cuál es el objeto geométrico?

A: Una recta.

P: ¿Se trata de una tarea de transferencia entre representaciones?

A: Es una tarea de transferencia entre representaciones de una recta.

P: ¿De qué tipo es la RD? ¿Qué forma tiene la RD?

A: La RD es de tipo verbal, determinada por un punto y un vector de dirección.

P: ¿De qué tipo es la RB? ¿Qué forma tiene la RB?

A: La RB es de tipo verbal dada por dos puntos.

P: ¿Cuál es la representación simbólica de la transferencia?

A: Introduciendo las etiquetas: 1) PVD: recta representada por un punto y un vector de dirección y DP: recta representada por dos puntos, la representación simbólica de la transferencia es  $PVD \rightarrow DP$ .

P: ¿Debo realizar la transferencia con lápiz y papel o puedo utilizar un software?

A: Se puede utilizar lápiz y papel o un software.

P: Vamos a resolver primeramente la tarea utilizando solo lápiz y papel

¿Puedo pasar directamente de la RD a la RB?

A: No, la transferencia es compuesta.

P: ¿Es útil obtener una representación intermedia?

A: Se puede obtener una representación analítica de la recta.

P: ¿Cómo puedo obtener la RB a partir de la RD?

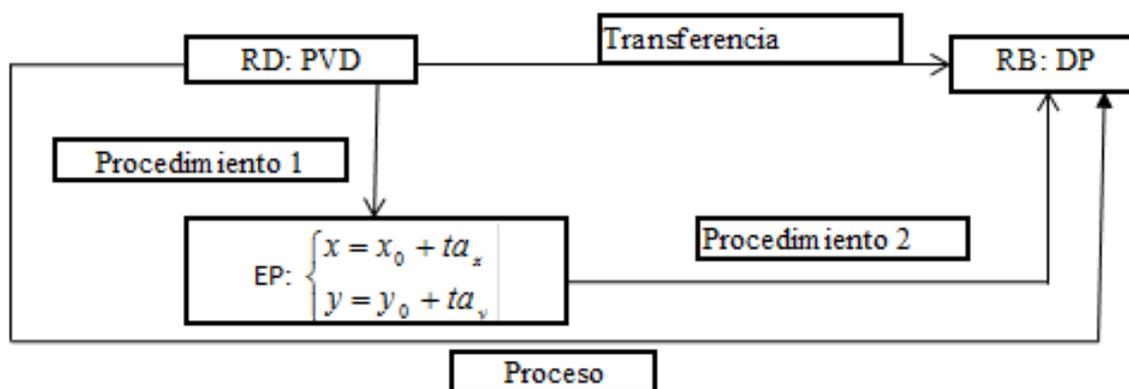
A: Para obtener la RB se debe obtener una representación analítica (puede ser un sistema de ecuaciones paramétricas) y después determinar las coordenadas de otro punto de la recta.

P: ¿Cómo justifico el procedimiento seguido?

A: Si se sustituye el parámetro en la ecuación por un número real se obtienen puntos de la recta.

P: ¿Puedo representar la transferencia detalladamente?

A: Elabora el mapa, bajo la orientación del profesor (Fig.5).



Leyenda:

RD: Representación dada. RB: Representación buscada.

PVD: Recta representada verbalmente por un punto y un vector de dirección.

DP: Recta representada verbalmente por dos puntos.

Fig. 5: Mapa de transferencia utilizando lápiz y papel.

P: ¿Qué hago para ejecutar cada paso del procedimiento?

A: Se determina un sistema de ecuaciones paramétricas sustituyendo los valores de

$x_0, y_0, a_x$  y  $a_y$  en el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \end{cases}$  y se obtiene  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ .

A: Se sustituye el parámetro  $t$  por un número real diferente de cero (pueden ser  $t = 1$ ) y se determinan las coordenadas de un punto (en este caso  $P_1(4; -2)$ ).

A: Se escribe una representación verbal de  $r$  en la forma “recta que pasa por los puntos  $P_0(1;3)$  y  $P_1(4;-2)$ ”.

P: ¿Satisface la representación obtenida las exigencias de la tarea? ¿Cómo lo puedo comprobar?

A: Para comprobarlo se debe verificar que los puntos están en la recta.

P: ¿Es única la representación obtenida?

A: No es única, existen infinitas representaciones verbales de esta recta determinada por dos puntos.

P: ¿Se pueden utilizar otros medios para realizar la transferencia? ¿Cómo se procede si se utilizan otros medios?

A: Se puede utilizar el software GeoGebra.

P: Orienta resolver la tarea con el uso del software en el estudio independiente.

P: ¿El procedimiento aplicado se puede utilizar en todas las tareas del mismo tipo que la resuelta?

A: El procedimiento se puede utilizar en las tareas del mismo tipo que la resuelta.

P: ¿Existe otra forma de proceder utilizando los mismos medios?

A: Describe otros procedimientos, por ejemplo, determinando la pendiente, escribiendo la ecuación conocidos el punto A y la pendiente m y determinando las coordenadas de un punto diferente al punto A.

P: ¿Qué nuevas tareas puedo plantear a partir de la tarea resuelta?

P: Explica que existen técnicas de formulación de problemas. Por ejemplo: ¿qué pasaría si?, inversión de la transferencia y generalización.

A: Puede plantear tareas como las siguientes: 1) Obtenga representaciones verbales de r dadas por un punto y un vector normal y por un punto y la pendiente, 2) Una recta r pasa por los puntos A(7;-7) y B(-2;8). Obtén una representación verbal de r determinada por un punto y un vector de dirección y 3) Una recta r pasa por el punto  $P_0(x_0; y_0)$  y es paralela al vector  $a = (a_x; a_y)$ . Obtén una representación verbal de r determinada por dos puntos.

Las nuevas tareas planteadas en la cuarta fase del PH-Teroga pueden utilizarse para continuar con la elaboración del PH-Teroga o ejercitar procedimientos de transferencia.

Después de elaborado un procedimiento de transferencia deben proponerse tareas análogas a la resuelta para que los alumnos ejerciten el procedimiento.

El tercer momento del proceso de elaboración consiste en valorar cómo se concretaron las fases del PH-Teroga en la resolución de la tarea de modo que pueden incluirse nuevas acciones o cuestionar la aplicabilidad universal de algunas de las acciones incluidas. También se puede perfeccionar el SPCH.

Una vez concluida la segunda fase se pasa a la tercera consistente en la aplicación del Programa Heurístico.

### 2.3.3. Tercera fase: aplicación del Programa Heurístico

Este epígrafe trata acerca de la aplicación del PH-Teroga que se ha elaborado siguiendo las ideas expuestas al principio de la sección 2.3.

La aplicación del PH-Teroga ocurre durante la resolución de tareas de aprendizaje que exigen transferencia entre representaciones y la resolución de estas tareas transcurre según las funciones didácticas. Por ello comienza en el trabajo independiente previo a cada clase práctica, continúa en la clase práctica y se extiende al trabajo independiente posterior.

Para la conformación de las tareas se tienen en cuenta las tres variables declaradas en la elaboración del PH-Teroga y se agrega la variable relativa al contexto de la tarea cuyos valores son: 4.1) contexto intramatemático o 4.2) contexto extramatemático. Al igual que en la etapa anterior se utilizan tareas que exigen una transferencia cuyo procedimiento el alumno desconoce y la resolución de cada tarea juega el papel de herramienta para el aprendizaje del PH-Teroga.

Al aplicar la regla del producto de la combinatoria se obtienen 32 tipos de tareas (Anexo 13B) en cuya resolución se podrá aplicar el PH-Teroga. Estos tipos incluyen a los utilizados en la elaboración del PH-Teroga más otros que contienen tareas de contexto extramatemático.

A continuación se expone la manera de proceder en la aplicación del PH-Teroga, tomando como ejemplo la tarea siguiente que se puede utilizar en una clase práctica:

La recta  $r$  está dada por su representación general  $r: \begin{cases} -x + 3y + z - 4 = 0 \\ x - 2y + 3z + 6 = 0 \end{cases}$ .

Obtén una representación paramétrica de  $r$  determinada por un punto y un vector de dirección (tarea del tipo 9, Anexo 13B).

El componente cognitivo-instrumental del nivel de partida para resolver esta tarea incluye que el alumno sea capaz de: resolver sistemas de ecuaciones con dos ecuaciones y tres variables y expresar su conjunto solución en función de una de las variables, identificar las coordenadas de un punto y de un vector de dirección de una recta en su representación paramétrica.

Los conocimientos y habilidades necesarios para resolver tareas de estos tipos son: conocimiento de las fases y acciones del PH-Teroga, los conceptos de tipo y forma de representación, los tipos de representación de las transferencias.

Estos conocimientos y habilidades forman parte de los contenidos de la asignatura por lo que el profesor debe prever cómo creará las condiciones que no están disponibles en los alumnos.

La motivación se puede lograr con una conversación de clase como la siguiente:

P: Cuando estudiamos la recta en el espacio elaboramos procedimientos para calcular el ángulo entre una recta y un plano y la distancia de un punto a una recta. Para aplicar dichos procedimientos la recta debe estar representada por un sistema de ecuaciones paramétricas.

Lo antes expuesto justifica la necesidad de saber transferir de la representación general de una recta en el espacio a la paramétrica.

La orientación hacia el objetivo se puede realizar de la forma siguiente:

P: Ahora vamos a aplicar el PH-Teroga para resolver una tarea en la que se pretende elaborar un procedimiento para transferir entre representaciones de una recta en el espacio.

P: Plantea la tarea a los alumnos y orienta que utilicen el PH-Teroga para la resolución de la tarea y que trabajen de la manera más independiente posible.

A: Trabajan de forma independiente para responder las preguntas del SPCH.

P: Ofrece la ayuda necesaria a los alumnos que la necesitan, favorece el intercambio entre pares de alumnos y selecciona al alumno que expondrá la solución encontrada y el proceso seguido.

#### 2.3.4. Cuarta fase: aplicación de los procedimientos de transferencia

No basta con elaborar los procedimientos de transferencia, es necesario aplicarlos a la resolución de tareas, el propósito fundamental de la fijación es la preparación de los alumnos para la resolución independiente de ejercicios que no tienen carácter algorítmico (Ballester, 1992).

Para la determinación de los tipos de tareas se tienen en cuenta las variables: tipo de transferencia a realizar, contexto de la tarea y estructura de la tarea según su exigencia. Se utilizarán tareas que exigen una transferencia cuyo procedimiento el alumno conoce y donde la resolución de cada una de ellas juega el papel de herramienta para la aplicación del procedimiento.

Al aplicar la regla del producto de la combinatoria se obtienen 16 tipos de tareas (Anexo 13C) en cuya resolución se podrán aplicar los procedimientos de transferencia elaborados.

A continuación se expone mediante un ejemplo la manera de proceder en la aplicación de los procedimientos de transferencia en una clase práctica:

La estación de guardacostas B se encuentra situada a 400 km al este de la estación A. Un barco navega a 100 km al norte de la línea recta que une A y B. Desde ambas estaciones se envían

señales de radio simultáneamente a una velocidad de 290 000 km/s. Si la señal enviada desde A llega al barco 0,001 s antes de la enviada desde B, localiza la posición del barco ¿A qué distancia está de cada una de las estaciones? (tarea del tipo 8, Anexo 13C).

El componente cognitivo-instrumental del nivel de partida para resolver este problema incluye que el alumno sea capaz de: modelar problemas cuyas condiciones involucran posición relativa de puntos, argumentar la insuficiencia de los datos para calcular la longitud de un lado de un triángulo aplicando procedimientos de la geometría sintética, representar la distancia recorrida en función de la velocidad y el tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme, probar que un punto del plano pertenece a una hipérbola mediante la aplicación de la definición de hipérbola como lugar geométrico, transferir de la representación verbal de una hipérbola dada por sus focos y la longitud de su eje real a la ecuación de la hipérbola referida a su centro, determinar la abscisa de un punto de una hipérbola conociendo su ordenada y la ecuación referida a su centro y calcular la distancia entre dos puntos.

Los conocimientos necesarios para resolver estos tipos de tareas incluyen: las proposiciones referidas a la posibilidad de calcular la longitud de un lado de un triángulo conociendo otros de sus elementos, el modelo de movimiento de las señales de radio, el concepto de hipérbola como lugar geométrico, la relación existente entre la longitud de los semiejes y la semidistancia focal de la hipérbola, la ecuación de una hipérbola referida a su centro.

Para resolver los tipos de tareas descritos los alumnos deben tener habilidades para representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, calcular con números racionales y resolver ecuaciones cuadráticas incompletas y ecuaciones lineales.

Algunos de estos conocimientos y habilidades forman parte de los contenidos de la asignatura y otros corresponden a la Educación Preuniversitaria. El profesor debe conocer si los alumnos disponen de ellos. El dominio de los no disponibles lo puede propiciar mediante las tareas de la guía de preparación para la clase práctica.

La motivación debe dirigirse a la necesidad de ocuparse de la solución de la tarea y la vía de solución. Esta se puede desarrollar de la manera siguiente:

P: Durante el PEA de la Geometría Analítica no son muy frecuentes las tareas de contexto extramatemático, ahora tenemos la posibilidad de trabajar en la resolución de una de ellas.

La orientación hacia el objetivo se puede realizar de la forma siguiente:

P: Al resolver esta tarea pretendemos aplicar algunos de los procedimientos de transferencia estudiados en clases anteriores a la solución de una tarea de contexto extramatemático.

P: Plantea la tarea a los alumnos, les pide que trabajen en el proceso de su resolución utilizando para ello el PHG y los conocimientos de Geometría.

A: Trabajan de forma independiente en la comprensión de la tarea.

P: Puede ofrecer impulsos, si son necesarios, entre ellos: lee cuidadosamente la tarea; separa lo dado de lo buscado; confecciona una figura de análisis.

A: Trabajan de forma independiente en la elaboración de un plan de solución.

P: Los puntos A, B y P forman un triángulo; se conoce la longitud del lado  $\overline{AB}$  y de la altura relativa al lado  $\overline{AB}$ . Se pide calcular la longitud de los lados  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$ .

Si se cumpliera  $\overline{PA} = \overline{PB}$ , la altura relativa al lado  $\overline{AB}$  fuera mediana y se pudieran calcular las longitudes de los lados  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$  aplicando el teorema de Pitágoras ¿Se cumple esta condición?

A: Si denotamos por  $v$  la medida de velocidad de las señales de radio y por  $t_A$  y  $t_B$ , la medida de los tiempos en segundos que tarda la señal de radio en llegar de los puntos A y B al punto P, respectivamente, se tiene que  $d(P, A) = v \cdot t_A$  y  $d(P, B) = v \cdot t_B$ .

Como  $t_A \neq t_B$ , entonces  $d(P, A) \neq d(P, B)$  y por tanto  $\overline{PA} \neq \overline{PB}$ .

P: Como  $\overline{PA} \neq \overline{PB}$  no se pueden calcular las longitudes pedidas aplicando métodos de la geometría sintética ¿Qué podemos hacer?

A: Aplicar la Geometría Analítica.

P: Analizamos si el punto P pertenece a alguno de los lugares geométricos estudiados en Geometría Analítica (hipérbola, elipse o parábola), obtenemos la ecuación de ese lugar geométrico, calculamos la abscisa de P sustituyendo la ordenada en la ecuación y finalmente calculamos la distancia de P a los puntos A y B ¿Pertenece el punto P a una hipérbola, elipse o parábola?

A: Analizamos si P es un punto de una hipérbola de focos A y B. Se debe verificar: 1)  $d(P, B) - d(P, A)$  es constante, 2)  $|d(P, B) - d(P, A)| > 0$  y  $|d(P, B) - d(P, A)| < d(A, B)$ .

La tercera condición se cumple en vista de la desigualdad triangular. Para analizar las dos primeras se tiene que  $d(P, B) - d(P, A) = v(t_B - t_A) = 290\,000.0,001 = 290 > 0$ . Por tanto el punto P está situado en una hipérbola de focos A y B.

P: ¿Qué sistema de coordenadas es conveniente utilizar para obtener la ecuación de esta hipérbola referida a su centro?

A: Es conveniente utilizar un sistema de coordenadas cuyo origen sea el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ , el eje de las abscisas sea la recta AB y el eje de las ordenadas sea la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$ .

P: ¿Cuáles son las coordenadas de A, B y P en este sistema de coordenadas?

A: A(-200; 0), B(200,0) y la posición del barco P(x;100).

P: Para obtener la ecuación de la hipérbola debemos realizar una transferencia entre representaciones de este objeto geométrico ¿Cómo procedemos?

A: Aplicamos el PH-Teroga y utilizamos el software GeoGebra<sup>25</sup>, se obtiene la ecuación  $-759x^2 + 841y^2 = -15957975$ . Esta hipérbola tiene en común con la recta  $y=100$  los puntos  $P_1(-179,18; 100)$  y  $P_2(179,18; 100)$ , que corresponden a las posibles posiciones del barco. Como el punto A está más cerca del barco que el punto B, el punto  $P_1$  es el que satisface las condiciones del problema y  $d(P_1, A) = 102,14$  km y  $(P_1, B) = 392,14$  km.

2.3.5. Evaluación y control del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones en el componente académico

En los epígrafes anteriores se han descrito las etapas por las que transita la dinámica de la Teroga en el componente académico del PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática, el presente se dedica al análisis de la evaluación y el control.

La evaluación tiene el propósito de comprobar el cumplimiento de los objetivos previstos para la clase, un tema y el programa de la asignatura, en este caso referidos a la transferencia entre representaciones, y constituye, una vía para la retroalimentación y el perfeccionamiento del PEA. En todos los momentos del PEA debe estar presente esta función didáctica.

En las conferencias se debe evaluar y controlar el cumplimiento del o los objetivos propuestos y para ello el profesor utiliza distintas formas, entre ellas las preguntas orales.

Las evaluaciones pueden ser frecuentes, parciales o finales. Las principales vías para realizar la evaluación frecuente son las preguntas de control orales o escritas al inicio de las conferencias, la observación del desempeño de los alumnos en las clases prácticas, la revisión de las

---

<sup>25</sup> Se puede trabajar también con lápiz y papel.

actividades orientadas para el trabajo independiente extraclase y las preguntas escritas que se aplican al concluir algunas de las clases prácticas.

Las preguntas de control deben comprobar el dominio de los principales conceptos, proposiciones y procedimientos estudiados sobre la Teroga, algunos ejemplos son:

- Menciona tres de las formas que puede adoptar la representación verbal de una recta en el plano y exponga un ejemplo de cada una de ellas. Preguntas similares se pueden elaborar para el resto de los objetos geométricos estudiados.
- Dado el plano  $\alpha$  representado por  $x + y + z - 3 = 0$ . Explica cómo procedería para obtener una representación paramétrica de  $\alpha$ .

- ¿Cómo procederías para representar gráficamente la recta  $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ ? Identifica el tipo

y la forma de la RD y la RB.

Al concluir una clase práctica las tareas a proponer están encaminadas a comprobar el dominio de los procedimientos estudiados, para ese fin pueden utilizarse fundamentalmente las tareas de los tipos que se muestran en el Anexo 13B.

La evaluación parcial se orienta a comprobar el cumplimiento de los objetivos de uno o varios temas, debe incluir tareas de algunos de los tipos descritos en 2.2.2 y 2.2.3 y permitir evaluar indicadores de la dimensión cognitivo-procedimental (Anexo 4) del desempeño de los alumnos en la Teroga.

En las pruebas finales se comprueba el cumplimiento de los objetivos de la asignatura y estas deben incluir tareas de los mismos tipos planteados anteriormente y deben favorecer un mayor nivel de integración de los conocimientos y habilidades adquiridos.

La evaluación del desempeño de los alumnos en la Teroga en el componente académico debe estar dirigida también a las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional (Anexo 4) y para ello los métodos más apropiados son la observación y el análisis de los productos de la actividad.

El control permite al profesor realizar las correcciones necesarias en el PEA para que los resultados obtenidos se correspondan cada vez más con los esperados y valorar la efectividad de dicho proceso.

Los errores cognitivos de los alumnos en la transferencia entre representaciones se tipifican según las categorías utilizadas en el epígrafe 1.2.3.

#### 2.4. La dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente laboral e investigativo

La Teroga en el componente laboral e investigativo del PEA de la Geometría Analítica ocurre durante la resolución de tareas de los tipos señalados en 2.1.1. La práctica laboral es la forma organizativa donde más se pueden potenciar los procesos de este componente.

Durante la práctica laboral e investigativa se potencia el desempeño de los alumnos en la Teroga. En el tiempo que el alumno permanece en el centro de práctica laboral, bajo la dirección del profesor de la asignatura Geometría I, el alumno resuelve tareas orientadas para este componente (ver 2.1.1). También resuelve estas tareas sin la presencia del profesor en el centro de práctica y fuera de él.

La sesión inicial de la práctica laboral e investigativa correspondiente al PEA de la Geometría Analítica está destinada al tratamiento de la recta en el plano en la Educación Media Superior y particularmente a la transferencia entre representaciones de este objeto. En esta actividad la actuación del profesor debe estar dirigida a:

- Motivar a los alumnos para participar en la actividad a partir de la importancia del tema para su formación como profesores de Matemática del nivel medio.
- Orientar el objetivo de la actividad relacionando los contenidos estudiados en el PEA de la Geometría Analítica relativos a la transferencia entre las diferentes representaciones de la recta en el plano, con los que se estudian en la Educación Media Superior.
- Formar equipos de trabajo y asignar las tareas a realizar por cada uno de ellos.
- Comprobar si los alumnos comprendieron la tarea a resolver y en caso necesario reforzar la orientación de la tarea o de parte de ella.
- Comprobar que los equipos posean la bibliografía necesaria para resolver la tarea propuesta.
- Ofrecer recomendaciones específicas para cada uno de los incisos de la tarea, en caso de que ello sea necesario.
- Propiciar el trabajo en equipos.
- Evaluar y controlar el desempeño de los alumnos en la resolución de la tarea orientada.
- Dirigir la sesión plenaria en que los equipos exponen la solución dada a la tarea propuesta.
- Realizar las conclusiones de la actividad.

La actuación de los alumnos debe incluir:

- Aceptar la tarea mostrando una actitud de compromiso con el estudio.

- Preguntar acerca de la tarea, si no han comprendido la tarea o alguno de sus incisos.
- Integramse al trabajo del equipo en función de resolver la tarea asignada.
- Trabajar en la resolución de la tarea asignada.
- Mostrar disposición para exponer la solución de la tarea en la sesión plenaria.
- Mostrar disposición para resolver otras tareas.

En las sesiones intermedias destinadas a la Teroga en la práctica laboral e investigativa se realiza una sesión plenaria del trabajo realizado por los alumnos en los equipos a propósito de la resolución de la tarea propuesta. En esta sesión la actuación del profesor estará dirigida a:

- Motivar a los alumnos a que participen activamente partiendo de la importancia del tema para su formación profesional y orientar los objetivos de la actividad
- Observar y escuchar a los alumnos, realizar preguntas, propiciar que los alumnos superen las dificultades por sí mismos, aclarar dudas, ofrecer recomendaciones para tratar las dificultades detectadas, ofrecer recomendaciones para responder los incisos pendientes, ofrecer recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza de la Teroga en la escuela media y evaluar el desempeño de los alumnos.
- Evaluar y controlar el desempeño de los alumnos en la resolución de la tarea orientada.
- Realizar las conclusiones de la actividad.

Por su parte los alumnos en esta sesión deben:

- Exponer las respuestas dadas a incisos de la tarea y argumentar en representación de su equipo.
- Ofrecer recomendaciones y realizar preguntas a sus compañeros, prestar atención a sus compañeros y al profesor.

En la sesión final el profesor debe:

- Motivar a los alumnos para participar en la actividad y orientar el objetivo de esta.
- Dirigir la presentación pública de las ponencias.
- Ofrecer recomendaciones, formular preguntas, realizar conclusiones parciales y finales relacionadas con la ponencia presentada y evaluar el desempeño de los alumnos.
- Realiza las conclusiones de la actividad.

En esta sesión los alumnos deben:

- Presentar una síntesis de la ponencia elaborada, que ha sido entregada previamente al profesor utilizando medios informáticos a su alcance.
- Observar las exposiciones de sus compañeros, preguntar, valorar el desempeño propio y de

sus compañeros, realizar comentarios y complementar las exposiciones realizadas por sus compañeros.

Durante las consultas y tutorías concebidas para el componente laboral e investigativo:

- El profesor debe: crear un clima favorable, orientar hacia el objetivo de la actividad, recordar las tareas orientadas y motivar a los alumnos a que expongan los resultados obtenidos.
- El alumno debe: exponer los métodos utilizados y los resultados que ha obtenido al resolver la tarea asignada, plantear las dudas, solicitar al profesor sugerencias para continuar el trabajo y ofrecer sugerencias a sus compañeros cuando la consulta o tutoría sea grupal.
- El profesor debe ofrecer recomendaciones para tratar las dificultades detectadas y sugerir métodos y procedimientos para continuar el trabajo. También debe recomendar la consulta de fuentes bibliográficas y evaluar el desempeño en el trabajo realizado.

### Conclusiones del capítulo

En el capítulo se ha expuesto un modelo didáctico de la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática, que incluye la planificación y la dinámica de este proceso para los distintos componentes del proceso de formación del profesional.

La planificación se estructuró en tres etapas o fases: a largo, mediano y corto plazos para cada uno de los componentes.

En la planificación a largo plazo se deben determinar todos los casos posibles de transferencia entre representaciones de un objeto geométrico. Ello se realiza aplicando un procedimiento de nueve fases que se inicia con la identificación de los tipos de sistemas de coordenadas en los que se debe representar este objeto en el PEA y termina con la distribución de las transferencias por formas de organización del PEA y tipos de clase. En las fases intermedias del procedimiento se incluye la determinación de los tipos y formas de representación de cada objeto para cada sistema de coordenadas, así como de los casos posibles de transferencia intratipo y de transferencia intertipos en el mismo sistema de coordenadas.

La planificación específica a largo plazo del componente laboral e investigativo se ejecuta mediante un procedimiento que consta de cinco fases e incluye el análisis de documentos, la determinación de los tipos de tareas a realizar por los alumnos y la concepción de las formas de orientación, evaluación y control a utilizar.

Entre los resultados de las acciones de la planificación a largo plazo se encuentran el perfeccionamiento y complementación del programa y el plan calendario de la asignatura, el análisis de la bibliografía recomendada por este programa y la determinación de los tipos de tareas para el componente laboral e investigativo.

La planificación a mediano plazo incluye la concepción de los sistemas de clases, la elaboración de las tareas a realizar en la práctica laboral e investigativa y la coordinación de los horarios para la realización de las tareas del componente laboral e investigativo.

La planificación a corto plazo ofrece como resultado el perfeccionamiento de la preparación de las clases y las actividades para el componente laboral e investigativo.

La transferencia entre representaciones en el componente académico transcurre en cuatro fases: 1) formación y desarrollo del concepto de transferencia entre representaciones, conceptos auxiliares y conceptos subordinados, 2) elaboración del PH-Teroga, 3) aplicación del Programa Heurístico y 4) aplicación de los procedimientos de transferencia. La dinámica de este proceso en el componente laboral e investigativo se ha concebido mediante la resolución de tareas de diferentes tipos.

El modelo didáctico se elaboró en correspondencias con los fundamentos teóricos que se exponen en el Capítulo I de la tesis y contribuye al desarrollo de la didáctica de la Geometría al concebir una manera de planificar e implementar la Teroga en su PEA.

### III: EVALUACIÓN DEL MODELO SEGÚN EL CRITERIO DE EXPERTOS Y DE SU EFECTIVIDAD EN LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA

### CAPÍTULO III: EVALUACIÓN DEL MODELO SEGÚN EL CRITERIO DE EXPERTOS Y DE SU EFECTIVIDAD EN LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA

Este capítulo está compuesto por dos secciones, la primera contiene una evaluación del modelo didáctico elaborado mediante el procedimiento de comparación por pares (Crespo y Crespo, 2014) correspondiente al método de evaluación según el criterio de expertos y la segunda los resultados de la implementación del modelo en la práctica pedagógica mediante un pre-experimento en la Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”.

La utilización de estas dos vías permitió evaluar el modelo con el objetivo de perfeccionarlo para su aplicación.

#### 3.1. Evaluación del modelo según el criterio de expertos

El procedimiento aplicado para la medición de los indicadores de la calidad del modelo por expertos tiene sus orígenes en el procedimiento propuesto por el Comité Estatal para la Ciencia y la Técnica (CECT) de la extinta URSS (Evlanov y Kutusov, 1978) y en desarrollos posteriores de este (Campistrous y Rizo, 2000b; Cruz, 2006; Crespo y Crespo, 2014).

Tanto en la versión original del procedimiento como en sus versiones posteriores la evaluación según el criterio de expertos queda en el plano de la medición de los indicadores. En la tesis de doctorado de Ruiz (2007) se desarrolló un modelo estadístico que permite la medición de las dimensiones de la calidad de un modelo didáctico y de la propia calidad como constructo utilizando índices a partir de la medición de los indicadores mediante el procedimiento descrito en el párrafo anterior.

En esta tesis se aplica el procedimiento desarrollado por Ruiz que presupone la aplicación de las operaciones: selección de los expertos, definición y operacionalización del constructo objeto de evaluación; diseño de la medición de los indicadores, de las dimensiones y del constructo; elaboración de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y confiabilidad, recogida y procesamiento estadístico de los datos y análisis de los resultados.

### 3.1.1. Selección de los expertos

Para seleccionar los expertos se tomó como población a un conjunto de profesores de Matemática con experiencia en la formación inicial de profesores de Matemática, la mayoría de ellos dirigen o han dirigido el PEA de la disciplina Geometría. Se conformó así, un conjunto de 43 profesores creativos, con buena capacidad de análisis, espíritu crítico y autocrítico, disposición de colaborar en el trabajo y un desempeño profesional destacado (candidatos).

Para seleccionar los expertos que pudieran valorar el modelo se utilizó como constructo la competencia del candidato y como dimensiones de este constructo el nivel de conocimiento acerca de la Teroga y el grado de influencia de las fuentes de argumentación en los criterios. En este contexto se consideran como fuentes de argumentación para expertos tipo especialistas cinco factores determinados por Cruz (2006), los cuales el autor de esta tesis contextualizó al PEA de la Geometría Analítica. Los indicadores considerados son los siguientes:

1) Capacidad de análisis, 2) experiencia como profesor de Geometría Analítica (asignatura o tema de una asignatura), 3) experiencia en el desarrollo de investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, 4) conocimiento del estado actual de la Teroga en la formación inicial de profesores de Matemática y 5) comprensión del papel de la Teroga en la formación inicial de profesores de Matemática (Anexo 14).

Para la medición se utilizó un procedimiento basado en la autovaloración de los candidatos (Campistrans y Rizo, 2000b; Cruz, 2006, Crespo y Crespo, 2014). Según este procedimiento al nivel de conocimiento acerca de la Teroga se le asigna un número perteneciente a una escala de 11 valores al cual se le llama coeficiente de conocimiento y se denota por  $k_c$ .

La medición de los indicadores de la dimensión grado de influencia de las fuentes de argumentación en los criterios también se realizó mediante la autovaloración de los candidatos, pero utilizando una escala de cinco valores elaborada por Cruz (2006) a los que corresponden las categorías muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto (Anexo 15). La medición de la dimensión se realiza asignándole como valor la suma de los valores de sus indicadores a la cual se le llama coeficiente de argumentación y se denota por  $k_a$ .

La medición de la competencia de un candidato aplicando el procedimiento citado se realiza calculando la media aritmética del coeficiente de conocimiento y el coeficiente de argumentación a la cual se le llama coeficiente de competencia y se denota por  $k$ .

Para seleccionar o rechazar un candidato se compara su coeficiente de competencia con un valor prefijado  $k_0$  al cual se le llama punto de corte. En el procedimiento propuesto por el CECT se propone como punto de corte  $k_0=0,80$ . En la modificación realizada por Cruz a la escala se propone  $k_0=0,75$ .

En un análisis realizado por Ruiz y Quero (2018) a partir de la determinación de las 3125 variaciones de los valores posibles de los indicadores de la dimensión grado de influencia de las fuentes de argumentación en los criterios, según la escala propuesta por Cruz, se constató que al utilizar como punto de corte  $k_0=0,75$  se pueden aceptar como expertos a candidatos que no lo son.

Para resolver este problema se agregó un paso al procedimiento de selección de los expertos de modo que la decisión definitiva no resulta de la comparación del coeficiente de competencia de un candidato con el punto de corte, sino de la aplicación de los dos criterios de rechazo siguientes:

CR1: todo candidato cuyo coeficiente de conocimiento sea menor que 0,7 debe ser rechazado, independientemente del valor de su coeficiente de argumentación.

CR2: todo candidato que tenga algún indicador del grado de influencia de las fuentes de argumentación en las categorías “muy bajo” o “bajo” o más de un indicador en la categoría “medio”, debe ser rechazado independientemente de los valores del coeficiente de conocimiento y el coeficiente de argumentación.

De los 43 candidatos se aceptaron 30 como expertos, el menor valor del coeficiente  $k$  para los aceptados como expertos es 0,76 (Anexo 16). Entre ellos hay 14 (46,6 %) que desempeñan la función de profesor, 12 (40%) son profesores principales, dos (6,7%) son jefes de departamento y dos (6,7%) coordinadores de colectivos de carreras.

De estos docentes, 10 (33,3 %) poseen el grado científico de doctor, 20 (66,7 %) el grado académico de máster en ciencias y cinco (16,7 %) realizan estudios de doctorado. Del total de expertos, 10 (33,3 %) son profesores titulares y 20 (66,7 %) son profesores auxiliares.

La experiencia promedio de estos docentes en la formación de profesores de Matemática es de 27,5 años con una desviación estándar de 10,1; el promedio de años como profesor de Geometría Analítica es de 21,2 con una desviación típica de 9,8. El promedio de años de experiencia como profesores de Geometría Analítica en la formación de profesores de Matemática es de 21,1; con una desviación estándar de 10.

Los expertos seleccionados han participado en 34 investigaciones y publicado 38 artículos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica.

### 3.1.2. Definición y operacionalización del constructo objeto de evaluación

El objeto de evaluación en este caso lo constituye la “calidad del modelo didáctico de la Teroga” entendida como la colección de sus características que lo hacen aplicable en la planificación y dinámica del PEA de la Geometría Analítica. Su operacionalización se realizó teniendo en cuenta dimensiones determinadas por Schoenfeld (2000) para juzgar teorías, modelos y resultados de investigación en el área de la didáctica de la Matemática, utilizadas por Ruiz (2007) para evaluar un modelo didáctico. Las dimensiones consideradas son: 1) poder descriptivo, 2) alcance, 3) poder predictivo, 4) rigor y especificidad, 5) posibilidad de refutación y 6) poder de replicación (Schoenfeld, 2000, p.10; Meel, 2003, p. 44).

El poder descriptivo de un modelo didáctico está relacionado con su capacidad de representar de forma simplificada lo esencial del proceso modelado en correspondencia con el objetivo del estudio. Los indicadores del poder descriptivo son: 1) correspondencia del modelo con la esencia de la Teroga, 2) concepción de la planificación de la Teroga, 3) estructuración de la dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente académico del PEA de la Geometría Analítica, 4) estructuración de la dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente laboral e investigativo del PEA de la Geometría Analítica.

El alcance de un modelo didáctico se refiere a la amplitud del conjunto de situaciones en las que está presente el proceso modelado y distribución de estas situaciones en el PEA. Por tal razón, los indicadores de esta dimensión son: 1) variedad de transferencias entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica a las que se puede aplicar el modelo y 2) frecuencia de las situaciones donde es aplicable el modelo en el PEA de la Geometría Analítica.

El poder predictivo de un modelo didáctico es su capacidad para anticipar resultados en la actuación de los alumnos y el profesor antes de que ellos ocurran, gracias a la presencia de ciertas condiciones previas que proveen un contexto de actuación en una situación de aprendizaje. Por ello los indicadores del poder predictivo son: 1) pronóstico de la actuación esperada del profesor, dadas las condiciones previas necesarias, en las distintas situaciones de la Teroga, 2) pronóstico de la actuación esperada del alumno, dadas las condiciones previas necesarias, en las distintas situaciones de la Teroga y 3) tipificación de los errores cognitivos de los alumnos en la Teroga.

El rigor y especificidad de un modelo didáctico se refiere al ajuste del modelo al proceso modelado. Sus indicadores son: 1) definición de los conceptos fundamentales, 2) claridad y precisión del lenguaje utilizado y 3) pertinencia de los conceptos fundamentales.

La posibilidad de refutación de un modelo se refiere a su capacidad de contrastar el modelo en la práctica. Los indicadores de esta dimensión son: 1) especificación de las formas de organización del PEA donde se aplicará el modelo e 2) inclusión en el modelo de procedimientos para su implementación.

El poder de replicación del modelo didáctico es la capacidad del modelo para su implementación en distintas circunstancias y con diferentes alumnos y docentes. Los indicadores de esta dimensión son: 1) ajuste del modelo al diseño curricular de la carrera, 2) adaptación del modelo a las condiciones del proceso formativo, 3) correspondencia del modelo con el nivel de partida de la formación geométrica de los alumnos de la carrera y 4) correspondencia de la terminología utilizada en el modelo con la formación didáctica de los profesores que dirigen el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial.

### 3.1.3. Diseño de la medición de los indicadores, de las dimensiones y del constructo

Para la medición de los indicadores, de las dimensiones y del constructo se distribuyeron las variables estadísticas en tres niveles (Ruiz, 2007). En el primer nivel se incluyen las variables para indicadores cuyos valores se obtienen mediante la asignación de cada experto, al responder los ítems de una encuesta. En el segundo nivel, se consideraron las variables para indicadores, dimensiones y constructo; los valores de las variables para indicadores son el resultado de la asignación del grupo de expertos y se calculan mediante un procedimiento estadístico donde está implicada la inversa de una distribución normal. En el tercer nivel se ubican las variables para índices, las cuales se han concebido para indicadores, dimensiones y constructo.

- Diseño de la medición de los indicadores por los expertos del grupo. Variables del primer nivel

A cada uno de los indicadores se le asoció una variable estadística, cuya escala de medición está compuesta por los números 1, 2, 3, 4 y 5, que representan, respectivamente, las categorías: inadecuado, poco adecuado, adecuado, bastante adecuado y muy adecuado.

Para la medición de los indicadores se utilizaron matrices de valoración (Acuña, 2002), que contienen los criterios utilizados (Anexo 17).

- Diseño de la medición de los indicadores por el grupo de expertos. Medición de las dimensiones y el constructo. Variables de los niveles segundo y tercero

La medición de cada indicador a partir de las mediciones individuales ejecutadas por los expertos, se realizó utilizando el procedimiento estadístico propio de la comparación por pares.

Para la medición de las dimensiones, a cada una de ellas se le asoció como variable estadística, el n-uplo formado por las variables de sus indicadores. De igual manera se procedió con el constructo, al cual se le asignó como variable, el 6-uplo compuesto por las variables relativas a sus dimensiones. De esta manera, la medición de las dimensiones y del constructo se realizó indirectamente.

Para la medición de las variables de dimensión y de constructo se utilizó un índice (Zadu, 2004a; Campistrous, 2006; Ruiz, 2006, 2007). Los pasos descritos por Ruiz (2006) para construir un índice son:

- Convertir los elementos de las escalas de medición relativas a los indicadores (dimensión), en valores numéricos (los valores 1, 2, 3, 4 y 5, que designan categorías, se convierten en los números 0, 25, 50, 75 y 100 respectivamente).
- Igualar las nuevas escalas y determinar un coeficiente de ponderación para cada indicador (dimensión), en dependencia del peso que tenga cada uno en la variable (se consideró que todos los indicadores tenían igual peso y los coeficientes de ponderación utilizados para cada dimensión se determinaron utilizando la técnica de votación ponderada, la cual se aplicó a los mismos expertos que evaluaron los indicadores (Anexo 18), en el Anexo 19 se exponen los resultados de la votación.
- Escribir la fórmula del índice para cada dimensión y para el constructo (Anexo 20) y realizar los cálculos correspondientes (para calcular el índice se utilizó una hoja Excel 10 para Microsoft Windows).

Para una valoración de las dimensiones y del constructo a las categorías inadecuado, poco adecuado, adecuado, bastante adecuado y muy adecuado, se les asociaron los intervalos de valores de índices [0, 20), [20, 40), [40, 60), [60, 80) y [80, 100], respectivamente; de manera que conociendo el valor del índice, se puede determinar la categoría de la dimensión o del constructo.

#### 3.1.4. Elaboración de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y confiabilidad. Recogida y procesamiento estadístico de los datos

Para la recogida de los datos se utilizó un cuestionario, diseñado según una escala tipo Likert, en el que cada ítem se corresponde con uno de los indicadores (Anexo 17). La respuesta a cada ítem se corresponde con el valor de una variable de indicador del primer nivel y se asigna por el experto, siguiendo criterios de valoración preestablecidos.

Para la determinación de los valores de las variables de indicadores del segundo nivel se utilizó un sistema diseñado por Ruiz (2007) –en Excel para Windows– que los calcula automáticamente, mediante un procedimiento basado en el modelo de Torgerson (Campistrous y Rizo, 2000b).

En el instrumento también se incluyó una pregunta abierta con el objetivo de recoger sugerencias de los expertos para perfeccionar el modelo didáctico sometido a su consideración y preocupaciones referidas a su aplicación.

La validez y confiabilidad del tipo de cuestionario utilizado ha sido probado por otros investigadores en la elaboración y aplicación del método de evaluación por expertos. La validez de contenido se ha garantizado al emplear dimensiones validadas en la investigación precedente, y haber tenido en cuenta las opiniones de los expertos en la determinación de los indicadores y en la conformación de los criterios para su medición.

#### 3.1.5. Análisis de los resultados

El análisis de los resultados se realizó tanto a nivel de indicadores como a nivel de dimensiones y de constructo.

- Análisis de los resultados a nivel de indicadores

Al analizar los resultados de la medición de los indicadores por el grupo de expertos (Anexo 21), resultaron los juicios siguientes:

1) Los indicadores  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_5$ ,  $I_6$ ,  $I_7$ ,  $I_9$ ,  $I_{10}$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{13}$ ,  $I_{14}$ ,  $I_{15}$  e  $I_{18}$  fueron evaluados de muy adecuados, lo que significa según los criterios de valoración (Anexo 17) que:

- El modelo representa las características esenciales de la Teroga, tiene en cuenta las relaciones y su descripción es precisa.

- Los procedimientos didácticos de la planificación de la Teroga concebidos en el modelo se ajustan totalmente a la esencia de la planificación y su descripción es precisa.
- Las fases de la dinámica de la Teroga en el componente académico se ajustan totalmente a la esencia de este proceso y su descripción es precisa.
- El modelo se puede aplicar en todas las transferencias entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica plana y espacial cualquiera sea el sistema de coordenadas de la RD y la RB.
- El modelo es aplicable en el estudio de todos los objetos de la Geometría Analítica.
- En el modelo se pronostica la actuación esperada del profesor, dadas las condiciones previas necesarias, en las distintas situaciones de la transferencia entre representaciones.
- Se describen con precisión los tipos de errores cognitivos más comunes que pueden cometer los alumnos en la Teroga.
- Se definen los conceptos fundamentales, las definiciones cumplen los requisitos exigidos y todos estos conceptos tienen utilidad para identificar, describir y explicar la Teroga.
- Se especifican las formas de organización del PEA de la Geometría Analítica donde se aplicará el modelo aprovechando las potencialidades de los componentes del proceso de formación.
- En el modelo se incluyen y ejemplifican todos los procedimientos necesarios para su implementación.
- El modelo se corresponde con el diseño curricular de la carrera y aporta ideas novedosas de la Teroga para todos los componentes del proceso formativo.
- La terminología utilizada en el modelo se corresponde con la formación didáctica de los profesores que dirigen el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.

2) Los indicadores  $I_4$ ,  $I_8$ ,  $I_{11}$ ,  $I_{16}$  y  $I_{17}$  fueron evaluados de bastante adecuados, lo que significa según los criterios de valoración (Anexo 17) que:

- Los tipos de tareas para el componente laboral e investigativo se ajustan totalmente a la esencia de la Teroga en este componente y la proyección de la actuación del profesor y los alumnos en las actividades es precisa en algunos casos y general en otros.
- En el modelo se pronostica la actuación esperada del alumno, dadas las condiciones previas necesarias, en la mayoría de las situaciones de la transferencia entre representaciones.
- El lenguaje utilizado es claro y preciso en la mayoría de las ocasiones.

- El modelo se adapta a las condiciones existentes para el desarrollo del componente académico y requiere de algunas condiciones no existentes en el componente laboral e investigativo.
- Para la aplicación del modelo se requiere de una formación geométrica que poseen algunos alumnos de la carrera y los demás la pueden adquirir en el PEA de la Geometría Analítica.

Para determinar si existe concordancia entre los expertos en las calificaciones otorgadas a cada ítem se aplicó la prueba de hipótesis para el coeficiente de concordancia de rangos de Kendall (Egaña, 2010, p.139). Las hipótesis estadísticas consideradas son:

$H_0$ : no existe concordancia entre los expertos en las calificaciones.

$H_1$ : existe concordancia entre los expertos en las calificaciones.

Utilizando la versión 22 del software SPSS se calculó el coeficiente de concordancia de rangos de Kendall ( $W= 0,192$ ) y el estadígrafo de prueba  $\chi^2 = 97,95$ . Al calcular el percentil correspondiente a 0,99 de la distribución Chi-cuadrado inversa de 17 grados de libertad, resulta  $\chi^2_{0,99} (17)= 33,41$ . Como  $33,41 < 97,95$  se rechaza la hipótesis nula  $H_0$ , es decir, se puede afirmar que existe concordancia entre los expertos en las calificaciones otorgadas, con un nivel de significación de 0,01.

- Análisis de los resultados a nivel de dimensiones y de constructo

En el cálculo de los índices de las dimensiones y el constructo objeto de evaluación cuyo valor pertenece al intervalo [0,100] resultó que a todas las dimensiones del modelo corresponde un índice ubicado en la categoría muy adecuado, a la dimensión “Poder de replicación” corresponde el menor índice (87,5) y a la calidad del modelo corresponde un índice (94,6) situado en la categoría muy adecuado (Anexo 22).

- Análisis de las respuestas a la pregunta abierta

En las respuestas de los expertos a la pregunta abierta se ofrecen opiniones favorables al modelo. En relación con el poder descriptivo, dos expertos expresaron recomendaciones relativas a la necesidad de proyectar con mayor precisión la actuación del profesor y de los alumnos en algunas actividades del componente laboral e investigativo y perfeccionar la representación gráfica del modelo didáctico.

Concerniente al rigor y especificidad, tres expertos expresaron su preocupación por el empleo de términos relativos a la teoría de las representaciones que no son usuales en el lenguaje tradicionalmente utilizado en el PEA de la Geometría Analítica.

Respecto al poder de replicación, cuatro expertos expresaron preocupaciones relacionadas con la baja preparación de los alumnos que ingresan a la carrera en los contenidos geométricos de la Educación General y tres expertos con el uso de términos relativos a la teoría de las representaciones desarrollados en la tesis, algunos de los cuales no son usuales para los profesores que dirigen el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.

Las sugerencias y preocupaciones de los expertos contribuyeron al perfeccionamiento del modelo. Respecto al poder descriptivo se realizaron modificaciones en su representación gráfica y se perfeccionó la proyección de la actuación del profesor y los alumnos en las actividades del componente laboral e investigativo.

La preocupación por el uso de conceptos relativos a la teoría de las representaciones que surgió en la valoración del rigor y especificidad y del poder de replicación, se ha tenido en cuenta en los fundamentos teóricos que sustentan el modelo al dedicar el mayor espacio posible a estos conceptos, en la primera fase de la dinámica de la Teroga dedicada a la formación y desarrollo del concepto de representación, conceptos auxiliares y conceptos subordinados; en la elaboración de un material didáctico relativo a tales conceptos y en las recomendaciones para la aplicación del modelo.

La preparación de los profesores de Geometría Analítica en la teoría de las representaciones necesaria para aplicar el modelo se puede lograr mediante diferentes vías de superación, particularmente mediante la autosuperación.

El bajo nivel de preparación en los contenidos geométricos que poseen los alumnos que ingresan a la carrera dificulta el aprendizaje independientemente de que se utilice este u otro modelo didáctico de la Teroga. Además en el cuerpo de la tesis se ofrecen recomendaciones para el tratamiento de las funciones didácticas y en particular para el aseguramiento del nivel de partida.

Cada profesor, a partir del diagnóstico, puede decidir el nivel de complejidad de las tareas que resolverán sus alumnos siempre que no se incumplan los objetivos del programa de la disciplina y asignatura.

### 3.2. Experimentación del modelo en la práctica pedagógica

En esta sección se exponen los resultados de la implementación del modelo en la práctica pedagógica mediante un pre-experimento.

### 3.2.1. Organización del pre-experimento

- Diseño pre-experimental elegido

La implementación del modelo elaborado, concebida como la puesta en práctica de sus etapas, se realizó mediante un pre-experimento pedagógico en la modalidad de grupo único solo con medida post (Borges, 2006, p.173).

La elección de un diseño pre-experimental responde a que la matrícula de la carrera en la universidad es baja por lo que resulta imposible la utilización de cualquier tipo de diseño experimental.

- Selección de la población, la muestra y su justificación

La unidad de estudio que se utilizó en la investigación es el alumno que se forma como profesor de Matemática, pues es el que se beneficiará de los resultados de la investigación cuando está se aplique (Supo, 2014).

Para la realización del pre-experimento se utilizó como población a los estudiantes del grupo de tercer año de la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física, de la Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez” quienes estudiaban la asignatura Geometría I (Geometría Analítica) bajo la dirección del autor de esta tesis. No fue necesario seleccionar una muestra pues la matrícula era pequeña.

- Operacionalización de la variable dependiente

La variable independiente en el pre-experimento es la implementación del modelo didáctico y la variable dependiente el desempeño del alumno en la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

En el experimento se utilizó la operacionalización de la variable dependiente descrita en el capítulo I (Anexo 4).

- El diseño de la medición. Las tareas evaluativas y el método de interpretación

El triángulo de la evaluación está constituido por un modelo de cómo los alumnos aprenden, tareas que estos deben resolver para demostrar su aprendizaje y un método de interpretación para hacer inferencias a partir de la evidencia (Pellegrino, Chudowsky y Glaser, 2001).

En las dimensiones e indicadores del “desempeño del alumno en la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica”, se sintetiza el modelo de cómo

transcurre este proceso en los alumnos. En el presente apartado se expone lo referido a las tareas y al método de interpretación.

Los tipos de tareas para la evaluación del proceso, en el componente académico se corresponden con los expuestos en el epígrafe 2.2.4 del capítulo II (Anexo 13B), con la particularidad de que el alumno puede o no conocer el procedimiento de transferencia. Para el componente laboral e investigativo se corresponden con los expuestos en el epígrafe 2.1.1.

La medición de los indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional se realizó mediante la observación del desempeño de los alumnos en la actividad y la comunicación durante la resolución de las tareas de aprendizaje (Anexo 2).

El método de interpretación utilizado se basa en el uso de escalas ordinales y de procedimientos de medición mediante los cuales se asignan al constructo y a cada indicador y dimensión un valor de su escala. La escala de medición de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional y de sus indicadores, está compuesta por las categorías: bien, regular y mal, y la del constructo y la dimensión cognitivo-procedimental, está formada por los valores: muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto.

La medición de la variable dependiente a partir de la medición de las dimensiones, así como la medición de las dimensiones a partir de sus indicadores se realizó utilizando índices. Los procedimientos de medición de la dimensión cognitivo-procedimental, se basan en la aplicación de un modelo estadístico (Anexo 23) del mismo tipo que el elaborado por Ruiz (2007), pero que incluye la posibilidad de la triangulación de datos y métodos (Rodríguez, Pozo y Gutiérrez, 2006).

El procesamiento de los datos se realizó mediante la hoja de cálculo Excel 2010 para Windows, con el uso de un conjunto de fórmulas creadas por el autor de esta tesis que permitieron obtener los datos de la medición del desempeño de cada alumno en la transferencia entre representaciones.

En el modelo estadístico se concibe el cálculo de índices individuales para medir el desempeño de los alumnos por indicadores, subdimensiones de primer nivel, subdimensiones de segundo y dimensión, teniendo en cuenta el peso relativo que tiene cada indicador y subdimensión. Primero se calcularon los índices individuales para cada alumno por indicadores, subdimensiones de primer nivel, subdimensiones de segundo nivel y en la dimensión cognitivo-procedimental y después el correspondiente al constructo.

Para el análisis de los datos a nivel de la población se utilizaron gráficos de barra.

- La planificación del pre-experimento

Para representar simbólicamente el desarrollo del pre-experimento se utilizaron las notaciones de Campbell-Stainly (1966) de modo que se denotó con X la implementación del modelo y con la letra O con un subíndice las mediciones realizadas.

La medición del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica se realizó mediante dos pruebas ( $O_1$  y  $O_2$ ) y el análisis de los productos del proceso pedagógico ( $O_3$ ), complementadas con la observación de su desempeño durante la implementación del modelo en los componentes académico y laboral e investigativo ( $O_4$ ) (Anexo 2). Las pruebas aportaron datos sobre los indicadores correspondientes a las subdimensiones 1.1, 1.2 y 1.3, el análisis de los productos del proceso pedagógico permitió medir los indicadores de las subdimensiones 1.4 y 1.5.

La observación contribuyó a la evaluación de todos los indicadores de la dimensión cognitivo-procedimental y fue el método fundamental para medir los indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional.

La primera prueba ( $O_1$ ) se aplicó al concluir el estudio del tema 2 “Rectas y Planos” (Anexo 24, cuestionarios A y B), la segunda ( $O_2$ ) al concluir el estudio del tema 3 “Curvas y Superficies de Segundo Grado” (Anexo 24, cuestionarios C y D). El pre-experimento se llevó a cabo según el esquema X  $O_1$   $O_2$   $O_3$   $O_4$ .

### 3.2.2. Desarrollo del pre-experimento

- Descripción de la implementación del modelo didáctico

Aquí se describe la implementación del modelo didáctico, por lo que se incluye la planificación y la dinámica de la Teroga.

Etapa de planificación.

Para la planificación a largo plazo se aplicó el procedimiento expuesto en el epígrafe 2.1.1 del capítulo II, de manera que se determinaron los casos posibles de transferencia entre representaciones de los diferentes objetos geométricos, se identificaron y elaboraron procedimientos de transferencias, se ordenaron y distribuyeron las transferencias en el PEA.

Se analizaron, además, la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura y los documentos rectores de la carrera respecto a su relación con la Teroga, se proyectó el

tratamiento de la Teroga en las actividades de la práctica laboral e investigativa, se crearon las condiciones en el centro de práctica, se elaboraron las tareas a realizar por los alumnos y se concibieron las formas de orientación, evaluación y control a utilizar.

Como parte de la planificación a mediano y corto plazos se elaboraron los sistemas de clases y el plan de cada clase, así como las actividades a realizar en el componente laboral e investigativo y las consultas y tutorías.

Descripción de la dinámica de la transferencia.

La dinámica transcurrió según lo descrito en la sección 2.2 del capítulo II siguiendo las cuatro fases previstas para el componente académico y las actividades planificadas para el componente laboral e investigativo.

La primera fase de la dinámica en el componente académico comenzó en la segunda conferencia del tema 1 "Vectores" donde se logró que los alumnos comprendieran el concepto de estructura matemática y citaran ejemplos de este concepto.

En las clases correspondientes a los temas 2 y 3 se continuó con la formación y desarrollo de los conceptos previstos, en particular la primera clase del tema 2 se dedicó a la formación de conceptos auxiliares y subordinados al concepto de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

Se observó que los alumnos generalmente identifican el tipo y la forma de la RD y la RB y representan simbólicamente la transferencia. La principal dificultad en la representación gráfica de la transferencia estuvo en la elaboración de la leyenda, este tipo de representación favoreció la clasificación de las transferencias en directas o compuestas por parte de los alumnos.

La segunda fase comenzó en el tema 2 durante la conferencia dedicada al estudio de la recta en el plano, como se describe en 2.2.2, y continuó durante las clases prácticas correspondientes a ese objeto geométrico. La duración en el tiempo de esta fase fue diferente para cada alumno.

La tercera fase comenzó para cada alumno en momentos diferentes, por los motivos explicados en el párrafo anterior, pero al concluir el tema 2 todos transitaban por la fase de aplicación del PH-Teroga. Esta fase se desarrolló también en las actividades del componente laboral e investigativo.

La cuarta fase se desarrolló durante el estudio de los temas 2 y 3 y tuvo lugar en el componente académico y el componente laboral e investigativo.

- Evaluación del desempeño de los alumnos en la Teroga después de la implementación del modelo

Resultados de la medición de los indicadores de la dimensión cognitivo-procedimental.

A esta dimensión corresponden 50 indicadores que se midieron varias veces mediante dos pruebas, el análisis de los productos del proceso pedagógico y la observación del desempeño de los alumnos en cada componente del proceso de formación. La medición se realizó utilizando la matriz de valoración que se muestra en el Anexo 5.

En el Anexo 25 (A, B, C, D, E) se muestra, para cada alumno, el índice relativo a cada indicador, así como el índice promedio obtenido.

Los indicadores a los que corresponde el menor índice promedio son:

De la subdimensión “Elaboración de un procedimiento de transferencia”:

- Esbozo de un procedimiento para la transferencia (46,2), debido a que 5 alumnos (38,4%) elaboraron un procedimiento correcto, 4 (30,8%) lo hicieron de forma parcialmente correcta y 4 (30,8%) elaboraron procedimientos incorrectos.
- Fundamentación del procedimiento (44,2), pues 4 alumnos (30,8%) fundamentaron correctamente, 4 (30,8%) lo hicieron de forma parcialmente correcta y 5 (38,4%) lo hicieron incorrectamente.

De la subdimensión “Realización de la transferencia”:

Ejecución del procedimiento con lápiz y papel (47,5), ya que 4 alumnos (30,8%) lo ejecutaron correctamente, 2 (15,3%) cometieron solo errores de cálculo, 3 (23,1%) cometieron errores que no fueron de cálculo, pero obtuvieron una representación del mismo tipo y forma que la buscada y 4 (30,8%) no ejecutaron el procedimiento o lo hicieron de forma incorrecta.

De la subdimensión “Evaluación del proceso de transferencia”:

- Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado (38,5), porque 1 alumno (7,8%) determinó si la representación era única y argumentó, 7 (53,8%) ofrecieron una argumentación incompleta, y 5 (38,4%) no comprobaron, ni argumentaron correctamente.
- Determinación de si existen otros procedimientos para realizar la transferencia (40,4), debido a que 5 alumnos (38,4%) analizaron si existían varios procedimientos además del

utilizado, 2 (15,3%) analizaron la existencia de únicamente otro procedimiento y 6 (46,2%) no analizaron la existencia de otro procedimiento.

De la subdimensión “Resolución de ejercicios cuya finalidad es la transferencia”:

Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado (42,6), ya que 2 alumnos (15,4%) determinaron si la representación era única y argumentaron, 6 (46,2%) ofrecieron una argumentación incompleta, y 5 (38,5%) no comprobaron, ni argumentaron correctamente.

De la subdimensión “Resolución de problemas utilizando la transferencia como herramienta”:

- Representación de los datos del problema en el sistema coordenadas elegido (46,2), pues 6 alumnos (46,1%) lo representaron correctamente, 1 (7,8%) cometió errores al representar uno de los datos y 6 (46,1%) cometieron errores al representar más de un dato.
- Transferencia entre representaciones (38,5), debido a que 4 alumnos (30,8%) realizaron la transferencia correctamente, 2 (15,4%) cometieron errores de cálculo al realizarla y 7 (53,8%) no realizaron la transferencia o lo hicieron de forma incorrecta.
- Trabajo con la o las representaciones obtenidas (34,6), porque 4 alumnos (30,8%) trabajaron con las representaciones y obtuvieron una solución del problema, 1 (7,7%) trabajó, pero cometió dos errores y 8 (61,5%) cometieron dos o más errores.
- Comprobación de que la solución encontrada satisface las exigencias del problema (38,5), ya que 4 alumnos (30,8%) realizaron correctamente la comprobación en el problema original, 2 (15,4%) comprobaron en una representación intermedia y 7 (53,8%) no comprobaron o lo hicieron de forma incorrecta.

De la subdimensión “Análisis, valoración y complementación de libros respecto a la transferencia entre representaciones”:

Descripción de la correspondencia entre el conjunto de las transferencias entre representaciones de un objeto geométrico y la colección de ejercicios de un libro (46,2), pues 3 alumnos (23,1%) en la descripción incluyeron las transferencias a las que no les correspondió ningún ejercicio, aunque omitieron hasta dos de ellas, 6 (46,1%) omitieron tres o cuatro transferencias y 4 (30,8%) omitieron más de cuatro.

De la subdimensión “Diagnóstico del nivel de desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica”:

- Análisis de los resultados de la prueba y descripción del desempeño cognitivo de los alumnos (46,2), debido a que 2 alumnos (15,4%) describieron los logros y los errores cognitivos de cada alumno y los del grupo en correspondencia con los resultados de la prueba, 8 (61,5%) describieron los logros o los errores cognitivos (pero no ambos) en correspondencia con los resultados de la prueba y 3 (23,1%) lo hicieron sin existir correspondencia con los resultados de la prueba.
- Diseño de un plan de acciones para el tratamiento de las dificultades en la transferencia entre representaciones (42,3), porque 1 alumno (7,7%) formuló correctamente las acciones y estas cubrieron el tratamiento de las dificultades identificadas, 9 (69,2%) elaboraron las acciones, pero estas cubrían entre el 60% y el 90% de las dificultades identificadas y 3 (23,1%) formularon incorrectamente las acciones o estas cubrían menos del 60% de las dificultades.

Los indicadores a los que corresponde el mayor índice son:

De la subdimensión “Resolución de ejercicios cuya finalidad es la transferencia”.

- Identificación de la RD y de la RB (98,1).
- Conocimiento de los pasos del procedimiento (94,6).

De la subdimensión “Análisis y valoración de programas de Matemática del nivel medio respecto a la transferencia entre representaciones”:

- Identificación de la unidad donde se concibe el estudio de un objeto geométrico (96,2).
- Identificación de los objetivos donde se incluye la transferencia entre representaciones de un objeto geométrico.
- Identificación en el contenido de los tipos de representación de un objeto geométrico (88,5).

De la subdimensión “Análisis, valoración y complementación de libros respecto a la transferencia entre representaciones”:

- Identificación de los tipos de representación de un objeto geométrico (92,3).

De la subdimensión “Diagnóstico del nivel de desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica”:

Calificación de pruebas de los alumnos de la Educación Media (88,5).

De la subdimensión “Elaboración de un informe sobre la experiencia”:

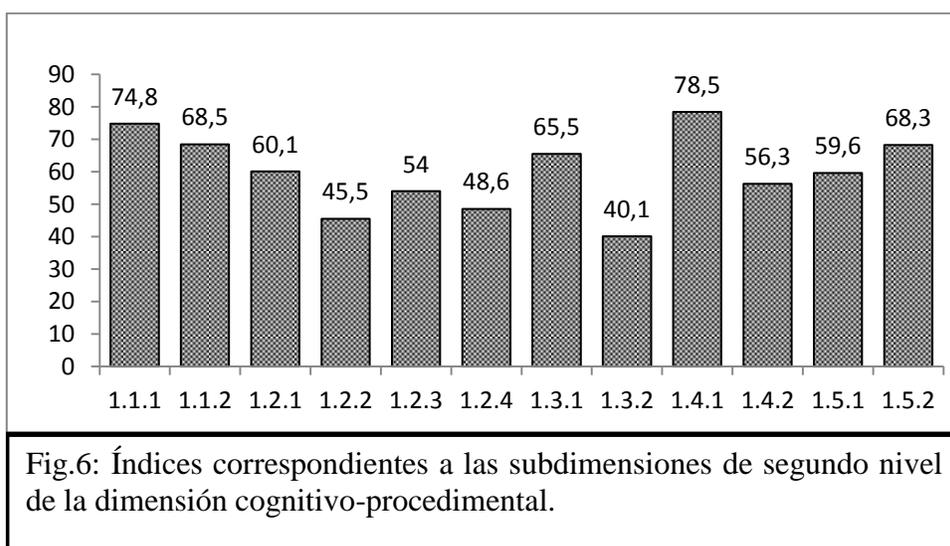
Estructuración del informe (88,5).

De la subdimensión “Identificación de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones y argumentación”:

Identificación del tipo de una representación y argumentación (84,4).

Resultados de la medición de las subdimensiones de segundo nivel de la dimensión cognitivo-procedimental.

En el Anexo 25F se muestra, para cada alumno, el índice relativo a cada subdimensión, así como el índice promedio obtenido y en la Figura 6 se muestran los índices promedios de cada subdimensión de segundo nivel.



Las subdimensiones a las que corresponde el menor índice son:

- Resolución de problemas utilizando la transferencia como herramienta (40,1).
- Elaboración de un procedimiento de transferencia entre representaciones de un objeto de la Geometría Analítica (45,5).
- Evaluación del proceso de transferencia (48,6).
- Análisis, valoración y complementación de libros respecto a la transferencia entre representaciones (56,3).

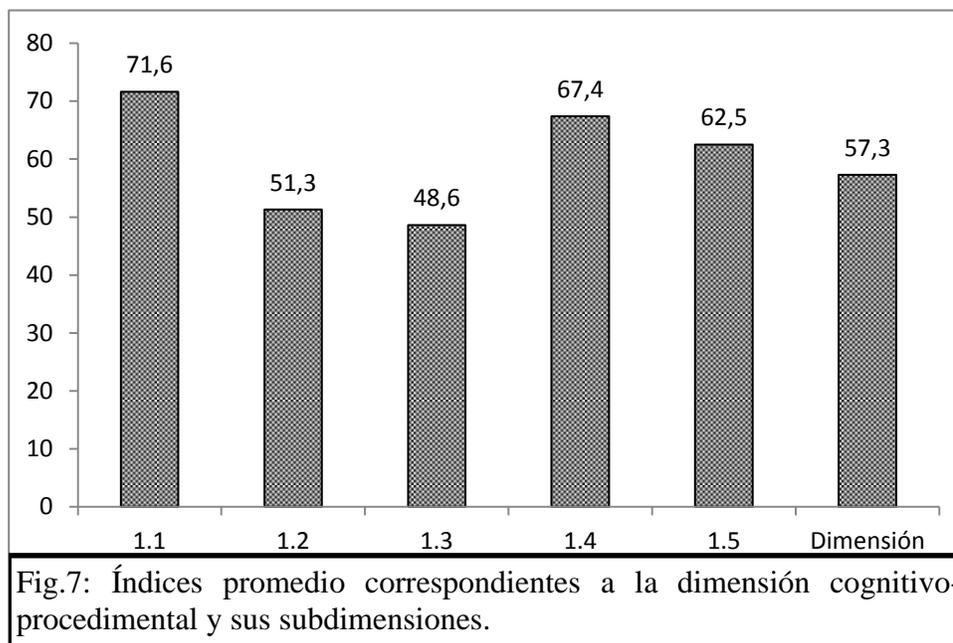
Los mayores índices corresponden a las subdimensiones:

- Análisis y valoración de programas de Matemática del nivel medio respecto a la transferencia entre representaciones (78,5).
- Identificación de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones y argumentación (74,8).

- Ejemplificación de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones y argumentación (68,5).
- Resolución de ejercicios cuya finalidad es la transferencia (65,5).

Resultados de la medición de las subdimensiones de primer nivel y de la dimensión cognitivo-procedimental.

En la Figura 7 se muestran los índices promedios correspondientes a las subdimensiones y a la dimensión.



El mayor índice corresponde a la subdimensión “Dominio de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones en el contexto de la Geometría Analítica” (71,6) y el menor a la “Aplicación de procedimientos de transferencia” (48,6).

A la dimensión cognitivo-procedimental corresponde un índice de 57,3 que se ubica en la categoría medio.

Resultados de la medición de la dimensión afectivo-motivacional (Anexo 25G).

La medición de los indicadores de esta dimensión se realizó utilizando la matriz de valoración que se muestra en el Anexo 5.

En la Figura 8 se muestran los índices correspondientes a los indicadores y la dimensión.

El índice promedio de esta subdimensión es 67,7; corresponde el mayor índice al indicador “interés por resolver las tareas vinculadas a la práctica laboral e investigativa” (88,5) y el menor, al indicador “perseverancia ante la complejidad de las tareas” (53,8).

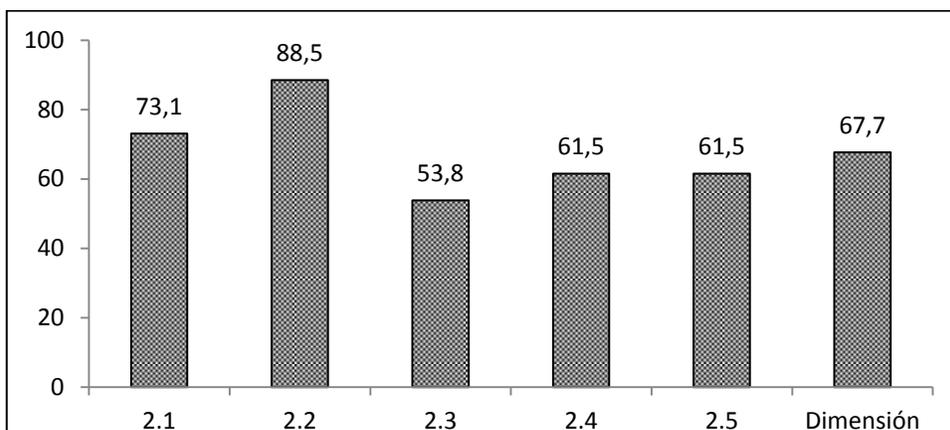


Fig. 8: Índices correspondientes a la dimensión afectivo-motivacional y sus indicadores.

El índice promedio de esta subdimensión es 67,7; corresponde el mayor índice al indicador “interés por resolver las tareas vinculadas a la práctica laboral e investigativa” (88,5) y el menor, al indicador “perseverancia ante la complejidad de las tareas” (53,8).

Resultados de la medición de la dimensión comunicacional (Anexo 25H y Anexo 25I).

En el Anexo 5 se muestra la matriz de valoración utilizada para medir los indicadores correspondientes a esta dimensión. Los indicadores con índice más alto son:

- Estilo de comunicación (92,3).
- Atención prestada a las explicaciones de los alumnos (88,5).

Los índices más bajos se obtienen en los indicadores siguientes:

- Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor (46,2).
- Utilización de la terminología matemática, en particular la relativa a la teoría de las representaciones (46,2).

En la Figura 9 se muestran los índices correspondientes a las subdimensiones y la dimensión.

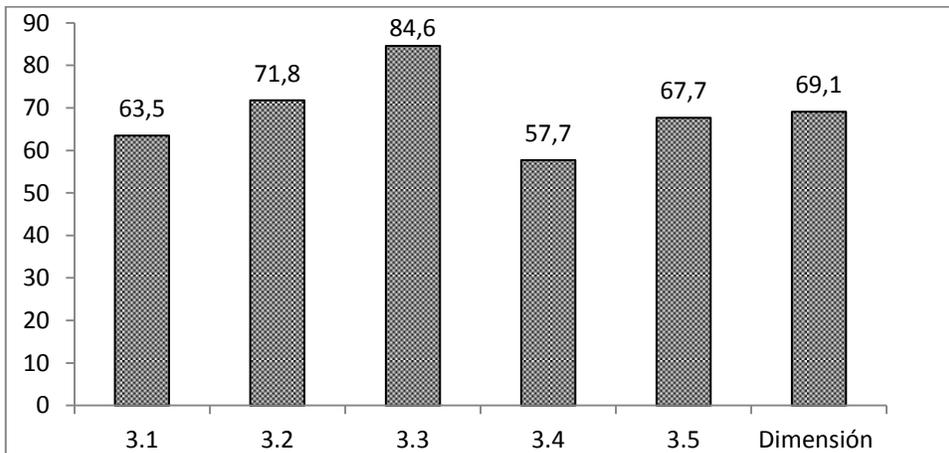


Fig.9: Índices correspondientes a la dimensión comunicacional y sus subdimensiones.

La subdimensión a la que corresponde el índice más alto es “comunicación con sus alumnos de la práctica laboral e investigativa”(84,6) y el menor, a la “comunicación matemática oral” (57,7). A la dimensión corresponde un índice de 69,1.

Resultados de la medición del constructo (Anexo 25J y Anexo 25K).

En la Figura 10 se muestra el comportamiento, por categorías, del índice de cada alumno.

De los 13 estudiantes, alcanzan un índice muy alto dos (15,4%), alto seis (46,1%), medio, cuatro (30,8%) y bajo uno (7,7%).

El mayor índice que alcanza un alumno es de 96,7 y el menor de 21,2.

Al constructo corresponde un índice promedio de 62,8 que se ubica en la categoría alto.

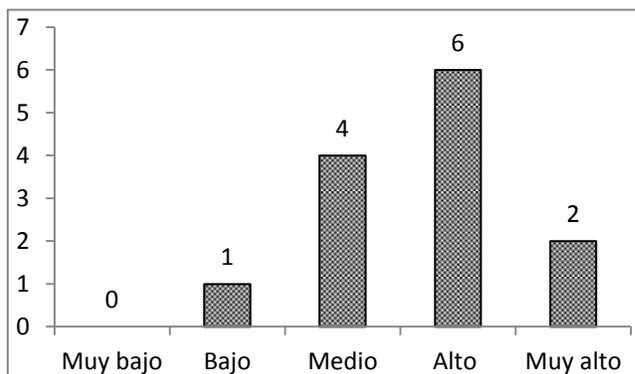


Fig. 10: Comportamiento del índice de los alumnos por categorías.

## Conclusiones del capítulo

En el capítulo se han expuesto los resultados de la evaluación según el criterio de expertos del modelo didáctico elaborado y de su implementación en la práctica mediante un pre-experimento pedagógico.

En la evaluación del modelo según el criterio de expertos, realizada mediante el procedimiento de comparación por pares, se obtuvieron juicios de valor que ubican a 13 de los 19 indicadores utilizados, en la categoría muy adecuado y a los seis restantes en la categoría bastante adecuado. Todas las dimensiones y la calidad del modelo fueron valoradas como muy adecuadas.

La implementación experimental del modelo en la práctica pedagógica se desarrolló según lo previsto y permitió comprobar su efectividad en el grupo de alumnos sometidos al estudio. El desempeño en la Teroga de los alumnos que participaron en el pre-experimento fue evaluado de muy alto en dos alumnos, de alto en seis, de medio en cuatro y de bajo en uno.

Resultó de gran utilidad para hacer inferencias a partir de la evidencia el método de interpretación asociado al modelo estadístico elaborado, que permitió realizar un análisis de los resultados de cada una de las observaciones del desempeño, productos del proceso pedagógico y pruebas aplicadas.

## CONCLUSIONES

Tanto en Cuba como en el extranjero se concede importancia al trabajo con las representaciones en el PEA de la Matemática. En Cuba ha sido incluido en las Líneas Directrices para la Enseñanza de la Matemática y en los lineamientos correspondientes al enfoque metodológico general de la asignatura.

En las fuentes de información consultadas en el desarrollo de esta investigación se trata la transferencia entre representaciones, pero las contribuciones identificadas son limitadas para la planificación y dinámica de este proceso en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.

En la investigación realizada el concepto central es el de transferencia entre representaciones y para su estudio ha sido necesario el desarrollo de una concepción de la representación de los objetos de la Geometría Analítica.

En la construcción de los fundamentos teóricos del modelo didáctico elaborado fueron de mucha utilidad: la teoría del conocimiento del materialismo dialéctico, la psicología histórico-cultural, la pedagogía, la didáctica general y la didáctica de la Matemática desarrollada por investigadores cubanos, así como teorías de la representación de los objetos matemáticos de diferentes matices. Fueron útiles también otras teorías y tendencias didácticas internacionales acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Los alumnos de la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física, que fueron diagnosticados antes de la implementación experimental del modelo didáctico propuesto, demostraron un bajo nivel de desempeño en la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica lo cual se corresponde con las insuficiencias de los textos utilizados, del programa de la disciplina Geometría y las limitaciones y carencias del desarrollo teórico de la didáctica de la Geometría.

El resultado científico fundamental de esta tesis es un modelo didáctico de la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica en su PEA en la formación inicial de profesores de Matemática que incluye los tres componentes del proceso de formación, su planificación y dinámica. Este modelo constituye una contribución a la didáctica de la Geometría.

El modelo incluye procedimientos para la planificación a largo plazo de la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica en los componentes académico, laboral e investigativo. Entre estos procedimientos didácticos es muy importante el dirigido a la determinación de los casos posibles de transferencia, identificación y elaboración de procedimientos de transferencia y ordenamiento y distribución de las transferencias por formas de organización del PEA.

En el modelo didáctico la dinámica de la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica transcurre en cuatro fases interrelacionadas cronológica y diacrónicamente. La primera fase está dirigida a la formación y desarrollo del concepto de transferencia entre representaciones, conceptos auxiliares y conceptos subordinados; la segunda está enfocada a la elaboración de un Programa Heurístico particular desarrollado por el autor para la transferencia; la tercera consiste en la aplicación de este programa y la cuarta en la aplicación de procedimientos de transferencia.

En el modelo la dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente laboral e investigativo transcurre en las propias formas de organización de este componente a partir de la resolución de tareas que integran la transferencia entre representaciones a conocimientos y habilidades profesionales.

El modelo fue sometido a evaluación según el criterio de expertos, quienes lo valoraron como muy adecuado. También se implementó en la práctica pedagógica mediante un pre-experimento, en la modalidad de grupo único solo con medida post. En la mayoría de los alumnos sometidos al estudio se evidenciaron resultados favorables en su desempeño en la transferencia entre representaciones de los objetos de la Geometría Analítica en correspondencia con el problema del PEA de la Geometría Analítica.

La estructuración del modelo en correspondencia con una caracterización didáctica del concepto de transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica, los criterios favorables obtenidos en su evaluación según el criterio de expertos y los resultados de su implementación, indican que fue cumplido el objetivo de la investigación.

## RECOMENDACIONES

- Divulgar en las sesiones de trabajo de la Comisión Nacional de la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática, los resultados de esta tesis.
- Diseñar y ejecutar un curso de posgrado acerca de la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica para profesores de Matemática de la Educación Preuniversitaria donde se incluyan los resultados de esta tesis.
- Elaborar un folleto que contenga tareas de aprendizaje que exijan la realización de las transferencias identificadas en esta tesis para los diferentes objetos de la Geometría Analítica.
- Estudiar las formas que adoptan las representaciones verbales y analíticas de los objetos geométricos en sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas, así como las posibles transferencias a realizar cuando los tipos de los sistemas de coordenadas para las representaciones dadas y buscadas son diferentes.
- En las investigaciones futuras sobre la representación de objetos de la Geometría Analítica tener en cuenta que en esta tesis solo se trató la transferencia entre representaciones de los elementos de los conjuntos bases de las estructuras geométricas (objetos geométricos) quedando sin investigar los elementos de las relaciones.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Acosta, J. (2005). Tránsito entre representaciones en Matemáticas. ¿Pensamiento global o local? *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 5-10. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx>.
2. Acuña, C. (2005). ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de estudiantes en tareas de construcción. *Relime*, 8 (1), 7-24.
3. Acuña, C. (2010). Las funciones figurales y epistémicas de los dibujos. *Relime*, 13 (4I), 113-128.
4. Acuña, E. (2002). Rubistar, herramienta para construir matrices de valoración. Colombia. Recuperado de <http://www.eduteka.org/>.
5. Addine, F. (2004). “¿Didáctica! ¿Qué Didáctica? En F. Addine (Ed.), *Didáctica teoría y práctica*. (pp.1-20). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
6. Addine, F. (Ed.). (2004). *Didáctica teoría y práctica*. La Habana: Pueblo y Educación.
7. Addine, F., Ginoris, O., Armas, C., Martínez, B., Tabares, R. y Urbay, M. (1998). *Didáctica y optimización del proceso de enseñanza-aprendizaje* [versión electrónica]. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. La Habana.
8. Álvarez, C. (1992). *La escuela en la vida*. Colección Educación y Desarrollo. La Habana: Félix Varela.
9. Álvarez, C. (1998). *Pedagogía como ciencia (epistemología de la educación)* [versión electrónica]. La Habana.
10. Álvarez, C. (s, f). *Pedagogía y didáctica* [versión electrónica]. La Habana.
11. Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos*. La Habana: Pueblo y Educación.
12. Arias, L. (2003). ¿Tareas docentes, o tareas de enseñanza y tareas de aprendizaje? Recuperado de <http://www.monografias.com>
13. Arteaga, E., y Del Sol, J. (2015). Propuesta para la formación inicial investigativa en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física. *Conrado*, 11 (51), 32-38. Recuperado de <http://conrado.ucf.edu.cu>.
14. Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la Teoría Brousseauiana. *Educación Matemática*, 13 (3). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de <http://perl.ajusco.upn.mx/piem/publicaas.html>
15. Badillo, E., Edo, M., Font, V. (2014). Representaciones matemáticas usadas en la resolución de un problema aritmético de reparto por niños del primer ciclo de primaria. *Uno Revista de Didáctica de la Matemáticas*, 65, 59-69.
16. Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M., Álvarez, A.,... Torres, P. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.

17. Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M., Álvarez, A.,... Torres, P. (2000). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo II*. La Habana: Pueblo y Educación.
18. Ballester, S., González, C., Arteaga, E., Díaz, A., Socarrás, N., Rebollar, A.,... Almeida, B. (2016). *Programa de la Disciplina Formación Laboral e Investigativa de la carrera Licenciatura en Educación. Matemática. Plan E*. [versión electrónica]. La Habana.
19. Ballester, S., García, J., Almeida, B., Álvarez, M., Rodríguez, M., González, R.,... Puig, N. (2015, en prensa). *Didáctica de la Matemática. Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.
20. Bandomo, F. (2009). *Introducción a la teoría de grafos*. Recuperado de [http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso\\_grafos080909.pdf](http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso_grafos080909.pdf)
21. Baranov, S. P., Bolotina, L. R. y Slastioni, V. A. (1989). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.
22. Batanero, C. (1997). Cuestiones Metodológicas en la Evaluación de los Conocimientos Matemáticos de los Alumnos y de su Evolución. *Quadrante*, 6 (2), 25-43. Recuperado de <http://www.sectormatematica>
23. Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.92-126). New York: Academic Press.
24. Benítez, A. (2013). Empleo de múltiples representaciones para fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 629-639. Recuperado de <http://clame.org.mx>
25. Benítez, A. y García M. (2012). El uso de múltiples representaciones y la interpretación global. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 793-802. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
26. Benítez, A. y García, M. (2012). El uso de múltiples representaciones como una estrategia para el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 803-811. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
27. Bermúdez, R. y Pérez, L. (sf). La teoría histórico-cultural de L. S. Vigotski. Algunas ideas básicas acerca de la educación y el desarrollo psíquico [versión electrónica]. La Habana.
28. Bhehmer, S. y Belkner, H. (1980): *Introducción a la Geometría Analítica y al Álgebra Lineal*. La Habana: Pueblo y Educación.
29. Blázquez S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime*, 4, 219-236.
30. Bosch, M. y Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. Barcelona. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino>.
31. Brito, H., Castellanos, D., Córdova, M., Martínez, N., Rebollar, M. y González, V. (1987). *Psicología General para los Institutos Superiores Pedagógicos. Tomo 2*. La Habana: Pueblo y Educación.

32. Brown, T. (1996). The phenomenology of the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 115-150.
33. Bueno, E. (2003). *La investigación científica: Teoría y metodología*. Universidad Autónoma de Zacatecas. Recuperado de <http://www.postgradoune.edu.pe/documentos>
34. Calderón J., Díaz, J. y Varela, M. (1980). *Complementos de Geometría Analítica*. La Habana: Pueblo y Educación.
35. Calzado, D. (2004). *Un modelo de formas de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje en la formación inicial del profesor* (Tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”. La Habana.
36. Camarena, P. (2004). La transferencia del conocimiento: ecuaciones diferenciales parciales hacia una cuerda que vibra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 156-162. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
37. Campistrous, L. (2006). *Análisis de datos en la investigación educativa*. Conferencia impartida en la Universidad de Ciencias Informáticas (UCI) [versión electrónica]. La Habana.
38. Campistrous, L. y Rizo, C. (2000a). Indicadores e investigación educativa (primera parte). *Ciencias Pedagógicas*, 1 (2). Recuperado de <http://cied.rimed.cu/revista/12/portada/laportada1r2.html>
39. Campistrous, L. y Rizo, C. (2000b). Indicadores e investigación educativa (segunda parte). *Ciencias Pedagógicas*, 1 (3). Recuperado de <http://cied.rimed.cu/revista/13/portada/laportada1r3.html>
40. Campistrous, L., Cuadrado, Z., Rivero H., Naredo, R., Durán, A., Palacio, J. y Rizo, C. (1990). *Matemática. 11. Grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
41. Campos, M. y Balderas, P. (2000). Las representaciones como fundamento de una didáctica de las matemáticas. *Pensamiento Educativo*, 27, 169-194.
42. Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Relime*, 6 (3), 27-40.
43. Cañizares, E. (2010). *La formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en estudiantes de décimo grado* (Tesis de maestría). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Silverio Blanco Núñez”. Sancti Spiritus.
44. Carrillo de Albornoz, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 9-22. Recuperado de <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>
45. Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M., Silverio, M., Reinoso, C. y García, C. (2002). *Aprender y enseñar en la escuela*. La Habana: Pueblo y Educación.
46. Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada: Comares.
47. Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (3), 361-371.

48. Castro, Encarnación y Castro, Enrique (1997). *Representaciones y Modelización en La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* coordinado por L. Rico. Barcelona. España: Horsori.
49. Castro, S., Díaz, M., Martínez, P., López, F., Bermúdez, I. y González, J. (1992). *Geometría*. La Habana: Pueblo y Educación.
50. Cerezal, J. y Fiallo, J. (2001). Los métodos teóricos en la investigación pedagógica. *Desafío Escolar*, 5, segunda edición especial, 22-33.
51. Chacón, J. (2016). *Introducción a la teoría de Grafos*. Recuperado de <https://matematicapositiva.wordpress.com>
52. Cherbakov, S., Martínez, J. Figueras, A. y Cisneros, D. (1990). *Geometría Analítica. Tomo 1*. La Habana: Pueblo y Educación.
53. Cherbakov, S., Martínez, J. Figueras, A. y Cisneros, D. (1991). *Geometría Analítica. Tomo 2*. La Habana: Pueblo y Educación.
54. Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266. Francia.
55. Chevallard, Y. (2000) ¿Por qué la trasposición didáctica? En G. Castrillón (Ed.), *Ingeniería didáctica* (pp. 57-75) [versión electrónica]. Santiago de Cali. Colombia. (Trabajo original publicado en 1991).
56. Chibás, F. (1997). *Creatividad + Cultura = Eureka*s. La Habana: Pueblo y Educación.
57. Chirino, M. V. (2002). *Perfeccionamiento de la formación inicial investigativa de los profesionales de la educación* (Tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”. La Habana.
58. Cisneros, D., García, J., Estrada, M., González, D., Quero, O. y Matías, C. (2012). *Programa de la disciplina Geometría. Carrera Matemática-Física*. En formato digital.
59. Cisneros, D., González, J., Quero, O. y Carbonell, C. (2016). *Programa de la disciplina Geometría. Carrera Matemática*. En formato digital
60. Có, P., Del Sastre, M. y Panella, E. (2009). La importancia de las representaciones en la enseñanza de la Matemática Discreta. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 451-458. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
61. Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid, España: MEC.
62. Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime*, 9 (1), 65-84.
63. Cortés, J. (2005). Ambiente Informático Interactivo para el aprendizaje de las cónicas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 3, 3-14. Recuperado de <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>
64. Cortese, A. (s, f). La memoria. En *Enciclopedia de desarrollo personal* (vol. 1, pp. 159-168) [versión electrónica].
65. Crespo, T. (2007). *Respuestas a 16 preguntas sobre el empleo de expertos en la investigación pedagógica*. Serie Formación Continua. Lima, Perú: San Marcos.

66. Crespo, T. y Crespo E. (2014). *Expertos y prospectiva en la investigación pedagógica*. [versión electrónica].
67. Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática* (Tesis doctoral). ISP “José de la Luz y Caballero”. Holguín.
68. Cruz, M. (2006). *El método Delphi en las investigaciones educacionales*. Centro de Estudios en Ciencias de la Educación “José de la Luz y Caballero”. [versión electrónica].
69. Cruz, M. y Martínez, M. (2012). Perfeccionamiento de un instrumento para la selección de expertos en las investigaciones educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 14 (2), 167-179. Recuperado de <http://redie.uabc.mx/vol14no2/contenido-cruzmtnz2012.html>.
70. D’Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime Especial*.177-195.
71. D’Amore B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá*. 11, 150-164.
72. Danilov, M. y Skatkin, M. (1980). *Didáctica de la escuela media*. La Habana: Editorial de Libros para la Educación.
73. Davíдов, V. y Slobódchikov, V. L. (1991). La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. En A. V. Mudrik (Ed.), *La educación y la enseñanza: una mirada al futuro* (pp. 118-145). Moscú: Progreso.
74. Douady, R. (2000). Juego de marcos y dialéctica herramienta-objeto. En G. Castrillón (Ed.), *Ingeniería didáctica* (pp. 171-177) [versión electrónica]. Santiago de Cali. Colombia. (Trabajo original publicado en 1986).
75. Douady, R. y Parzysz, B. (1998). La geometría en el salón de clases. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *ICMI Study: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century. Capítulo 5* (pp. 159-192) (V. Hernández, Trad.). Kluwer Academic Publishers.
76. Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes, en D. Tall. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer* (pp. 24-41).
77. Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
78. Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang S.A.
79. Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Cinvestav, México.
80. Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

81. Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.
82. Duval, R. (2006): Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9 (1),143–168.
83. Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In Paolo Boero (Ed.), *Theorems in School from history, epistemological and cognition to Classroom practice* (pp. 137-161). Sense Publishers.
84. Echemendía, D. (2012). *El proceso de preparación de la asignatura en las universidades de ciencias pedagógicas* (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Silverio Blanco Núñez”. Sancti Spiritus.
85. Egaña, E. (2010). *La estadística, herramienta fundamental en la investigación pedagógica. Segunda edición corregida y aumentada*. La Habana: Pueblo y Educación.
86. Estrada, J. (2003). La formulación y reformulación de problemas o preguntas en el aprendizaje de las Matemáticas en el nivel medio superior. *Educación Matemática*, 15 (2), 77-103. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=4051520>
87. Evlanov, L. y Kutusov, V. (1978). *Ehkspertnie otsenki v upravlenii* [Valoraciones de expertos en la dirección]. Moscú: Ehkonomika.
88. Fera, F. (2003). *El perfeccionamiento de la dinámica del proceso docente educativo en la disciplina Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. (Tesis doctoral). ISP “José de la Luz y Caballero”. Holguín.
89. Fernández, E, Ballester, S. y González, C. (2012). *Programa de la Disciplina Formación Laboral e Investigativa de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física. Plan D*. [versión electrónica]. La Habana.
90. Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.
91. Fernández, T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial* (Tesis doctoral). Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela, España.
92. Flores, C., Chi, A., Canul E., Cantú, C. y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18, 41-57. Recuperado de <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>
93. Font, V, Godino, J y D’Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. Recuperado de <http://www/Hvfont@d5.ub.es>
94. Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques* (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona. España.
95. Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35. Recuperado de <http://www/vfont@d5.ub.es>

96. Font, V. (2001a). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *EMA*, 10 (2), 180-200.
97. Font, V. (sf). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Recuperado de <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf>
98. Font, V., Rubio, N. y Contreras A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 706-716. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
99. Fuentes, H. (2002). *Teoría holístico- configuracional y su aplicación a la didáctica de la Educación Superior*. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran”. Universidad de Oriente. [versión electrónica].
100. Fuentes, H., Matos, E. y Cruz, S. (2004). *La diversidad en el proceso de investigación científica. Reto actual en la formación de investigadores*. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran”. Universidad de Oriente. [versión electrónica].
101. Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.
102. Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso particular del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. España. Recuperado de <http://www.uco.es/informacion/webs/seiem/Novedades/Tesis%20resumenes>
103. Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 2 (3), 8-41. Recuperado de <http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno3>
104. Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Relime*, 8 (2), 169-193.
105. García, F. (2000). Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. *Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales*, 207. Recuperado de <http://www.ub.edu/geocrit/b3w-207.htm>
106. García, G. (2009). Errores que se cometen en diferentes fases del proceso investigativo. En R. Sierra y E. Caballero (Comp.), *Selección de lecturas de metodología de la investigación educativa* (pp. 40-45). La Habana: Pueblo y Educación.
107. García, G., Addine, F., Recarey, S., Reinoso, C., Rodríguez, M., Linares, M., ... Caballero, E. (2004). *Temas de introducción a la Formación Pedagógica*. La Habana: Pueblo y Educación.
108. García, J. (1999). *La didáctica de las matemáticas: una visión general*. España. Recuperado de: <http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/didmat.htm>
109. García, M. y Benítez, A. (2012). El uso de múltiples representaciones como una estrategia para el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 803-812 Recuperado de <http://www.clame.org.mx>

110. García, M. y Benítez, A. (2013). Desempeño de los estudiantes en tareas matemáticas que hacen uso de diferentes representaciones *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 905-910 Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
111. Gil, D. y De Guzmán, M. (1994). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones*. Organización de Estados Iberoamericanos Para la Educación, la Ciencia y la Cultura: Popular. Recuperado de <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman>
112. Gil, G., Fernández, J., Rubio M., López C. y Sánchez S. (2001). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: la evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el proyecto PISA 2000*. Madrid, España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.
113. Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros>
114. Godino, J. (2005). Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Teoría de las configuraciones didácticas. Presentación electrónica. Doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino>
115. Godino, J. (2010a). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
116. Godino, J. (2010b). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
117. Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
118. Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 8 (11), 111-132.
119. Godino, J. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
120. Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros>
121. Godino, J., Font V. y D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las Representaciones en Educación Matemática. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
122. Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Relime*. 9 (4), 117-150.
123. Goldin, G. (1993). The IGPME working group on representations. En I. Hirabayahi, N. Nuluhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. 1, 96-125. Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

124. Gómez, M. (2005): *Una propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones, en el nivel preuniversitario* (Tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”. La Habana.
125. Gómez, P. y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado de <http://cumbia.ath.cx/lr.htm>
126. González J. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.
127. González, A., Recarey, S. y Addine, F. (2004). La dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante sus componentes. En F. Addine (Ed.), *Didáctica teoría y práctica*. (pp.61-77). La Habana: Pueblo y Educación.
128. González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de Matemática. *Paradigma, XXI*. Venezuela.
129. González, M. (2006). *Propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la formación semipresencial en la disciplina de geometría*. (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique J. Varona”. La Habana.
130. Gonzato, M., Godino, J. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática, 23* (3), 5-37.
131. Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime. I* (1), 5-21.
132. Guzmán, M. (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la Matemática. Publicado en Manuel Abellanas y Alfonso García (Ed.), *Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad Politécnica de Madrid*, 9-27. Recuperado de <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman>
133. Guzmán, M. (1994). Programas de ordenador en la Educación Matemática. ¿Ficción o realidad?. *Revista de Anaya Educación, 3*, 33-40.
134. Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra. El Papel de la Visualización. Recuperado de <http://www.sectormatematica.c/articulo.htm>
135. Hernando, H. (2009). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación y Educadores, 12* (3), 12-31.
136. Herrera, J. I. (2000). La concepción histórico-cultural y la educación inicial y preescolar [versión electrónica]. Conferencia dictada en la Facultad de Educación Infantil. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.
137. Herrera, R. L. y Sobrino, E. (2012). Texto científico en tesis doctorales: estudio de regularidades textuales en tesis de Ciencias Pedagógicas en elaboración. Universidad de Ciencias Pedagógicas “Silverio Blanco Núñez”. Sancti Spíritus. [versión electrónica].
138. Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1), 62-75.

139. Hitt, F. (1997). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. Presentado en el XI Relme, Morelia, México.
140. Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*. Homenaje al Profesor Mauricio Castro (pp. 165-178). Granada, España: Editorial Universidad de Granada. Recuperado de <http://cumbia.ath.cx/ugr/phmc/PDF/Hitt.pdf>
141. Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X (2).
142. Hohenwarter, M. y Hohenwarter, J (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2. Recuperado de <http://www.geogebra.org/ayuda/search.html>
143. Horruitiner, P. (2007). Una nueva generación de planes de estudio. *Pedagogía Universitaria*, 12 (4), 133-157. Recuperado de <http://cvi.mes.edu.cu/peduniv/index.php/peduniv>.
144. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (1984). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.
145. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (2000): *Marcos teóricos de PISA 2000. España*. Recuperado de <http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm>
146. Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments (Tesis doctoral). University of Nottingham. Nottingham, United Kingdom.
147. Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale NJ: Erlbaum A.P.
148. Jiménez, J. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, 4 (7), 1-17. Recuperado de <http://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/information/authors>
149. Jungk, W. (1978). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1*. La Habana: Pueblo y Educación.
150. Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Primera parte*. La Habana: Pueblo y Educación.
151. Jungk, W. (1981). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Segunda Parte*. La Habana: Pueblo y Educación.
152. Junker, B. (1999). *Some statistical models and computational methods that may be useful for cognitively-relevant assessment*. Department of Statistics Carnegie Mellon University. USA.
153. Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 381 - 398). Hillsdale, NJ: Erlbaum A.P.

154. Kaput, J. (1987a). Toward a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. (pp. 159-195). Hillsdale NJ: Erlbaum A.P.
155. Kaput, J. (1987b). Representation and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 19 - 26). Hillsdale, NJ:Erlbaum AP.
156. Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), *A reseamh agendafir the learning and teaching of algebra* (pp. 167 - 194).Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Erlbaum.
157. Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. Von Glasersfeld(Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
158. Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). Adding it up: helping children learn mathematics. Recuperado de <http://www.nap.edu/catalog/9822.html>
159. Kindle, J. (1976). *Problemas de Geometría Analítica*. La Habana: Pueblo y Educación.
160. Kletenik, D. (1967). *Problemas de Geometría Analítica*. Moscú: Mir.
161. Klingberg, L. (1972). *Introducción a la didáctica general*. La Habana: Pueblo y Educación.
162. Konic, P., Godino, J. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números*,74, 57-74
163. Labarrere, G. y Valdivia, G. (1988). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.
164. Laborde, C. (2005). Hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick (Ed.) *Meaning in Mathematics Education* (pp.159-179) USA: Springer.
165. Lacasta, E. (1995). Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Illusions et contrôles (Tesis doctoral). Université Bordeaux I. Bordeaux, France.
166. Lehmann, C. (1972). *Geometría Analítica*. La Habana: Pueblo y Educación.
167. Lenin, V. (1984). *Materialismo y Empiriocriticismo*. Moscú: Progreso.
168. Leyva, T. (2012). *Propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones reales de una variable real, en el tema de funciones en el primer año de la Universidad de Ciencias Informáticas* (Tesis de maestría). Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana.
169. López, A. y Espinoza, J. (2012).Representaciones semióticas del concepto de función en ambiente excel: un estudio de caso. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 1399-1406. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>

170. Lupiañez, J. y Moreno, L. (2000) Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada.
171. Macías, J. (2014) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2*, 4 (9), 27-57.
172. Maquiesse, P. (2015). *Sistema de superación en construcciones geométricas y su tratamiento didáctico para profesores de matemática de la provincia de Luanda* (Tesis doctoral). Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Santa Clara.
173. Marcos, G. (2008). Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo (Tesis doctoral). Universidad de La Rioja. La Rioja, España.
174. Marimón, J. y Guelmes, E. (2011). Aproximación al modelo como resultado científico. En N. De Armas y A. Valle (Ed.), *Resultados científicos en la investigación educativa* (pp. 8-21). La Habana: Pueblo y Educación.
175. Martí, J. (1963). Clases orales. En, *Obras completas, tomo 6*. La Habana: Editorial Nacional de Cuba. (Trabajo original publicado en 1875).
176. Maturana, I. y Parraguez M. (2012). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 227-234. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
177. Mederos, O. (2002). *La formación, desarrollo y generalización de conceptos en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática*. Conferencia dictada en el RELME 16. La Habana.
178. Mederos, O. y Ruiz, A. (2007). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. *Números*, 67. España.
179. Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Relime*, 6 (3), 221-271.
180. Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 183-195.
181. Microsoft Corporation (2007). Mapas conceptuales. En *Enciclopedia Encarta. Edición de Lujó*. USA.
182. Microsoft Corporation (2007). Mapas mentales. En *Enciclopedia Encarta. Edición de Lujó*. USA.
183. Milevicich, L. y Lois, A. (2011). La representación de los objetos matemáticos en la resolución de problemas con herramientas informáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 1188-1197. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
184. Ministerio de Educación de Cuba (2005). *Programa de Matemática. Undécimo grado y segundo año de la ETP*. La Habana: Pueblo y Educación.

185. Ministerio de Educación de Cuba (2009). *La educación cubana en 50 años de Revolución*. Libro electrónico. La Habana.
186. Ministerio de Educación de Cuba (2012). *Modelo del profesional de la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física. Plan de estudio D* [versión electrónica]. La Habana.
187. Ministerio de Educación de Cuba (2014). *Indicaciones metodológicas y de organización de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física. Plan de estudio D* [versión electrónica]. La Habana.
188. Ministerio de Educación Deporte y Cultura de España (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias. Madrid*. Recuperado de <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2012/07/Marco-de-evaluacion-PISA-2012.pdf>
189. Ministerio de Educación Superior (2009). *Indicaciones acerca de los errores ortográficos y de redacción a tener en cuenta en todas las evaluaciones escritas que se realicen en los centros de Educación Superior*. [versión electrónica].
190. Ministerio de Educación Superior de Cuba (2007). *Reglamento del Trabajo Docente y Metodológico en la Educación Superior. Resolución Ministerial 210*. La Habana.
191. Ministerio de Educación Superior de Cuba (2016a). *Documento base para el diseño de los planes de estudio "E"*. [versión electrónica].
192. Ministerio de Educación Superior de Cuba (2016b). *Modelo del profesional. Plan de estudio "E"*. [versión electrónica].
193. Ministerio de Educación, Deporte y Cultura de España (2015). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Ciencias, Matemáticas, Lectura y competencia Financiera*. Recuperado de <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2015/07/Marco-de-evaluacion-PISA-2015.pdf>
194. Moriena, S. y Scaglia, S.(2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática, 15* (1), 15-19. Recuperado de <http://redalyc.uaemex.mx>
195. Mullis, A., Martin, M., Ruddock, G., O'Sullivan, Ch. , Preuschoff, C. (2011). *Timss 2011. Marcos de la Evaluación*. Madrid, España: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Recuperado de <https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/>
196. Mullis, A., Martin, M., Smith, T., Garden, R., Gregory, K., González, E., Chrostowski, E. y O'Connor, K.(2003). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Madrid, España: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Recuperado de <http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm>
197. Nardín A., Álvarez, A., Blanco, R., Bueno, S. y Mora, J. (2012). Registros semióticos y enseñanza del tema integrales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 25*, 515-562. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>

198. National Academy Press (2001). Contributions of measurement and statistical modeling to assessment. En, J.W. Pellegrino, N. Chudowsky, and Robert Glaser (Eds.), *Knowing what students know: the science and design of educational assessment* (pp. 111-172). Recuperado de <http://www.nap.edu/catalog/10019.html>
199. National Academy Press (2004). How people learn? Brain, mind, experience, and school. Washington. Recuperado de <http://www.NationalAcademyPress.edu/catalog>
200. Nickerson R., Perkins D. y Smith E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual*. Barcelona, España: Paidós.
201. Ospina, D. (2012): Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal (Tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales. Colombia. Recuperado de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis>.
202. Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Corrales, A. y Ramírez, A. (2011). *Geometría Analítica. Tercera Edición*. México: Pearson Edición.
203. Palacio, J. y Mosquera, M. (2002). “La comunicación y su interrelación con el proceso de enseñanza-aprendizaje”. *Pedagogía y Sociedad*, 5, 15-25.
204. Parra, H. (2007). Los sistemas de representación de Z en futuros profesores de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 365-369. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
205. Partido Comunista de Cuba (PCC). (2011). *VI Congreso del Partido Comunista de Cuba. Lineamientos de la política económica y social del Partido y la Revolución*. Recuperado de <http://www.cubadebate.cu>
206. Parzysz, B. (1988). Knowing vs seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 79-92.
207. Pellegrino, J. Chudowsky, N. y Glaser, R. (2001). Knowing what students know: the science and design of educational assessment. Recuperado de <http://www.nap.edu/catalog/10019.html>
208. Pérez, A. (2015). *La formación y desarrollo de la habilidad profesional planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de la carrera Matemática-Física* (Tesis doctoral). Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”. Sancti Spíritus.
209. Pérez, G., García, G., Nocedo, I. y García, M. L. (1996). *Metodología de la investigación educacional. Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.
210. Pimienta, J. y Iglesias, R. (2010). *Matemática III. Geometría Analítica. Primera Edición*. México: Pearson Edición.
211. Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, XXXVI (1), 87– 109.
212. Polya, G. (1981) *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Ciudad de México: Trillas.
213. Puig, L. (1997). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. España. Universidad de Valencia. Valencia. España. Recuperado de <http://www.uv.es/~didmat/luis/textos.htm>

214. Puig, S. (2003). La medición de la eficiencia del aprendizaje de los alumnos. Una aproximación a los niveles de desempeño cognitivo [versión electrónica]. No publicado. ICCP. La Habana.
215. Quero, O. y Rodríguez-Amaya, V. (2013). Un procedimiento didáctico para favorecer el desarrollo de la habilidad para transferir de una representación a otra en el estudio de la geometría analítica. Trabajo publicado en las memorias del III Taller Internacional la Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI.
216. Quero, O., Rodríguez, L., Rodríguez, N. y Rodríguez-Amaya, V. (2013). Tareas docentes para favorecer la transferencia de representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las curvas y superficies de segundo grado. Trabajo presentado en el Congreso Internacional COMPUMAT. Recuperado de [https://compumat.uci.cu/sites/default/files/public/p1292-ponencia-3421\\_0.pdf](https://compumat.uci.cu/sites/default/files/public/p1292-ponencia-3421_0.pdf)
217. Quero, O. (2011). La transferencia de representaciones en el estudio de la Geometría Analítica. Trabajo publicado en las memorias del II Taller Internacional la Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI. Holguín.
218. Quero, O. (2012). Transferencia de representaciones y tipos de tareas en el estudio de la Geometría Analítica. Trabajo presentado en el Evento Provincial “Pedagogía 2013”. Sancti Spíritus.
219. Quero, O. (2015a). Los mapas de transferencia una herramienta útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica. Trabajo presentado en el Evento Provincial “Pedagogía 2015”. Sancti Spíritus.
220. Quero, O. (2015b). Procedimientos para la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la recta en el plano: Trabajo presentado en el Taller Internacional de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática, la Informática, la Física, las Ciencias Naturales y Técnicas en el siglo XXI. Holguín.
221. Quero, O. (2016). Procedimiento para elaborar un sistema de tareas de aprendizaje dirigido a favorecer la transferencia entre representaciones del plano. Trabajo presentado en el Evento Provincial “Pedagogía 2017”. Sancti Spíritus.
222. Quero, O. y Ruiz, A. (2015a). Procedimientos para la transferencia entre representaciones verbales del plano. Trabajo presentado en el Evento internacional Yayabociencia 2015. Sancti Spíritus.
223. Quero, O. y Ruiz, A. (2015b). Técnicas favorecedoras de la transferencia entre representaciones de objetos de la geometría analítica en la formación de profesores de matemática-física. Trabajo presentado en el evento provincial “Universidad 2016”. Sancti Spíritus.
224. Quero, O. y Ruiz, A. (2016a). La transferencia entre representaciones verbales de las secciones cónicas en la formación inicial del profesor de matemática. *Pedagogía y Sociedad*, 19 (47), pp.19-37. Recuperado de <http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad>
225. Quero, O. y Ruiz, A. (2016b). La transferencia entre representaciones de la esfera en la formación inicial del profesor de Matemática. II Jornada Científica internacional del Cecess. Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”.

226. Quero, O. y Ruiz, A. (2017). Procedimientos para la transferencia entre representaciones de la recta en el plano utilizando GeoGebra. *Pedagogía y Sociedad*, 20 (50). Recuperado de <http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad>.147-171.
227. Quero, O. y Ruiz, A. (2018). Determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones en la planificación del PEA de la Geometría Analítica. *Iberoamericana de Educación Matemática. Unión*, 50. Recuperado de <http://www.revistaunion.org>, 118-143.
228. Radillo, M. (2011). Obstáculos y errores en el aprendizaje de la geometría euclidiana relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático en el nivel licenciatura. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 429-438. *Recuperado de <http://www.clame.org.mx>*
229. Radillo, M. (2012). Los códigos del lenguaje matemático en la geometría euclideana. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 161-170. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
230. Ramírez, L. y Toledo, A. (2005). Algunas consideraciones acerca del método de evaluación utilizando el criterio de expertos. Recuperado de <http://www.ilustrados.com>
231. Rangel, Y. (2002). *Dirección del aprendizaje y desarrollo profesional*. Sancti Spíritus: Luminaria.
232. Real Academia Española (2006). *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición*. Recuperado de <http://www.rae.es>
233. Reguera, R. y Solana, M. (1989). *Geometría Analítica*. La Habana: Pueblo y Educación.
234. Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.
235. Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Linares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla, España: Alfar.
236. Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 180-194). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprenggeom/archivos2/homenaje/12RicoL.PDF>
237. Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
238. Rico, P. (1996). *Reflexión y aprendizaje en el aula*. La Habana: Pueblo y Educación.
239. Rodríguez, C., Pozo, T. y Gutiérrez, J. (2006). La triangulación analítica como recurso para la validación de estudios de encuesta recurrentes e investigaciones de réplica en educación superior. *RELIEVE*, 12 (2), 285-305. Recuperado de [http://www.uv.es/RELIEVE/v12n2/RELIEVEv12n2\\_6.htm](http://www.uv.es/RELIEVE/v12n2/RELIEVEv12n2_6.htm).
240. Rodríguez, J. (2003). *Una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”. La Habana.

241. Rodríguez., M., Ricardo, L. y Mola, C. (2007). La representación geométrica desde la perspectiva de la transferencia de registros. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 275-280. Recuperado de <http://www.clame.org.mx>
242. Romberg, T. A. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 850- 869). New York: McMillan.
243. Romero, I. (1995). La introducción del número real en educación secundaria (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
244. Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. IV Simposio SEIEM. Ponencia invitada al Seminario de Investigación I. Recuperado de [http://www.ugr.es/local/seiem/IV\\_Simposio.htm](http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm)
245. Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *EMA*, 4 (2), 117-134.
246. Rosental, M. e Iudin, P. (1981). *Diccionario filosófico*. La Habana: Editora Política.
247. Ruiz, A. (2005). Software para la aplicación del procedimiento de comparación por pares en la investigación pedagógica [versión electrónica]. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.
248. Ruiz, A. (2006). Procedimientos y medios para relacionar constructos, dimensiones, indicadores y medición en la investigación pedagógica (curso post-evento). En A. China, J. Medina e I. Cabezas (Eds.), *Actas del Evento Provincial Pedagogía 2007*. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.
249. Ruiz, A. (2007). *La integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en la educación preuniversitaria* (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Silverio Blanco Núñez”. Sancti Spíritus.
250. Ruiz, A. (2016). Las habilidades para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas y su medición [versión electrónica].
251. Ruiz, A. y Quero, O. (2018). La selección de expertos tipo especialistas en investigaciones pedagógicas. [versión electrónica].
252. Ruiz, A., Quero, O., Abreu, L., Martín, S., Gómez, A., Fonseca, A.,... Solenzal, M. (2004). Metodología para evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario de la provincia Sancti Spíritus. Resultado del proyecto de investigación Mapren-Pre. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.
253. Ruiz, A., Quero, O., Abreu, L., Martín, S., Gómez, A., Fonseca, A.,... Solenzal, M. (2005). *Caracterización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los preuniversitarios de la provincia Sancti Spíritus. Resultado del proyecto de investigación Mapren-Pre*. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus.
254. Ruiz, F. (2000). *La tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.

255. Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa* 4 (1). México. Recuperado de <http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contents-amestoy.html>
256. Schoenfeld, A. H. (2000). Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática (J. D. Godino, trad.). Universidad de Granada. España. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino>. (Trabajo original publicado en Notices of the AMS, 47 (6), en el año 2000).
257. Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education*. 321-354. Rotterdam: Sense Publishers.
258. Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being -or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Coob, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizin and communicating in mathematics classrooms* (pp. 38-75). London: Lawrence Erlbaum.
259. Sierra, R. A. (2002). Modelación y estrategia: algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. En G. García Batista (Ed.). *Compendio de pedagogía* (pp. 311- 328). La Habana: Pueblo y Educación.
260. Silvestre, M. y Zilberstein, J. (2002). *Hacia una didáctica desarrolladora*. La Habana: Pueblo y Educación.
261. Socas, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El Álgebra escolar. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática X*, 9-42.
262. Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34.
263. Suárez, C. (2003). *La identificación de problemas matemáticos en la Educación Primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”. La Habana.
264. Supo, J. (2014). Seminarios de investigación científica. Recuperado de [www.seminariosdeinvestigación.com](http://www.seminariosdeinvestigación.com)
265. Talízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Moscú: Mir.
266. Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández, A. y Rico, L. (2003). Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1976-1998). *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 10 (1). Recuperado de: [http://www.uv.es/RELIEVE/v10n1/RELIEVEv10n1\\_3.htm](http://www.uv.es/RELIEVE/v10n1/RELIEVEv10n1_3.htm).
267. Torres, P. (1994). La didáctica de los matemáticos en la escuela cubana actual: origen, fundamentos, estructura y proyecciones. *Educación Matemática*, 6 (3), 82-89. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
268. Torres, P. (2000). La instrucción heurística de la Matemática Escolar [versión electrónica]. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. La Habana.

269. Valdivia, M. (2009). *Una estrategia didáctica para la dirección del aprendizaje de los procedimientos heurísticos en la asignatura Matemática y su Metodología I de la Licenciatura en Educación en el área de Ciencias Exactas* (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Juan Marinello”. Matanzas.
270. Valle, A. (2007). *Metamodelos de la investigación pedagógica* [versión electrónica]. ICCP. La Habana.
271. Valle, A. (2012). *La investigación pedagógica. Otra mirada*. La Habana: Pueblo y Educación.
272. Vigotski, L. (1989). Pensamiento y lenguaje. En Y. Guippenréiter (Ed.), *El proceso de formación de la psicología marxista* (pp. 164-209). Moscú: Progreso.
273. Villavicencio, M. (2004a). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de interacción verbal/simbólica. Cartilla No. 13. Lima. Perú. Recuperado de [http://www.huascarán.edu.pe/boletín/0\\_link/b\\_e13](http://www.huascarán.edu.pe/boletín/0_link/b_e13)
274. Villavicencio, M. (2004b). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de un discurso bien definido. Cartilla No. 14. Lima. Perú. Recuperado de [http://www.huascarán.edu.pe/boletín/0\\_link/b\\_e14](http://www.huascarán.edu.pe/boletín/0_link/b_e14)
275. Villavicencio, M. (2004c). En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de estructura. Cartilla No. 8. Lima. Perú. Recuperado de [http://www.huascarán.edu.pe/boletín/0\\_link/b\\_e18](http://www.huascarán.edu.pe/boletín/0_link/b_e18)
276. Yakovliev, G. (1985). *Geometría*. Moscú: Mir.
277. Zadu, I. (2004a). Indicadores e índices. Argentina. Recuperado de <http://server2.southlink.com.ar/vap/INDICADORES.htm>
278. Zadu, I. (2004b). El diseño de la investigación. Argentina. Recuperado de <http://server2.southlink.com.ar/vap/DISEÑO%20DE%20LA%20INV.htm>
279. Zadu, I. (2004c). El problema de la causalidad. Argentina. Recuperado de <http://server2.southlink.com.ar/vap/DISEÑO%20DE%20LA%20INV.htm>

## Anexo 1: Encuesta a profesores de Geometría

Objetivo: Obtener información para diagnosticar la Transferencia en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.

Compañero (a), se está realizando una investigación relacionada con la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática, que se ejecuta como tesis de doctorado en Ciencias Pedagógicas y se necesita su colaboración. Recabamos de usted la mayor objetividad posible, insistiéndole en que la encuesta tiene carácter anónimo y que la información suministrada sólo se utilizará con fines científicos.

### **Cuestionario.**

1. Respecto al programa de la asignatura Geometría I (Geometría Analítica) que se elaboró en su Universidad, marque con una X los componentes (del programa) donde la frase “transferencia entre representaciones” se utiliza explícitamente:
  - los objetivos.
  - el sistema de conocimientos.
  - el sistema de habilidades.
  - las orientaciones metodológicas.
2. Seleccione la afirmación que más se corresponde con su proceder en la selección de los casos posibles de transferencia entre representaciones que se tratan en el PEA de la Geometría Analítica:
  - se toman de los libros recomendados en la bibliografía del programa de la asignatura.
  - se analizan las posibles transferencias a realizar y entre ellas se seleccionan los casos más importantes.
3. Usted dispone de una tipología de tareas que se corresponda con los casos más importantes de la transferencia entre representaciones:
  - Sí                       No
4. La resolución de las tareas de aprendizaje que exigen transferencia usted las realiza utilizando:
  - el programa heurístico general.
  - un programa heurístico particular.

5. Marque con una “X” las afirmaciones que más se corresponden con su actuación en la dirección del PEA de la transferencia entre representaciones.
- se tienen en cuenta las oportunidades que ofrecen todos los componentes (académico, laboral e investigativo) para potenciar la formación de los alumnos a propósito de este proceso.
  - se tienen en cuenta las oportunidades que ofrecen los componentes académico y laboral para potenciar la formación de los alumnos a propósito de este proceso.
  - se tienen en cuenta las oportunidades que ofrecen los componentes académico e investigativo para potenciar la formación de los alumnos a propósito de este proceso.
  - se centra la atención en el componente académico y no se tienen en cuenta las oportunidades que ofrecen el componente laboral y el investigativo para potenciar la formación de los alumnos a propósito de este proceso.
6. Marque con una “X” las afirmaciones que más se corresponden con la utilización de software en la dirección del PEA de la transferencia entre representaciones:
- Siempre que sea factible.
  - Casi siempre.
  - Algunas veces.
  - Nunca.

En caso de utilizarlo precise: qué software usa y con qué fines.

## Anexo 2

Guía de observación para medir los indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional del desempeño del alumno en la Teroga.

Objetivo: obtener datos fiables sobre los indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional del desempeño del alumno en la Teroga al resolver tareas que exigen este proceso

Indicadores a observar	Categorías		
	2	1	0
2. Relativos a la dimensión afectivo-motivacional	2	1	0
2.1. Interés por resolver las tareas de las clases prácticas.			
2.2. Interés por resolver las tareas vinculadas a la práctica laboral e investigativa.			
2.3. Perseverancia antes la complejidad de las tareas.			
2.4. Actitud ante las críticas.			
2.5. Estado de ánimo durante la resolución de las tareas.			
3. Relativos a la dimensión comunicacional			
3.1. Comunicación con el profesor.			
3.1.1. Atención prestada a las explicaciones del profesor.			
3.1.2. Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor.			
3.2. Comunicación con los compañeros de clase.			
3.2.1. Colaboración con los compañeros de clase.			
3.2.2. Atención prestada a las explicaciones de sus compañeros de clase.			
3.2.3. Actuación ante las interrogantes formuladas por sus compañeros de clase.			
3.3. Comunicación con sus alumnos de la práctica laboral.			
3.3.1. Uso de la lengua materna.			
3.3.2. Estilo de comunicación.			
3.3.3. Atención prestada a las explicaciones de los alumnos.			
3.3.4. Actuación ante las interrogante formuladas por los alumnos.			
3.4. Comunicación matemática oral.			

3.4.1. Fluidez de la exposición.			
3.4.2. Uso de recursos para mantener la atención del auditorio.			
3.4.3. Utilización de la terminología.			
3.5. Comunicación científica oral.			
3.5.1. Dominio del tema.			
3.5.2. Claridad y precisión de las ideas.			
3.5.3. Uso de los medios.			
3.5.4. Ajuste al tiempo.			
3.5.5. Respuesta a las preguntas y criterios de la audiencia			
1. En el diagnóstico se evaluaron todos los indicadores relativos a la dimensión afectivo-motivacional y los indicadores 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3 de la dimensión comunicacional.			



\_\_\_ Reconocer que  $n \parallel a \times b$  y por tanto un vector normal al plano es  $a \times b$ .

3. Dada la recta  $r$   $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 4z - 8 = 0 \end{cases}$

- a) Obtén una ecuación paramétrica de  $r$ .
- b) Explica cómo compruebas que la representación obtenida en el inciso a) corresponde a la recta dada.
- c) La representación obtenida en el inciso a) es única? Argumenta.

## Anexo 4

Dimensiones e indicadores del desempeño de los alumnos en la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.
1.- Dimensión cognitivo-procedimental
1.1. Dominio de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones en el contexto de la Geometría Analítica.
1.1.1. Identificación de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones y argumentación
1.1.1.1. Identificación de una representación de un objeto geométrico y argumentación.
1.1.1.2. Identificación del tipo de una representación y argumentación.
1.1.1.3. Identificación de la forma de una representación y argumentación.
1.1.1.4. Identificación del tipo de una transferencia y argumentación.
1.1.2. Ejemplificación de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones y argumentación
1.1.2.1. Ejemplificación del concepto de representación de un objeto geométrico y argumentación.
1.1.2.2. Ejemplificación del concepto de tipo de representación y argumentación.
1.1.2.3. Ejemplificación del concepto de forma de una representación y argumentación.
1.2. Aplicación del PH-Teroga.
1.2.1. Comprensión de la tarea de transferencia.
1.2.1.1. Identificación del tipo de la RD y la RB.
1.2.1.2. Identificación de la forma de la RD y la RB.
1.2.1.3. Identificación del tipo de transferencia a realizar
1.2.2. Elaboración de un procedimiento de transferencia.
1.2.2.1. Esbozo de un procedimiento para la transferencia.
1.2.2.2. Fundamentación del procedimiento.
1.2.3. Realización de la transferencia.
1.2.3.1. Ejecución del procedimiento con lápiz y papel.
1.2.3.2. Ejecución del procedimiento con software.
1.2.4. Evaluación del proceso de transferencia.
1.2.4.1. Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.
1.2.4.2. Determinación de si la representación obtenida es única.

1.2.4.3. Determinación de si existen otros procedimientos para realizar la transferencia.
1.2.4.4. Formulación de nuevos ejercicios o problemas de transferencia.
1.3. Aplicación de procedimientos de transferencia.
1.3.1. Resolución de ejercicios cuya finalidad es la transferencia.
1.3.1.1. Identificación de la representación dada y de la buscada.
1.3.1.2. Conocimiento de los pasos del procedimiento.
1.3.1.3. Ejecución del procedimiento con lápiz y papel.
1.3.1.4. Ejecución del procedimiento con software.
1.3.1.5. Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.
1.3.1.6. Determinación de si la representación obtenida es única.
1.3.2. Resolución de problemas utilizando la transferencia como herramienta.
1.3.2.1. Elección de un sistema de coordenadas como sistema de referencia.
1.3.2.2. Representación de los datos del problema en el sistema coordenadas elegido.
1.3.2.3. Transferencia entre representaciones.
1.3.2.4. Trabajo con la o las representaciones encontradas.
1.3.2.5. Comprobación de que la solución encontrada satisface las exigencias del problema.
1.4. Análisis, valoración y complementación de fuentes bibliográficas respecto a la transferencia entre representaciones.
1.4.1. Análisis y valoración de programas de Matemática del nivel medio respecto a la transferencia entre representaciones.
1.4.1.1. Identificación de la unidad donde se concibe el estudio de un objeto geométrico.
1.4.1.2. Identificación de los objetivos donde se incluye la transferencia entre representaciones de un objeto geométrico.
1.4.1.3. Identificación en el contenido de los tipos de representación de un objeto geométrico.
1.4.1.4. Identificación en el contenido de las formas de representación de un objeto geométrico.
1.4.1.5. Identificación en el contenido de las posibles transferencias entre representaciones de un objeto.
1.4.1.6. Valoración de las orientaciones metodológicas acerca del uso del software GeoGebra en la transferencia entre representaciones de un objeto geométrico.
1.4.2. Análisis, valoración y complementación de libros respecto a la transferencia entre

representaciones.
1.4.2.1. Identificación de los tipos de representación de un objeto geométrico.
1.4.2.2. Identificación de las formas de representación de un objeto geométrico.
1.4.2.3. Identificación de las transferencias entre representaciones de un objeto geométrico en la exposición teórica.
1.4.2.4. Descripción de la correspondencia entre el conjunto de las transferencias entre representaciones de un objeto geométrico y la colección de ejercicios de un libro.
1.4.2.5. Valoración del uso del software GeoGebra.
1.4.2.6. Elaboración de ejercicios que exijan transferencia entre representaciones.
1.5. Atención a alumnos del nivel medio en la práctica laboral.
1.5.1. Diagnóstico del nivel de desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.
1.5.1.1. Elaboración de una prueba diagnóstica.
1.5.1.2. Elaboración de la norma de calificación de la prueba.
1.5.1.3 Calificación de la prueba.
1.5.1.4 Análisis de los resultados de la prueba y descripción del desempeño cognitivo de los alumnos.
1.5.1.5. Diseño de un plan de acciones para el tratamiento de las dificultades en la transferencia entre representaciones.
1.5.1.6. Ejecución de acciones para el tratamiento de las dificultades.
1.5.2. Elaboración de un informe sobre la experiencia.
1.5.2.1. Estructura del informe.
1.5.2.2. Uso de la lengua materna.
1.5.2.3. Ajuste al tema.
1.5.2.4. Uso de la terminología de la teoría de las representaciones.
2.- Dimensión afectivo-motivacional
2.1.- Interés por resolver las tareas de las clases prácticas.
2.2. Interés por resolver las tareas vinculadas a la práctica laboral e investigativa.
2.3.- Perseverancia ante la complejidad de las tareas.
2.4.- Actitud ante las críticas.
2.5.- Estado de ánimo durante la resolución de las tareas.
3.- Dimensión comunicacional
3.1. Comunicación con el profesor.

3.1.1. Atención prestada a las explicaciones del profesor.
3.1.2. Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor.
3.2. Comunicación con los compañeros de clase.
3.2.1. Colaboración con los compañeros de clase.
3.2.2. Atención prestada a las explicaciones de sus compañeros de clase.
3.2.3. Actuación ante las interrogantes formuladas por sus compañeros de clase.
3.3. Comunicación con sus alumnos de la práctica laboral e investigativa.
3.3.1. Uso de la lengua materna.
3.3.2. Estilo de comunicación.
3.3.3. Atención prestada a las explicaciones de los alumnos.
3.3.4. Actuación ante las interrogante formuladas por los alumnos.
3.4. Comunicación matemática oral.
3.4.1. Fluidez de la exposición.
3.4.2. Uso de recursos para mantener la atención del auditorio.
3.4.3. Utilización de la terminología matemática.
3.5. Comunicación científica oral.
3.5.1. Dominio del tema.
3.5.2. Claridad y precisión de las ideas.
3.5.3. Uso de los medios.
3.5.4. Ajuste al tiempo.
3.5.5. Respuesta a las preguntas y criterios de la audiencia.

Anexo 5: Matriz de valoración de los indicadores de las dimensiones.

Matriz de valoración de la subdimensión “Identificación de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones y argumentación”					
Indicador	4	3	2	1	0
Identificación de una representación de un objeto geométrico y argumentación.		Identifica si la representación corresponde al objeto y argumenta.	Identifica si la representación corresponde al objeto, pero la argumentación es parcialmente correcta	Identifica la representación correctamente pero la argumentación es incorrecta.	No identifica correctamente la representación
Identificación del tipo de una representación y argumentación.		Identifica correctamente el tipo de la representación del objeto y argumenta.	Identifica correctamente el tipo de la representación del objeto, pero la argumentación es parcialmente correcta.	Identifica correctamente el tipo de la representación del objeto, pero no argumenta.	No identifica correctamente el tipo de la representación del objeto.
Identificación de la forma de una representación y argumentación.		Identifica correctamente la forma de la representación del objeto y argumenta.	Identifica correctamente la forma de la representación del objeto, pero la argumentación es parcialmente correcta.	Identifica correctamente la forma de la representación del objeto, pero no argumenta.	No identifica correctamente la forma de la REP del objeto dado.
Identificación del tipo de una transferencia y argumentación.	Identifica el tipo de la transferencia atendiendo a los cuatro criterios estudiados y argumenta correctamente.	Identifica el tipo de la transferencia atendiendo a los cuatro criterios estudiados y la argumentación es parcialmente	Identifica el tipo de la transferencia atendiendo a tres de los criterios estudiados y argumenta correctamente.	Identifica el tipo de la transferencia atendiendo a tres de los criterios estudiados y la argumentación es	Identifica el tipo de la transferencia atendiendo a menos de tres de los criterios estudiados o la argumentación es incorrecta.

		correcta.		parcialmente correcta.	
--	--	-----------	--	---------------------------	--

Matriz de valoración de la subdimensión “Ejemplificación de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones y argumentación”				
Indicador	3	2	1	0
Ejemplificación del concepto de representación de un objeto geométrico y argumentación.	Ejemplifica y argumenta correctamente.	Ejemplifica correctamente, pero la argumentación es parcialmente correcta.	Ejemplifica correctamente, pero la argumentación es incorrecta.	No ejemplifica correctamente.
Ejemplificación del concepto de tipo de representación y argumentación.	Ejemplifica y argumenta correctamente.	Ejemplifica correctamente pero la argumentación es parcialmente correcta.	Ejemplifica correctamente, pero la argumentación es incorrecta.	No ejemplifica correctamente.
Ejemplificación del concepto de forma de una representación y argumentación.	Ejemplifica y argumenta correctamente.	Ejemplifica correctamente pero la argumentación es parcialmente correcta.	Ejemplifica correctamente, pero la argumentación es incorrecta.	No ejemplifica correctamente.

Matriz de valoración de la subdimensión “Comprensión de la tarea de transferencia”					
Indicador.	4	3	2	1	0
Identificación del tipo de la RD y la RB.			Identifica el tipo de la RD y la RB.	Identifica el tipo de la RD o la RB, pero no de ambas.	No identifica el tipo de la RD ni de la RB.
Identificación de la forma de la RD y la RB			Identifica la forma de la RD y la RB.	Identifica la forma de la RD o la RB, pero no de ambas.	No identifica la forma de la RD ni de la RB.
Identificación del tipo de transferencia a realizar	Identifica el tipo atendiendo a los cuatro	Identifica el tipo atendiendo a tres de los	Identifica el tipo atendiendo a dos de los	Identifica el tipo atendiendo a uno de los criterios	No Identifica el tipo de transferencia atendiendo a ninguno de los

	critérios	critérios	critérios		critério.
--	-----------	-----------	-----------	--	-----------

Matriz de valoración de la subdimensión “Elaboración de un procedimiento de transferencia.”				
Indicador	2	1	0	
Esbozo de un procedimiento para la transferencia.	Esboza un procedimiento correcto	El procedimiento esbozado es parcialmente correcto.	El procedimiento esbozado es incorrecto.	
Fundamentación del procedimiento	Fundamenta correctamente el procedimiento.	La fundamentación es parcialmente correcta	La fundamentación es incorrecta	

Matriz de valoración de la subdimensión “Realización de la transferencia”				
Indicador.	3	2	1	0
Ejecución del procedimiento con lápiz y papel.	Ejecuta correctamente el procedimiento .	Ejecuta el procedimiento y los únicos errores que comete son de cálculo	Comete errores que no son de cálculo, pero obtiene una representación del mismo tipo y forma que la representación buscada.	Ejecuta el procedimiento, pero comete errores que le impiden obtener la representación buscada o no ejecuta el procedimiento.
Ejecución del procedimiento con software		Ejecuta correctamente el procedimiento	Navega por el software, pero comete errores mecanográficos al ingresar puntos, vectores, ecuaciones u otros objetos, pero obtiene una representación del objeto.	No es capaz de navegar por el software para introducir los datos y obtener el resultado.

Matriz de valoración de la subdimensión “Evaluación del proceso de transferencia”				
Indicador	3	2	1	0
Comprobación de si la		Comprueba y explica	Comprueba correctamente, pero	No comprueba o no explica

representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.		correctamente cómo procedió para comprobar.	la explicación es incompleta.	correctamente.
Determinación de si la representación obtenida es única.	Determina si la representación es única o no y argumenta.	Determina si la representación es única o no, pero la argumentación es incompleta.	Determina si la representación es única o no, pero no argumenta.	No determina si la representación es única.
Determinación de si existen otros procedimientos para realizar la transferencia.		Analiza si existen varios procedimientos además del utilizado.	Analiza si existe únicamente otro procedimiento.	No analiza si existe otro procedimiento.
Formulación de nuevos ejercicios o problemas de transferencia.	Formula dos o más ejercicios o problemas correctamente.	Formula dos o más ejercicios o problemas con errores de redacción	Formula un ejercicio o problema correctamente.	Formula un ejercicio o problema con errores de redacción, no formula nuevos ejercicios o lo hace de forma incorrecta.

Matriz de valoración de la subdimensión “Resolución de ejercicios cuya finalidad es la transferencia”				
Indicador	3	2	1	0
Identificación de la representación dada y de la buscada.		Identifica correctamente la RD y la RB	Identifica correctamente la RD o la RB, pero no ambas.	No identifica correctamente la RD ni la RB.
Conocimiento de los pasos del procedimiento.		Conoce los pasos del procedimiento y el orden en que estos deben ejecutarse.	Conoce los pasos del procedimiento, pero intercambia el orden de dos de ellos.	Desconoce los pasos del procedimiento o el orden en que estos deben ejecutarse.
Ejecución del procedimiento con lápiz y	Ejecuta correctamente el procedimiento.	Ejecuta el procedimiento y los únicos errores	Comete errores que no son de cálculo, pero obtiene una	Ejecuta el procedimiento, pero comete errores que le

papel.		que comete son de cálculo	representación del mismo tipo y forma que la representación buscada.	impiden obtener la representación buscada o no ejecuta el procedimiento.
Ejecución del procedimiento con software		Ejecuta correctamente el procedimiento	Navega por el software, pero comete errores mecanográficos al ingresar puntos, vectores, ecuaciones u otros objetos, pero obtiene una representación del objeto.	No es capaz de navegar por el software para introducir los datos y obtener el resultado.
Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.		Comprueba y explica correctamente cómo procedió para comprobar.	Comprueba correctamente, pero la explicación es incompleta.	No comprueba o no explica correctamente.
Determinación de si la representación obtenida es única.	Determina si la representación es única o no y argumenta.	Determina si la representación es única o no, pero la argumentación es incompleta.	Determina si la representación es única o no, pero no argumenta.	No determina si la representación es única.

Matriz de valoración de la subdimensión “Resolución de problemas utilizando la transferencia como herramienta”.

Indicador	2	1	0
Elección de un sistema de coordenadas como sistema de referencia.	Elige el origen de coordenadas y los ejes correctamente y el sistema elegido racionaliza el trabajo	Elige el origen de coordenadas y los ejes correctamente, pero el sistema elegido no es óptimo.	No elige el sistema de coordenadas o el sistema elegido no conduce a la solución del problema.

	(sistema óptimo).		
Representación de los datos del problema en el sistema coordenadas elegido.	Representa correctamente todos los datos	Comete errores al representar uno de los datos.	Comete errores al representar más de un dato o no los representa.
Transferencia entre representaciones.	Realiza la transferencia correctamente.	Realiza la transferencia, pero comete errores de cálculo.	No realiza la transferencia o lo hace de forma incorrecta.
Trabajo con la o las representaciones encontradas.	Trabaja con las representaciones y obtiene una solución del problema.	Trabaja con las representaciones, pero comete hasta dos errores.	No trabaja con las representaciones o trabaja, pero comete más de dos errores.
Comprobación de que la solución encontrada satisface las exigencias del problema.	Realiza la comprobación en el problema original y la comprobación es correcta.	Comprueba en una representación intermedia del problema y la comprobación es correcta.	No comprueba o lo hace de forma incorrecta.

Matriz de valoración de la subdimensión “Análisis y valoración de programas de Matemática del nivel medio respecto a la transferencia entre representaciones”			
Indicador	2	1	0
Identificación de la unidad donde se concibe el estudio de un objeto geométrico	Identifica todas las unidades.	Identifica las unidades, pero omite una.	Identifica las unidades, pero omite más de una.
Identificación de los objetivos donde se incluye la transferencia entre representaciones de un objeto geométrico.	Identifica todos los objetivos.	Identifica los objetivos, pero omite uno.	Identifica objetivos, pero omite más de uno.
Identificación en el contenido de los	Identifica todos los tipos.	Identifica los tipos, pero omite uno.	Identifica tipos, pero omite más de uno.

tipos de representación de un objeto geométrico.			
Identificación en el contenido de las formas de representación de un objeto geométrico.	Identifica todas las formas.	Identifica las formas, pero omite hasta dos de ellas.	Identifica las formas, pero omite más de dos.
Identificación en el contenido de las posibles transferencias entre representaciones de un objeto.	Identifica las posibles transferencias aunque omite hasta dos de ellas.	Identifica las posibles transferencias, pero omite tres o cuatro de ellas.	Identifica posibles transferencias, pero omite más de cuatro.
Valoración de las orientaciones metodológicas acerca del uso del software GeoGebra en la transferencia entre representaciones de un objeto geométrico.	Valora los aspectos positivos y las limitaciones.	Valora los aspectos positivos o las limitaciones, pero no ambos o la valoración incluye aspectos positivos y limitaciones, pero está incompleta.	No valora los aspectos positivos ni las limitaciones.

Matriz de valoración de la subdimensión “Análisis, valoración y complementación de libros respecto a la transferencia entre representaciones”			
Ind.	2	1	0
Identificación de los tipos de representación de un objeto geométrico.	Identifica todos los tipos.	Identifica los tipos, pero omite uno.	Identifica los tipos, pero omite más de uno.
Identificación de	Identifica todas las	Identifica las formas, pero	Identifica formas, pero

las formas de representación de un objeto geométrico.	formas.	omite hasta dos de ellas.	omite más de dos.
Identificación de las transferencias entre representaciones de un objeto geométrico en la exposición teórica.	Identifica las transferencias aunque omite hasta dos de ellas.	Identifica las transferencias, pero omite tres o cuatro de ellas.	Identifica las transferencias, pero omite más de cuatro de ellas.
Descripción de la correspondencia entre el conjunto de las transferencias entre representaciones de un objeto geométrico y la colección de ejercicios de un libro.	En la descripción se incluyen las transferencias a las que no les corresponde ningún ejercicio, aunque omite hasta dos de ellas.	En la descripción se incluyen las transferencias a las que no les corresponde ningún ejercicio, aunque omite tres o cuatro de ellas.	En la descripción se incluyen las transferencias a las que no les corresponde ningún ejercicio, pero omite más de cuatro.
Valoración del uso del software GeoGebra.	Valora los aspectos positivos y las limitaciones.	Valora los aspectos positivos o las limitaciones, pero no ambos o la valoración incluye aspectos positivos y limitaciones, pero está incompleta.	No valora los aspectos positivos ni las limitaciones.
Elaboración de ejercicios que exijan transferencia entre representaciones.	Los ejercicios están correctamente elaborados y exigen transferencias a las que no les correspondió ningún ejercicio del texto.	Los ejercicios están correctamente elaborados, pero en sus exigencias omiten hasta dos de las transferencias a las que no les correspondió ningún ejercicio del texto.	Los ejercicios están incorrectamente elaborados o en sus exigencias omiten más de tres de las transferencias a las que no les correspondió ningún ejercicio del texto.

Matriz de valoración de la subdimensión “Diagnóstico del nivel de desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica”

Indicador	2	1	0
Elaboración de una prueba diagnóstica.	La prueba tiene validez de contenido y sus ítems están correctamente formulados.	La prueba tiene validez de contenido y algunos de sus ítems no están correctamente formulados.	La prueba no tiene validez de contenido o todos sus ítems están formulados con errores.
Elaboración de la norma de calificación.	La norma se ajusta al sistema de evaluación del nivel medio y los puntos se distribuyen según la importancia y complejidad de las operaciones.	La norma no se ajusta al sistema de evaluación del nivel medio, pero los puntos no se distribuyen según la importancia y complejidad de las operaciones.	La norma no se ajusta al sistema de evaluación del nivel medio y los puntos no se distribuyen según la importancia y complejidad de las operaciones.
Calificación de la prueba.	La norma de calificación está bien aplicada en todas las pruebas.	Existen errores en la aplicación de la norma de calificación en algunas pruebas.	Existen errores en la aplicación de la norma de calificación en todas las pruebas.
Análisis de los resultados de la prueba y descripción del desempeño cognitivo de los alumnos.	Describe los logros y los errores cognitivos de cada alumno y los del grupo de alumnos diagnosticados en correspondencia con los resultados de la prueba.	Describe los logros y errores cognitivos de cada alumno o el grupo en correspondencia con los resultados de la prueba, pero no ambos.	No describe los logros y errores cognitivos de cada alumno ni los del grupo o lo hace pero sin existir correspondencia con los resultados de la prueba.
Diseño de un plan de acciones para el tratamiento de las dificultades en la transferencia entre representaciones.	Las acciones del plan cubren el tratamiento de las dificultades identificadas y están correctamente formuladas.	Las acciones del plan cubren por lo menos el tratamiento del 60% de las dificultades identificadas y están correctamente formuladas.	Las acciones del plan cubren menos del 60% de las dificultades identificadas o están incorrectamente formuladas.
Ejecución de acciones para el tratamiento de las	Ejecuta correctamente todas las acciones propuestas.	No ejecuta alguna de las acciones propuestas o comete errores en su	No ejecuta la mayoría de las acciones propuestas o lo hace de forma

dificultades.		ejecución.	incorrecta.
---------------	--	------------	-------------

Matriz de valoración de la subdimensión “Elaboración de un informe sobre la experiencia”			
Indicador	2	1	0
Estructura del informe.	El informe contiene introducción, desarrollo, conclusiones, bibliografía y anexos.	En el informe se omiten la bibliografía y anexos.	En el informe se omite la introducción, el desarrollo, o las conclusiones.
Uso de la lengua materna.	Comete menos de cinco errores.	Comete de cinco a ocho errores.	Comete nueve o más errores.
Ajuste al tema	El informe se corresponde con la tarea orientada.	En el informe se omite la respuesta a no más de dos ítems de la tarea.	En el informe se omite la respuesta a más de dos ítems de la tarea.
Uso de la terminología de la teoría de las representaciones.	Se utiliza correctamente la terminología de la teoría.	Se cometen no más de dos errores en el uso de la terminología de la teoría.	Se cometen más de dos errores en el uso de la terminología de la teoría.

Matriz de valoración de la dimensión afectivo-motivacional			
Indicador	2	1	0
Interés por resolver las tareas de las clases prácticas	Comienza a resolver la tarea cuando el profesor la orienta sin necesidad de impulsos.	Necesita impulsos para comenzar a resolver la tarea que el profesor orienta.	No comienza a resolver la tarea aunque reciba impulsos.
Interés por resolver las tareas vinculadas a la práctica laboral e investigativa.	Aprovecha el tiempo disponible y crea las condiciones necesarias para resolver la tarea.	En ocasiones no aprovecha el tiempo disponible o no crea las condiciones necesarias para resolver la tarea.	No aprovecha el tiempo disponible, ni crea las condiciones necesarias para resolver la tarea.
Perseverancia ante la complejidad de las tareas.	Se esfuerza siempre por resolver las tareas más complejas y trata de superar los obstáculos.	Se esfuerza por resolver las tareas más complejas, pero en ocasiones no trata de superar los obstáculos.	No se esfuerza por resolver las tareas más complejas.
Actitud ante las	Acepta las críticas y se	Acepta las críticas, pero en	No acepta las críticas o no

críticas.	esfuerza por corregir los errores cognitivos.	ocasiones no se esfuerza por corregir los errores cognitivos.	se esfuerza por corregir los errores cognitivos
Estado de ánimo durante la resolución de las tareas.	Se muestra optimista, entusiasta y alegre mientras resuelve todas las tareas.	Solo se muestra optimista, entusiasta y alegre mientras resuelve las tareas menos exigentes.	No muestra entusiasmo, optimismo ni alegría en la resolución de las tareas.

Matriz de valoración de la subdimensión “Comunicación con el profesor”			
Indicador.	2	1	0
Atención prestada a las explicaciones del profesor.	Atiende de forma voluntaria.	Atiende cuando el profesor lo solicita.	No atiende, aunque el profesor lo solicite.
Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor.	Responde las interrogantes que le formula.	Responde con dificultades las interrogantes que le formula el profesor.	No responde las interrogantes que le formula el profesor.

Matriz de valoración de la subdimensión “Comunicación con los compañeros de clase”			
Indicador	2	1	0
Colaboración con los compañeros de clase.	Colabora de forma activa y voluntaria.	Solo colabora cuando se lo solicitan.	No colabora o lo hace ante la insistencia de sus compañeros.
Atención prestada a las explicaciones de sus compañeros de clase	Atiende de forma voluntaria.	Atiende cuando el profesor lo solicita.	No atiende, aunque el profesor lo solicite.
Actuación ante las interrogantes formuladas por sus compañeros de clase.	Responde las interrogantes que le formulan.	Responde con dificultades las interrogantes que le formulan.	No responde las interrogantes que le formulan.

Matriz de valoración de la subdimensión “Comunicación con sus alumnos de la práctica laboral”			
Indicador.	2	1	0
Uso de la lengua materna.	Utiliza correctamente la lengua materna.	Comete errores que no obstaculizan la	Comete errores que obstaculizan la

		comprensión de lo que explica.	comprensión de lo que explica.
Estilo de comunicación.	Su estilo es democrático.	En ocasiones su estilo es autoritario.	Su estilo predominante es autoritario.
Atención prestada a las explicaciones de los alumnos.	Siempre está atento a las explicaciones de los alumnos.	En ocasiones no presta la debida atención a las explicaciones de los alumnos.	Generalmente no está atento a las explicaciones de los alumnos.
Actuación ante las interrogante formuladas por los alumnos.	Responde de manera acertada.	Responde pero faltan argumentos en sus respuestas.	No responde o las respuestas son desacertadas.

Matriz de valoración de la subdimensión “Comunicación matemática oral”			
Indicador	2	1	0
Fluidez de la exposición.		Expone de forma fluida	Su exposición carece de fluidez.
Uso de recursos para mantener la atención del auditorio.	Logra mantener siempre la atención del auditorio.	Casi siempre logra mantener la atención del auditorio.	No logra mantener la atención del auditorio.
Utilización de la terminología matemática.	Utiliza con precisión la terminología matemática.	Comete imprecisiones que no afectan la comprensión de las ideas.	Comete imprecisiones que afectan la comprensión de las ideas o conllevan a errores.

Matriz de valoración de la subdimensión “Comunicación científica oral”			
Ind.	2	1	0
Dominio del tema.	Muestra dominio del contenido matemático del informe.	Se observa falta de dominio de algunos aspectos del contenido matemático.	No muestra dominio del contenido matemático del informe.
Claridad y precisión de las ideas.	Expone sus ideas de forma clara y con precisión.	En ocasiones demuestra falta de claridad y precisión.	Su exposición no es clara, ni precisa.
Uso de los medios.	Utiliza adecuadamente los medios disponibles.	Utiliza los medios con algunas dificultades.	No utiliza los medios disponibles o lo hace de forma incorrecta.

Ajuste al tiempo.	Se ajusta al tiempo asignado.	Excede el tiempo asignado en menos de 3 minutos.	Excede el tiempo asignado en más de 3 minutos.
Respuesta a las preguntas y criterios de la audiencia.	Se muestra receptivo a las críticas y responde las preguntas.	No se muestra receptivo a las críticas o no responde las preguntas.	No se muestra receptivo a las críticas y no responde las preguntas.

## Anexo 6

Coeficientes de ponderación, utilizados en el diagnóstico, para cada dimensión e indicador.	
Dimensiones e indicadores	Coeficiente de ponderación
D <sub>1</sub> . Dimensión cognitivo-procedimental	2
1.3.1.1. Identificación de la representación dada y de la buscada.	1
1.3.1.2. Conocimiento de los pasos del procedimiento.	1
1.3.1.3. Ejecución del procedimiento con lápiz y papel.	2
1.3.1.4. Ejecución del procedimiento con software.	2
1.3.1.5. Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.	2
1.3.1.6. Determinación de si la representación obtenida es única.	1
D <sub>2</sub> . Dimensión afectivo-motivacional	1
2.1. Interés por resolver las tareas de la clase práctica.	1
2.3. Perseverancia antes la complejidad de las tareas.	1
2.4. Actitud ante las críticas de sus compañeros.	1
2.5. Estado de ánimo durante la resolución de las tareas.	1
D <sub>3</sub> . Dimensión comunicacional	1
3.1.1. Atención prestada a las explicaciones del profesor.	1
3.1.2. Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor.	1
3.2.1. Colaboración con los compañeros de clase.	1
3.2.2. Atención prestada a las explicaciones de sus compañeros de clase	1

Anexo 7

Introducción de una escala para el constructo utilizando un índice	
Valor del índice	Categoría
[0, 20)	Muy bajo
[20, 40)	Bajo
[40, 60)	Medio
[60, 80)	Alto
[80, 100]	Muy alto

Anexo 8

A. Resultados de la medición de los indicadores de la dimensión cognitivo-procedimental a cada alumno de la muestra (Diagnóstico).						
Alumno	1.3.1.1	1.3.1.2	1.3.1.3	1.3.1.4	1.3.1.5	1.3.1.6
1	100	100	100	100	50	100
2	0	0	0	0	0	0
3	100	50	67	100	50	67
4	50	50	33	50	0	67
5	50	50	33	50	0	33
6	50	50	33	50	0	33
7	50	50	33	50	0	0
8	50	50	33	50	0	0
9	50	0	0	0	0	0
10	50	50	0	0	0	0
11	50	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	100	100	100	100	100	67
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	100	50	100	100	100	100
17	50	50	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
19	100	100	67	100	50	67
20	0	0	0	0	0	0

**B. Resultados de la medición de los indicadores de las dimensiones afectivo-motivacional y comunicacional a cada alumno de la muestra (Diagnóstico).**

Alumno	2.1	2.3	2.4	2.5	3.1.1	3.1.2	3.2.1	3.2.2
1	100	100	100	100	100	100	100	100
2	50	0	0	0	0	100	50	50
3	100	50	100	50	50	100	50	50
4	50	0	50	100	50	50	50	50
5	50	50	50	100	100	50	0	0
6	50	50	50	50	50	100	100	50
7	50	50	50	50	50	100	0	0
8	50	50	50	50	50	100	0	50
9	50	0	50	0	0	50	0	0
10	50	0	50	0	0	50	50	0
11	50	0	50	0	0	0	0	0
12	0	0	50	0	0	0	0	0
13	100	100	100	100	50	100	100	50
14	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0
16	100	100	100	50	50	100	50	50
17	50	50	50	50	50	100	50	50
18	0	0	0	50	0	0	0	0
19	100	100	100	100	100	100	50	100
20	0	0	0	0	0	50	0	0

C. Índices correspondientes a las dimensiones y el constructo para cada alumno					
Alumno	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	Constructo	Categoría
1	88,9	100	100	94,4	Muy alto
2	0	12,5	50	15,6	Muy bajo
3	72,3	75	62,5	70,5	Alto
4	37,0	50	50	43,5	Medio
5	33,2	62,5	37,5	41,6	Medio
6	33,2	50	75	47,9	Medio
7	29,6	50	37,5	36,7	Bajo
8	29,6	50	50	39,8	Bajo
9	5,6	25	12,5	12,2	Muy bajo
10	11,1	25	25	18,1	Muy bajo
11	5,6	25	0	9,0	Muy bajo
12	0	12,5	0	3,1	Muy bajo
13	96,3	100	75	91,9	Muy alto
14	0	0	0	0,0	Muy bajo
15	0	0	0	0,0	Muy bajo
16	94,4	87,5	62,5	84,7	Muy alto
17	11,1	50	62,5	33,7	Bajo
18	0	12,5	0	3,1	Muy bajo
19	77,9	100	87,5	85,8	Muy alto
20	0	0	12,5	3,1	Muy bajo
Media	31,3	44,4	40,0	36,7	Bajo

D. Tabla de frecuencias de la distribución de los índices correspondientes a las dimensiones y el constructo (Diagnóstico).

Dimensión	Categorías									
	MB	FR(%)	B	FR(%)	M	FR(%)	A	FR(%)	MA	FR(%)
D1	10	50	5	25	0	0	2	10	3	15
D2	6	30	3	15	5	25	2	10	4	20
D3	7	35	3	15	3	15	4	20	3	15
Constructo	8	40	4	20	3	15	1	5	4	20

## Anexo 9: Aplicación del procedimiento a la recta en el plano

A continuación se explican cada una de las fases del procedimiento utilizando como objeto el concepto de recta en el plano utilizando sistemas de coordenadas cartesianas.

1) Identificar los tipos de sistemas de coordenadas en que se debe representar el objeto en el PEA.

En el programa de la asignatura solo se exige la representación de la recta en el plano en sistemas de coordenadas cartesianas.

2) Determinar los tipos de representación del objeto para cada tipo de sistema de coordenadas.

En el estudio analítico de la recta en el plano que se realiza en la formación de profesores de Matemática en Cuba, los tipos fundamentales de representación son el verbal, el gráfico y el analítico.

3) Determinar las formas de cada tipo de representación del objeto.

En el estudio analítico de las rectas en el plano que se realiza en la formación de profesores de Matemática en Cuba, se identifican como tipos fundamentales de representación el verbal, el gráfico y el analítico.

Existen diferentes formas<sup>26</sup> de representación analítica y de representación verbal para cada sistema de coordenadas; el tipo gráfico tiene una única forma para cada sistema de coordenadas (Tabla 1).

Tipo de representación	Forma de representación
Representación verbal	1) Frase con dos puntos de la recta, 2) frase con un punto de la recta y un vector de dirección, 3) frase con un punto de la recta y un vector normal y 4) frase con un punto de la recta y su pendiente.
Representación analítica	1) Sistema de ecuaciones paramétricas, 2) ecuación general y 3) ecuación con un punto y la pendiente.
Representación gráfica	Es única para cada sistema de coordenadas.

---

<sup>26</sup> Se hace referencia solo a las formas de representación analítica estudiadas en el curso y a las más conocidas de las representaciones verbales.

4) Determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos en el mismo sistema de coordenadas.

Para determinar los casos posibles de las transferencias intratipo e intertipos se determinará primero su número y después cuáles son. Para ello se utiliza la regla del producto de la combinatoria. En la determinación se tendrá en cuenta solo la representación dada y la buscada.

4.1) Casos posibles de transferencias entre representaciones verbales de una recta en el plano.

Para la representación verbal de la recta en el plano se han considerado cuatro formas. Cada transferencia entre representaciones con alguna de estas formas se puede modelar con el concepto de par ordenado con componentes diferentes. Por eso para determinar el número de casos posibles se puede aplicar la regla del producto de la combinatoria. Para la representación dada (RD) son posibles cuatro opciones, puesto que no se pueden repetir las componentes, después de elegida cada una de estas opciones, para la representación buscada (RB) son posibles tres opciones. El esquema de la regla del producto se expone abajo. Al multiplicar cuatro por tres se obtienen 12 casos posibles para las transferencias entre representaciones del tipo verbal.

$$\frac{RD \quad RB}{4 \quad 3 \quad 12}$$

Utilizando la forma simbólica, se pueden representar los 12 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 2).

Tabla 2: Casos posibles de transferencia entre representaciones verbales			
Rep. dada: DP	Rep. dada: PVD	Rep. dada: PVN	Rep. dada: PP
1) DP→PVD	4) PVD→DP	7) PVN→DP	10) PP→DP
2) DP→PVN	5) PVD→PVN	8) PVN→PVD	11) PP→PVD
3) DP→PP	6) PVD→PP	9) PVN→PP	12) PP→PVN
Etiquetas: DP: recta representada verbalmente utilizando dos puntos. PVD: recta representada verbalmente por un punto y un vector de dirección. PVN: recta representada verbalmente por un punto y un vector perpendicular. PP: recta representada verbalmente por un punto y su pendiente.			

4.2) Casos posibles de transferencias entre representaciones analíticas de una recta en el plano.

Con razonamientos análogos a los realizados para el caso de representaciones verbales, resulta que existen seis casos de transferencias entre representaciones analíticas (Tabla 3).

Tabla 3: Casos posibles de transferencia entre representaciones analíticas		
Rep. dada: EP	Rep. dada: EG	Rep. dada: EPP
13) EP→EG	15) EG→EP	17) EPP→EP
14) EP→EPP	16) EG→EPP	18) EPP→EG
Etiquetas: EP: recta representada por un sistema de ecuaciones paramétricas. EG: recta representada por una ecuación general. EPP: recta representada por una ecuación con un punto y pendiente dada.		

Ahora se exponen los casos posibles para transferencias intertipos.

4.3) Casos posibles de transferencias intertipos a partir de una representación verbal de una recta en el plano.

Si se aplica el mismo razonamiento expuesto a las transferencias en que la representación dada es verbal y la buscada es analítica, resultan 12 casos posibles (Tabla 4).

Tabla 4: Casos posibles de transferencia de una representación verbal a una analítica			
Rep. dada: DP	Rep. dada: PVD	Rep. dada: PVN	Rep. dada: PP
19) DP→EP	22) PVD→EP	25) PVN→EP	28) PP→EP
20) DP→EG	23) PVD→EG	26) PVN→EG	29) PP→EG
21) DP→EPP	24) PVD→EPP	27) PVN→EPP	30) PP→EPP
Etiquetas: Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3.			

Como existe una única representación gráfica de una recta para cada sistema de coordenadas, existen cuatro casos posibles de transferencias de una representación verbal a una gráfica. Si denotamos la representación gráfica por G, estos son los casos: 31) DP→G, 32) PVD→G, 33) PVN→G y 34) PP→G.

4.4) Casos posibles de transferencias intertipos a partir de una representación analítica de una recta en el plano.

Existen 12 casos posibles de transferencias en que la representación dada es analítica y la buscada es verbal (Tabla 5).

Tabla 5: Casos posibles de transferencia de una representación analítica a una verbal		
Rep. dada: EP	Rep. dada: EG	Rep. dada: EPP
35) EP→DP	39) EG→ DP	43) EPP→DP
36) EP→PVD	40) EG→PVD	44) EPP→PVD
37) EP→PVN	41) EG→PVN	45) EPP→PVN
38) EP→PP	42) EG→PP	46) EPP→PP
Etiquetas: Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3.		

Existen tres casos posibles de transferencias de una representación analítica a una gráfica. Si utilizamos las etiquetas introducidas, estos son: 47) EP→G, 48) EG→G y 49) EPP→G.

4.5) Casos posibles de transferencias a partir de la representación gráfica de una recta en el plano.

Existen cuatro casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es verbal. Estos son: 50) G→DP, 51) G→PVD, 52) G→PVN y 53) G→PP.

Existen tres casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es analítica. Estos son: 54) G→EP, 55) G→EG y 56) G→EPP.

5) Determinar los casos de las transferencias intersistemas.

En la explicación de la fase 1 del procedimiento, para la recta en el plano, se precisó que no son necesarias transferencias intersistemas.

6) Investigar para cuáles casos de transferencias se expone algún procedimiento en la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura.

De los 56 casos posibles de transferencias descritas en la tercera operación del procedimiento solo se expone algún procedimiento en la bibliografía recomendada para las 24 identificadas con los números: 13, 14, 15, 16, 17,18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 47, 48 y 49. El autor de esta tesis elaboró procedimientos alternativos a los que aparecen en la bibliografía para las transferencias etiquetadas con los números 14,18, 20, 23, 24 y 29.

Para las transferencias 4, 7 y 10 no existen procedimientos de transferencia directa en los sistemas de representación que se utilizan en el PEA de la Geometría Analítica. Estas requieren de una representación intermedia de un tipo diferente al tipo de la representación dada, es decir, que requieren de una transferencia intertipos antes de obtener la representación buscada. Para

las transferencias de la 47 a la 56 la existencia de los procedimientos depende de la información que se pueda obtener del gráfico.

En las que se ha identificado algún procedimiento se observan las limitaciones siguientes: en todos los casos los medios utilizados son lápiz y papel y en la mayoría de ellos no se describe el procedimiento, sino que se presenta en el proceso de resolución de una tarea de aprendizaje.

No se identificaron procedimientos para las transferencias utilizando software.

7) Elaborar procedimientos de transferencia para aquellas transferencias que en la bibliografía no se expone ningún procedimiento y analizar la existencia de procedimientos alternativos de los expuestos en la bibliografía.

El autor de esta tesis elaboró 32 procedimientos de transferencia, con lápiz y papel, que corresponden a las identificadas con las etiquetas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 50, 51, 52, 53, 54, 55 y 56.

Se elaboraron procedimientos de transferencia con GeoGebra para todas las transferencias, aunque no son de interés práctico las transferencias identificadas con los números: 50-56.

8) Ordenar los procedimientos de transferencia para su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Aquí se expondrán los procedimientos agrupados en tres clases, según el tipo de la representación dada. En cada clase se ha establecido un orden considerando la forma de la representación buscada y la complejidad de los procedimientos de transferencia con lápiz y papel (Tabla 6).

Tabla 6: Ordenamiento de los casos posibles de transferencia según el tipo de la representación dada y la complejidad de los procedimientos				
Tipo de RD: verbal		Tipo de RD: analítica		Tipo de RD: gráfica
22) PVD→EP	1) DP→PVD	13) EP→EG	39) EG→ DP	50) G→DP
19) DP→EP	2) DP→PVN	14) EP→EPP	40) EG→PVD	51) G→PVD
25) PVN→EP	3) DP→PP	15) EG→EP	41) EG→PVN	52) G→PVN
28) PP→EP	4) PVD→DP	16) EG→EPP	42) EG→PP	53) G→PP
23) PVD→EG	5)PVD→PVN	17) EPP→EP	43) EPP→DP	54) G→EP
20) DP→EG	6) PVD→PP	18) EPP→EG	44) EPP→PVD	55) G→EG
26) PVN→EG	7) PVN→DP	35) EP→DP	45) EPP→PVN	56) G→EPP
29) PP→EG	8)PVN→PVD	36) EP→PVD	46) EPP→PP	

30) PP→EPP	9) PVN→PP	37) EP→PVN	47) EP→G	
21) DP→EPP	10) PP→DP	38) EP→PP	48) EG→G	
24) PVD→EPP	11) PP→PVD		49) EPP→G	
27) PVN→EPP	12) PP→PVN			
31) DP→G				
32) PVD→G				
33) PVN→G				
34) PP→G				

Etiquetas:

EP: recta representada por un sistema de ecuaciones paramétricas.

EG: recta representada por una ecuación general.

EPP: recta representada por una ecuación con un punto y pendiente dada.

DP: recta representada verbalmente utilizando dos puntos.

PVD: recta representada verbalmente por un punto y un vector de dirección.

PVN: recta representada verbalmente por un punto y un vector perpendicular.

PP: recta representada verbalmente por un punto y su pendiente.

G: representación gráfica de la recta.

#### 9) Distribuir los procedimientos por formas de organización del PEA y tipos de clase

El número de procedimientos de transferencias identificados no permite que todos sean tratados en clases, por lo que es recomendable aprovechar las posibilidades que ofrecen la *autopreparación*, como forma organizativa del PEA y el trabajo extraclase, como tipo de evaluación parcial (Tabla 7).

En la distribución de los procedimientos es deseable que en las conferencias se traten transferencias: entre representaciones verbales, entre representaciones analíticas, intertipos a partir de una representación verbal, intertipos a partir de una representación analítica y a partir de una representación gráfica.

En la Tabla 7 se muestra una posible distribución de los procedimientos de transferencia.

Tabla 7 : Distribución de los procedimientos de transferencia entre representaciones de la recta en el plano por FO del PEA	
	Procedimientos de transferencia
Conferencia	22, 19, 23, 26, 21, 31, 32, 2, 4, 50, 51
Clase práctica	1,3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 52, 53, 54, 55, 56

Autopreparación	25, 28, 27, 20, 29, 30, 24, 27, 35, 36, 37, 38
Trabajo extraclase	13,14,15,16,17,18,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49
<ol style="list-style-type: none"><li>1. La autopreparación incluye la que se realiza previa a la clase práctica y la posterior a esta.</li><li>2. El trabajo extraclase puede ser diferenciado, por lo que cada alumno no tendrá que realizar todas las transferencias</li></ol>	

Anexo 10

Tabla 8: Correspondencia entre transferencias y tareas para el plano con lápiz y papel		
Tipo de transferencia	Transferencia	Tareas del libro
Intratipo-intrasistema	1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30	No existen tareas para estas transferencias.
Intertipos-intrasistema	31, 32, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45,46,47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72	No existen tareas para estas transferencias.
Intertipos-intrasistema	34	921 y 1075
	36	917, 919, 931, 932, 934, 942
	38	913, 914, 915, 916, 929, 930, 953, 1043, 1044
	40	1068
	42	1070, 1076
	44	1072
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los números de la segunda columna corresponden a los de las transferencias de este epígrafe.</li> <li>2. Los números de la tercera columna son los que corresponden a cada tarea en el texto analizado.</li> </ol>		

Anexo 11

Tabla 9: Relación entre objetivos y contenidos de los programas respecto a tipos, formas y transferencias entre representaciones de la recta en el plano.		
Objeto de comparación	Programa de Matemática de undécimo grado	Programa de Geometría Analítica de la carrera
Tipos de representación	Verbal, analítica y gráfica	Verbal, analítica y gráfica
Formas de representación del tipo verbal	1) Frase con dos puntos de la recta, 2) frase con un punto de la recta y su pendiente.	1) Frase con dos puntos de la recta, 2) frase con un punto de la recta y un vector de dirección, 3) frase con un punto de la recta y un vector normal y 4) frase con un punto de la recta y su pendiente.
Formas de representación del tipo analítica	1) Ecuación general y 2) ecuación con un punto y la pendiente	1) Sistema de ecuaciones paramétricas, 2) ecuación general y 3) ecuación con un punto y la pendiente
Transferencias entre representaciones	16, 18, 20, 21, 29, 30, 48, 49, 55, 56	En el Anexo 9 se muestran las 56 posibles.
<p>Los números se corresponden con los de cada transferencia en el Anexo 9.</p> <p>En Quero y Ruiz (2017) se exponen los procedimientos de transferencia del Anexo 9 con el uso de GeoGebra y en Quero y Ruiz (2018) se exponen con lápiz y papel.</p>		

Anexo 12

Tabla 10: Análisis del libro de Matemática de undécimo grado.						
Objeto	Transferencia	Ejemplos	Descripción del procedimiento		Ejercicios propuestos	
			Con lápiz y papel	Con el uso de software	Sin precisión de medios	Exigen el uso de software
Recta en el plano	20	3, p. 75 5a, p. 77	Sí	No	3, p. 81; 18, p. 83; 28, p. 84; 2, p. 107 y 23, p. 109	
Recta en el plano	21	No	No	No	2, p.81, 3, p.107	
Recta en el plano	29	2, p. 75 2, p. 81	Sí	No	4, p. 82; 7, p. 82; 14, p. 83; 19, p. 83 y 22, p.109	
Recta en el plano	30	5 b, p.77	Sí	No	1, p. 106	

Anexo 13:

A. Tipos de tareas para la elaboración del PH-Teroga

Tipos de tareas según los valores de las variables: estudio previo del contenido y del procedimiento por el alumno, clasificación de las tareas según el tipo de transferencia a realizar y tipo de tarea según su estructura			
N.	Valor de la variable 1	Valor de la variable 2	Valor de la variable 3
1	1.1	2.1	3.1
2	1.1	2.1	3.2
3	1.1	2.2	3.1
4	1.1	2.2	3.2
5	1.1	2.3	3.1
6	1.1	2.3	3.2
7	1.1	2.4	3.1
8	1.1	2.4	3.2
9	1.2	2.1	3.1
10	1.2	2.1	3.2
11	1.2	2.2	3.1
12	1.2	2.2	3.2
13	1.2	2.3	3.1
14	1.2	2.3	3.2
15	1.2	2.4	3.1
16	1.2	2.4	3.2

Leyenda:

- 1.1. El alumno estudió el contenido y no estudio el procedimiento.
- 1.2. El alumno no estudió el contenido y no estudió el procedimiento.
- 2.1. Transferencia directa-intratipo-intrasistema.
- 2.2. Transferencia directa-intertipo-intrasistema.
- 2.3. Transferencia compuesta-intratipo-intrasistema.
- 2.4. Transferencia compuesta-intertipos-intrasistema.
- 3.1. Tarea de respuesta abierta.
- 3.2. Tarea de completamiento de espacios en blanco.

B. Tipos de tareas para la aplicación del PH-Teroga

Tipos de tareas según los valores de las variables: estudio previo del contenido y del procedimiento por el alumno, clasificación de las tareas según el tipo de transferencia a realizar y tipo de tarea según su estructura				
N.	Valor de la variable 1	Valor de la variable 2	Valor de la variable 3	Valor de la variable 4
1	1.1	2.1	3.1	4.1
2	1.1	2.1	3.2	4.1
3	1.1	2.2	3.1	4.1
4	1.1	2.2	3.2	4.1
5	1.1	2.3	3.1	4.1
6	1.1	2.3	3.2	4.1
7	1.1	2.4	3.1	4.1
8	1.1	2.4	3.2	4.1
9	1.2	2.1	3.1	4.1
10	1.2	2.1	3.2	4.1
11	1.2	2.2	3.1	4.1
12	1.2	2.2	3.2	4.1
13	1.2	2.3	3.1	4.1
14	1.2	2.3	3.2	4.1
15	1.2	2.4	3.1	4.1
16	1.2	2.4	3.2	4.1
17	1.1	2.1	3.1	4.2
18	1.1	2.1	3.2	4.2
19	1.1	2.2	3.1	4.2
20	1.1	2.2	3.2	4.2
21	1.1	2.3	3.1	4.2
22	1.1	2.3	3.2	4.2
23	1.1	2.4	3.1	4.2
24	1.1	2.4	3.2	4.2
25	1.2	2.1	3.1	4.2
26	1.2	2.1	3.2	4.2
27	1.2	2.2	3.1	4.2

28	1.2	2.2	3.2	4.2
29	1.2	2.3	3.1	4.2
30	1.2	2.3	3.2	4.2
31	1.2	2.4	3.1	4.2
32	1.2	2.4	3.2	4.2

Leyenda:

- 1.1. El alumno estudió el contenido y no estudio el procedimiento.
- 1.2. El alumno no estudió el contenido y no estudió el procedimiento.
- 2.1. Transferencia directa-intratipo-intrasistema.
- 2.2. Transferencia directa-intertipo-intrasistema.
- 2.3. Transferencia compuesta-intratipo-intrasistema.
- 2.4. Transferencia compuesta-intertipos-intrasistema.
- 3.1. Tarea de respuesta abierta.
- 3.2. Tarea de completamiento de espacios en blanco.
- 4.1. Contexto intramatemático.
- 4.2. Contexto extramatemático.

C. Tipos de tareas para la aplicación de los procedimientos de transferencia.

Tipos de tareas según los valores de las variables: clasificación de las tareas según el tipo de transferencia a realizar, tipo de tarea según el contexto y tipo de tarea según su estructura.			
N.	Valor de la variable 2	Valor de la variable 3	Valor de la variable 4
1	2.1	3.1	4.1
2	2.1	3.1	4.2
3	2.1	3.2	4.1
4	2.1	3.2	4.2
5	2.2	3.1	4.1
6	2.2	3.1	4.2
7	2.2	3.2	4.1
8	2.2	3.2	4.2
9	2.3	3.1	4.1
10	2.3	3.1	4.2
11	2.3	3.2	4.1
12	2.3	3.2	4.2
13	2.4	3.1	4.1
14	2.4	3.1	4.2
15	2.4	3.2	4.1
16	2.4	3.2	4.2

Leyenda:

- 2.1. Transferencia directa-intratipo-intrasistema.
- 2.2. Transferencia directa-intertipos-intrasistema.
- 2.3. Transferencia compuesta-intratipo-intrasistema.
- 2.4. Transferencia compuesta-intertipos-intrasistema.
- 3.1. Tarea de respuesta abierta.
- 3.2. Tarea de completamiento de espacios en blanco.
- 4.1. Contexto intramatemático.
- 4.2. Contexto extramatemático.



3. Si usted tuviera que argumentar sus criterios acerca de un modelo didáctico de la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática, tendría que apelar a su capacidad de análisis, experiencia, etc. Señale con una X el grado de influencia que tienen las fuentes expuestas en la tabla en la argumentación de los criterios que usted puede ofrecer sobre el tema.

<b>Fuentes de argumentación</b>	<b>Grado de influencia de las fuentes en sus criterios</b>				
	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Capacidad de análisis.					
Experiencia como profesor de Geometría Analítica (asignatura o tema de una asignatura).					
Experiencia en el desarrollo de investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica.					
Conocimiento del estado actual de la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.					
Comprensión del papel de la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.					

Anexo 15

Puntajes correspondientes a las fuentes de argumentación					
Fuentes de argumentación	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Capacidad de análisis.	0,24	0,19	0,14	0,09	0,05
Experiencia como profesor de Geometría Analítica.	0,22	0,18	0,13	0,09	0,04
Experiencia en el desarrollo de investigaciones relacionadas con el PEA de la Geometría Analítica.	0,20	0,16	0,12	0,08	0,04
Conocimiento del estado actual de la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.	0,18	0,14	0,11	0,07	0,04
Comprensión del papel de la transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática.	0,16	0,13	0,10	0,06	0,03

Anexo 16

Coeficiente de competencia de los expertos								
Sujeto	K <sub>c</sub>	Argumentación					K <sub>a</sub>	K
		Cap. de análisis.	Experiencia como profesor.	Experiencia investigativa.	Conocimiento	Comprensión		
1	0,9	0,19	0,22	0,12	0,14	0,13	0,8	0,85
2	0,8	0,19	0,18	0,12	0,14	0,13	0,76	0,78
3	0,8	0,19	0,22	0,12	0,14	0,13	0,8	0,8
4	0,8	0,24	0,13	0,16	0,18	0,16	0,87	0,835
5	0,8	0,19	0,18	0,12	0,14	0,13	0,76	0,78
6	0,8	0,19	0,22	0,12	0,14	0,13	0,8	0,8
7	0,8	0,24	0,18	0,16	0,18	0,16	0,92	0,86
8	0,8	0,19	0,18	0,12	0,14	0,13	0,76	0,78
9	0,8	0,19	0,18	0,16	0,11	0,13	0,77	0,785
10	0,8	0,19	0,18	0,12	0,14	0,13	0,76	0,78
11	0,9	0,19	0,18	0,16	0,14	0,13	0,8	0,85
12	0,8	0,14	0,18	0,16	0,14	0,13	0,75	0,775
13	0,8	0,19	0,22	0,16	0,14	0,13	0,84	0,82
14	0,9	0,19	0,18	0,12	0,14	0,13	0,76	0,83
15	1	0,19	0,22	0,2	0,14	0,13	0,88	0,94
16	0,9	0,19	0,18	0,16	0,11	0,13	0,77	0,835
17	0,8	0,19	0,18	0,16	0,11	0,13	0,77	0,785
18	0,8	0,19	0,18	0,16	0,14	0,13	0,8	0,8
19	0,8	0,24	0,18	0,16	0,18	0,16	0,92	0,86
20	0,8	0,24	0,18	0,16	0,18	0,13	0,89	0,845

21	0,8	0,19	0,18	0,16	0,14	0,13	0,8	0,8
22	0,8	0,24	0,18	0,12	0,14	0,13	0,81	0,805
23	0,8	0,19	0,22	0,16	0,11	0,13	0,81	0,805
24	0,8	0,19	0,18	0,16	0,11	0,13	0,77	0,785
25	0,7	0,24	0,18	0,12	0,14	0,13	0,81	0,755
26	0,8	0,19	0,18	0,16	0,14	0,13	0,8	0,8
27	0,9	0,24	0,18	0,16	0,14	0,13	0,85	0,875
28	0,8	0,24	0,18	0,12	0,14	0,13	0,81	0,805
29	0,8	0,19	0,22	0,12	0,14	0,13	0,8	0,8
30	0,8	0,19	0,22	0,12	0,14	0,13	0,8	0,8

## Anexo 17

### Cuestionario

Compañero profesor puesto que usted tiene la preparación requerida y ha mostrado voluntad de cooperar con la investigación titulada “La transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática”, se necesita que conteste el siguiente cuestionario dirigido a valorar el modelo didáctico propuesto, después de haber leído las

Instrucciones:

- En cada ítem aparece una escala del 1 al 5, que se interpreta de la manera siguiente:

1	2	3	4	5
Inadecuado	Poco adecuado	Adecuado	Bastante adecuado	Muy adecuado

- Debe señalar el número correspondiente a su respuesta de acuerdo con esta escala.
- En cada ítem aparecen los criterios para la asignación de cada valor de la escala (matrices de valoración). Al final del cuestionario aparece una pregunta para recoger opiniones que no hayan sido incluidas al responder los otros ítems.
- Abreviaturas utilizadas:

PEA: proceso de enseñanza-aprendizaje    TER: transferencia entre representaciones

GA: Geometría Analítica    RD: Representación dada    RB: Representación buscada

Teroga: transferencia entre representaciones en el PEA de la GA.

### Cuestionario.

Dimensión 1: Poder descriptivo del modelo.

1. Correspondencia del modelo con la esencia de la Teroga:

1	2	3	4	5
El modelo no tiene en cuenta características esenciales de la Teroga.	El modelo representa las características esenciales de la Teroga, pero no tiene en cuenta sus relaciones fundamentales.	El modelo representa las características esenciales de la Teroga, tiene en cuenta sus relaciones fundamentales, pero la	El modelo representa las características esenciales de la Teroga, tiene en cuenta sus relaciones, la descripción es general en algunos	El modelo representa las características esenciales de la Teroga, tiene en cuenta sus relaciones y la descripción es precisa.

		descripción es general.	casos y precisa en otros.	
--	--	-------------------------	---------------------------	--

2. Concepción de la planificación de la Teroga.

1	2	3	4	5
Los procedimientos didácticos no se ajustan a la esencia de la planificación.	Los procedimientos didácticos se ajustan parcialmente a la esencia de la planificación.	Los procedimientos didácticos se ajustan totalmente a la esencia de la planificación, pero su descripción es general.	Los procedimientos didácticos se ajustan totalmente a la esencia de la planificación, algunos se describen de forma general y otros con precisión.	Los procedimientos didácticos se ajustan totalmente a la esencia de la planificación y su descripción es precisa.

3. Estructuración de la dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente académico del PEA de la GA:

1	2	3	4	5
Las fases no se ajustan a la esencia de la Teroga en el componente académico.	Las fases se ajustan parcialmente a la esencia de la Teroga en el componente académico.	Las fases se ajustan totalmente a la esencia de la Teroga en el componente académico, pero su descripción es general.	Las fases se ajustan totalmente a la esencia de la Teroga en el componente académico, algunas se describen de forma general y otras con precisión.	Las fases se ajustan totalmente a la esencia de la Teroga en el componente académico y su descripción es precisa.

4. Estructuración de la dinámica de la transferencia entre representaciones en el componente laboral e investigativo del PEA de la GA:

1	2	3	4	5
Los tipos de tareas no se ajustan a la esencia de la Teroga en el componente laboral e investigativo.	Los tipos de tareas se ajustan parcialmente a la esencia de la Teroga en el componente laboral e investigativo.	Los tipos de tareas se ajustan totalmente a la esencia de la Teroga en el componente laboral e investigativo, pero la proyección de la actuación del profesor y los alumnos en las actividades es general.	Los tipos de tareas se ajustan totalmente a la esencia de la Teroga en el componente laboral e investigativo y la proyección de la actuación del profesor y los alumnos en las actividades es precisa en algunos casos y general en otros.	Los tipos de tareas se ajustan totalmente a la esencia de la transferencia en el componente laboral y la proyección de la actuación del profesor y los alumnos en las actividades es precisa.

Dimensión 2: Alcance.

5. Variedad de transferencias entre representaciones de objetos de la GA a las que se puede aplicar el modelo:

1	2	3	4	5
En algunas TER de objetos de la GA plana.	En algunas TER de objetos de la GA plana y la GA espacial.	En todas las TER de objetos de la GA plana y la GA espacial en sistemas de coordenadas cartesianas.	En todas las TER de objetos de la GA plana y la GA espacial en que la RD y la RB corresponden al mismo sistema de coordenadas.	En todas TER de objetos de la GA plana y la GA espacial cualquiera sea el sistema de coordenadas de la RD y la RB.

6. Frecuencia de las situaciones donde es aplicable el modelo en el PEA de la GA:

1	2	3	4	5
En el estudio de algunos objetos de la GA plana.	En el estudio de algunos objetos de la GA plana y la GA espacial.	En el estudio de todos los objetos de la GA plana.	En el estudio de todos los objetos de la GA plana y algunos objetos de la GA espacial.	En el estudio de todos los objetos de la GA.

Dimensión 3: poder predictivo.

7. Pronóstico de la actuación esperada del profesor, dadas las condiciones previas necesarias, en las distintas situaciones de la Teroga:

1	2	3	4	5
No se pronostica	En algunas situaciones	En las situaciones más representativas	En la mayoría de las situaciones	En todas las situaciones

8. Pronóstico de la actuación esperada del alumno, dadas las condiciones previas necesarias, en las distintas situaciones de la Teroga:

1	2	3	4	5
No se pronostica	En algunas situaciones	En las situaciones más representativas	En la mayoría de las situaciones	En todas las situaciones

9. Tipificación de los errores cognitivos de los alumnos en la Teroga:

1	2	3	4	5
No se tipifican	Se describen algunos de los tipos de errores más comunes.	Se describen de forma general los tipos de errores más	Se describen los tipos de errores más comunes, algunos con	Se describen con precisión los tipos de errores más comunes.

		comunes.	precisión y otros de forma general.	
--	--	----------	-------------------------------------	--

Dimensión 4: rigor y especificidad.

10. Definición de los conceptos fundamentales (transferencia entre representaciones, conceptos auxiliares y conceptos subordinados):

1	2	3	4	5
No se definen o se definen, pero las definiciones no cumplen los requisitos básicos.	Se definen solo algunos o se definen todos, pero algunas definiciones no cumplen los requisitos básicos.	Se definen la mayoría, pero algunos están sobredeterminados.	Se definen todos, pero algunos están sobredeterminados, todas las definiciones cumplen los requisitos básicos, pero una utiliza un contenido con características redundantes	Se definen todos y las definiciones cumplen todos los requisitos exigidos.

11. Claridad y precisión del lenguaje utilizado:

1	2	3	4	5
Nunca es claro y preciso	Pocas veces es claro y preciso	A veces es claro y preciso	La mayoría de la veces es claro y preciso	Siempre es claro y preciso

12. Pertinencia de los conceptos fundamentales (transferencia entre representaciones, conceptos auxiliares y conceptos subordinados):

1	2	3	4	5
Ninguno tiene utilidad para identificar, describir y explicar la Teroga.	Algunos tienen utilidad para identificar, describir y explicar la Teroga.	Todos tienen utilidad para identificar, describir y explicar la Teroga, pero se puede prescindir de los conceptos auxiliares.	Todos tienen utilidad para identificar, describir y explicar la Teroga, pero se puede prescindir de algunos conceptos auxiliares.	Todos tienen utilidad para identificar, describir y explicar la Teroga.

Dimensión 5: Posibilidad de refutación.

13. Especificación de las formas de organización del PEA donde se aplicará el modelo:

1	2	3	4	5
No se especifican.	Se especifican solo para el componente académico y no se aprovechan todas las potencialidades de este.	Se especifican aprovechando todas las potencialidades del componente académico.	Se especifican para todos los componentes, pero no se aprovechan todas sus potencialidades.	Se especifican aprovechando las potencialidades de los componentes del proceso de formación.

14. Inclusión en el modelo de procedimientos para su implementación:

1	2	3	4	5
No se incluye ninguno de los procedimientos necesarios.	Se incluyen solo algunos de los procedimientos necesarios.	Se incluyen todos los procedimientos necesarios, pero no se ejemplifican.	Se incluyen los procedimientos necesarios y algunos se ejemplifican.	Se incluyen todos los procedimientos necesarios y todos se ejemplifican.

Dimensión 6: Poder de replicación.

15. Ajuste del modelo al diseño curricular de la carrera:

1	2	3	4	5
No se corresponde con el diseño curricular de la carrera.	Se corresponde parcialmente con el diseño curricular de la carrera.	Se corresponde parcialmente con el diseño curricular de la carrera y aporta ideas novedosas de la Teroga solo para el componente académico	Se corresponde con el diseño curricular de la carrera y aporta ideas novedosas de la Teroga solo para el componente académico.	Se corresponde con el diseño curricular de la carrera y aporta ideas novedosas de la Teroga para todos los componentes del proceso formativo.

16. Adaptación del modelo a las condiciones del proceso formativo:

1	2	3	4	5
No se adapta a las condiciones	Se adapta parcialmente a	Se adapta parcialmente a	Se adapta a las condiciones	Se adapta a las condiciones

existentes.	las condiciones existentes para el desarrollo de los tres componentes.	las condiciones existentes para el desarrollo del componente académico y requiere condiciones no existentes en el resto de los componentes.	existentes para el desarrollo del componente académico y requiere de algunas condiciones no existentes en el componente laboral e investigativo.	existentes para el desarrollo todos los componentes.
-------------	--	---	--	--

17. Correspondencia del modelo con el nivel de partida de la formación geométrica de los alumnos de la carrera:

1	2	3	4	5
Requiere de una formación geométrica que no poseen los alumnos de la carrera.	Requiere de una formación geométrica que en gran parte no poseen los alumnos de la carrera.	Requiere de una formación geométrica que no poseen los alumnos de la carrera, pero que se puede asegurar en el PEA de la GA.	Requiere de una formación geométrica que poseen algunos alumnos de la carrera y los demás la pueden adquirir en el PEA de la GA.	Requiere de una formación geométrica que poseen la mayoría de los alumnos de la carrera.

18. Correspondencia de la terminología utilizada en el modelo con la formación didáctica de los profesores que dirigen el PEA de la GA en la formación inicial.

1	2	3	4	5
Ninguno de los términos se corresponde.	Algunos términos se corresponden.	Los términos fundamentales se corresponden.	La mayoría de los términos se corresponden.	Todos los términos se corresponden.

Sugerencias acerca de aspectos a añadir, suprimir o mejorar en el modelo y preocupaciones referidas a su aplicación:

---



---



---



---



---



---

Muchas gracias por su colaboración.

## Anexo 18

Estimado profesor:

Con el objetivo de la evaluación del modelo didáctico elaborado se determinaron seis dimensiones de la calidad de un modelo cuyos significados se exponen en la tabla:

No.	Dimensión	Significado
1	Poder descriptivo	Capacidad de representar de forma simplificada lo esencial del proceso modelado en correspondencia con el objetivo del estudio.
2	Alcance	Amplitud del conjunto de situaciones en las que está presente el proceso modelado y distribución de estas situaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA).
3	Poder predictivo	Capacidad para anticipar resultados en la actuación de los alumnos y el profesor antes de que ellos ocurran, gracias a la presencia de ciertas condiciones previas que proveen un contexto de actuación en una situación de aprendizaje.
4	Rigor y especificidad	Ajuste del modelo al proceso modelado.
5	Posibilidad de refutación	Capacidad de contrastar el modelo en la práctica.
6	Poder de replicación	Capacidad de implementar el modelo en distintas circunstancias y con diferentes docentes y alumnos.

Distribuya 14 puntos entre las 6 dimensiones, atendiendo al peso que usted considera tiene cada una en un modelo didáctico cualquiera. Al mayor peso corresponde el mayor puntaje.

Dimensión	1	2	3	4	5	6
Puntaje						

Si desea recomendar algo, escriba sus sugerencias aquí:

Anexo 19

Votación ponderada correspondiente a las dimensiones del modelo						
Experto	Votación por dimensión					
	1	2	3	4	5	6
1	2	2	2	3	2	3
2	3	2	3	3	2	1
3	1	2	2	3	3	3
4	2	3	2	2	3	2
5	4	3	2	3	1	1
6	2	2	2	2	3	3
7	2	2	2	3	3	2
8	2	2	2	2	3	3
9	2	3	2	2	2	3
10	2	2	2	3	4	1
11	1	2	2	3	3	3
12	2	2	2	3	4	1
13	3	2	2	3	2	2
14	2	1	2	3	3	3
15	2	2	2	3	1	4
16	2	2	3	3	2	2
17	2	3	3	4	1	1
18	1	3	3	2	3	2
19	3	3	2	3	1	2
20	2	2	2	2	3	3
21	1	2	2	3	3	3
22	1	2	2	3	3	3
23	2	2	2	3	3	2
24	1	3	3	3	2	2
25	3	2	3	3	2	1
26	2	3	2	2	3	2
27	3	3	2	3	2	1
28	2	2	2	3	3	2
29	2	3	2	2	3	2
30	2	2	2	3	2	3
Total	61	69	66	83	75	66

Anexo 20

Fórmulas para calcular los índices de las dimensiones y de la calidad del modelo	
Dimensión	Índice
Poder descriptivo	$D_1 = \frac{1}{4}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$
Alcance	$D_2 = \frac{1}{2}(I_5 + I_6)$
Poder predictivo	$D_3 = \frac{1}{3}(I_7 + I_8 + I_9)$
Rigor y especificidad	$D_4 = \frac{1}{3}(I_{10} + I_{11} + I_{12})$
Posibilidad de refutación	$D_5 = \frac{1}{2}(I_{13} + I_{14})$
Poder de replicación	$D_6 = \frac{1}{4}(I_{15} + I_{16} + I_{17} + I_{18})$
Calidad del modelo	$C = \frac{1}{420}(61D_1 + 69D_2 + 66D_3 + 83D_4 + 75D_5 + 66D_6)$

Anexo 21

A. Puntos de corte y escala							
Indicadores	Categorías				Suma	Promedio	N- Promedio
	MA	BA	A	PA			
1	1,1108	1,83	3,49	3,49	9,92	4,68	-0,16
2	0,5244	3,49	3,49	3,49	10,99	5,37	-0,84
3	1,1108	3,49	3,49	3,49	11,58	5,51	-0,99
4	1,1108	1,50	1,83	3,49	7,94	3,69	0,84
5	0,6229	3,49	3,49	3,49	11,09	5,39	-0,86
6	0,3407	3,49	3,49	3,49	10,81	5,32	-0,79
7	0,5244	1,50	3,49	3,49	9,01	4,37	0,16
8	0,2533	1,11	1,50	3,49	6,36	3,11	1,41
9	0,4307	1,50	3,49	3,49	8,91	4,35	0,18
10	1,2816	3,49	3,49	3,49	11,75	5,56	-1,03
11	0,6229	1,50	1,83	3,49	7,45	3,57	0,96
12	0,9674	3,49	3,49	3,49	11,44	5,48	-0,95
13	0,9674	3,49	3,49	3,49	11,44	5,48	-0,95
14	0,0837	1,50	3,49	3,49	8,56	4,26	0,27
15	1,1108	1,50	3,49	3,49	9,59	4,52	0,01
16	0,6229	1,11	1,50	3,49	6,72	3,21	1,32
17	-0,967	0,62	3,49	3,49	6,64	3,56	0,97
18	0,3407	0,97	3,49	3,49	8,29	4,06	0,47
Suma	11,059	39,08	55,53	62,82	168,49	81,48	
Promedio Puntos de corte	0,6144	2,17	3,09	3,49	N = 4,53		

B. Resultados de la medición de los indicadores por los expertos					
Indicadores	Categorías				
	MA	BA	A	PA	I
1	X				
2	X				
3	X				
4		X			
5	X				
6	X				
7	X				
8		X			
9	X				
10	X				
11		X			
12	X				
13	X				
14	X				
15	X				
16		X			
17		X			
18	X				
Total	13	5			

Anexo 22

Tabla de índices de indicadores, de dimensiones y de constructo						
Dimensión	Índices de indicadores				Índice- dimensión	Categoría
	1	2	3	4		
Poder descriptivo	100	100	100	75	93,8	Muy adecuado
Alcance	100	100			100	Muy adecuado
Poder predictivo	100	75	100		91,7	Muy adecuado
Rigor y especificidad	100	75	100		91,7	Muy adecuado
Posibilidad de refutación	100	100			100	Muy adecuado
Poder de replicación	100	75	75	100	87,5	Muy adecuado
Índice de calidad del modelo					94,2	Muy adecuado

## Anexo 23

Modelo estadístico para la medición de la dimensión cognitivo-procedimental correspondiente a la Teroga

### 1. Variables

#### 1.1. Subíndices

i: subdimensión de primer nivel ( $i:1, 5$ ).

j: subdimensión de segundo nivel. Varía en cada subdimensión de primer nivel..

k: indicador. Varía en cada subdimensión de segundo nivel.

v: número de orden de la medición de un indicador. Varía con el indicador.

#### 1.2. Valores de subíndices

$N_i$ : número de subdimensiones de segundo nivel de la subdimensión i ( $j: \overline{1, N_i}$ ).

$N_{ij}$ : número de indicadores de la subdimensión de segundo nivel j de la subdimensión de primer nivel i ( $k: \overline{1, N_{ij}}$ ). Este valor depende de la prueba.

$N_{ijk}$ : número de mediciones del indicador k correspondiente a la subdimensión de segundo nivel j de la subdimensión de primer nivel i ( $v: \overline{1, N_{ijk}}$ ).

#### 1.3. Variables estadísticas

$A_{ijk}^{(v)}$ : representa el valor asignado en la medición v al indicador k correspondiente a la subdimensión de segundo nivel j de la subdimensión de primer nivel i. A esta variable se le asigna un valor de la escala de medición utilizando matrices de valoración.

#### 1.4. Índices

$I_{ijk}^{(v)}$ : representa el valor asignado en la medición v al indicador k correspondiente a la subdimensión de segundo nivel j de la subdimensión de primer nivel i en una escala cuyo valores pertenecen al intervalo [0,100]. Se obtiene a partir de  $A_{ijk}$  por conversión.

$I_{ijk}$ : representa el valor asignado en todas las mediciones al indicador k correspondiente a la subdimensión de segundo nivel j de la subdimensión de primer nivel i en una escala cuyo valores pertenecen al intervalo [0,100]. Permite triangular las mediciones de un mismo indicador.

$I_{ij}$ : representa el valor asignado en la medición a la subdimensión de segundo nivel j de la subdimensión de primer nivel i en una escala cuyos valores pertenecen al intervalo [0, 100].

$I_i$ : representa el valor asignado en la medición a la subdimensión de primer nivel  $i$  en una escala cuyos valores pertenecen al intervalo  $[0, 100]$ .

$I$ : representa el valor asignado en la medición a la dimensión cognitivo-procedimental en una escala cuyos valores pertenecen al intervalo  $[0, 100]$ .

### 1.5. Coeficientes de ponderación de los índices

$C_{ijk}^{(v)}$ : nivel de desempeño cognitivo del ítem utilizado para medir el indicador  $k$  correspondiente a la subdimensión de segundo nivel  $j$  de la subdimensión de primer nivel  $i$  en la medición  $v$ .

$C_{ijk}$ : peso relativo del indicador  $k$  en la subdimensión de segundo nivel  $j$  de la subdimensión de primer nivel  $i$ .

$C_{ij}$ : peso relativo de la subdimensión de segundo nivel  $j$  en la subdimensión de primer nivel  $i$ .

$C_i$ : peso relativo de la subdimensión de primer nivel  $i$  dentro en la dimensión cognitivo-procedimental.

### 2. Valor de los coeficientes de ponderación

$C_{ijk}^{(v)}$ : toma el valor 1, 2 ó 3 en dependencia del nivel de desempeño cognitivo que exija el ítem.

$C_{ijk}$ : Los valores de estos coeficientes por indicadores se muestran en las tablas siguientes

Indicador	1.1.1.1	1.1.1.2	1.1.1.3	1.1.1.4	1.1.2.1	1.1.2.2	1.1.2.3
Coeficiente	1	1	1	1	1	1	1

Indicador	1.2.1.1	1.2.1.2	1.2.2.1	1.2.2.2	1.2.3.1	1.2.3.2	1.2.4.1	1.2.4.2	1.2.4.3	1.2.4.4
Coeficiente	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1

Indicador	1.3.1.1	1.3.1.2	1.3.1.3	1.3.1.4	1.3.1.5	1.3.1.6
Coeficiente	1	1	2	2	2	1

Indicador	1.3.2.1	1.3.2.2	1.3.2.3	1.3.2.4	1.3.2.5
Coeficiente	1	1	2	2	1

Indicador	1.4.1.1	1.4.1.2	1.4.1.3	1.4.1.4	1.4.1.5	1.4.1.6
Coeficiente	1	1	2	2	3	1

Indicador	1.4.2.1	1.4.2.2	1.4.2.3	1.4.2.4	1.4.2.5	1.4.2.6
Coficiente	1	1	1	2	1	2

Indicador	1.5.1.1	1.5.1.2	1.5.1.3	1.5.1.4	1.5.1.5	1.5.1.6	1.5.2.1	1.5.2.2	1.5.2.3	1.5.2.4
Coficiente	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1

$C_{ij}$ : Los valores de estos coeficientes se muestran en la siguiente tabla.

Sub de segundo nivel	1.1.1	1.1.2	1.2.1	1.2.2	1.2.3	1.2.4	1.3.1	1.3.2	1.4.1	1.4.2	1.5.1	1.5.2
Coficiente	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	2	1

$C_i$ : Los valores de estos coeficientes se muestran en la siguiente tabla.

Subdimensión de primer nivel	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
Coficiente	1	2	2	1	1

Fórmulas para los índices

Para calcular el valor de  $I_{ijk}^{(v)}$  correspondiente a  $A_{ijk}^{(v)}$  se ordena de menor a mayor la escala de medición del indicador, se divide 100 por el número de elementos de la escala de medición disminuido en uno, después se multiplica ese resultado por el número de orden de  $A_{ijk}^{(v)}$  disminuido en uno y finalmente se redondea este producto a entero.

El resto de los índices se calculan por las fórmulas siguientes:

$$I_{ijk} = \frac{\sum_{v=1}^{N_{ijk}} C_{ijk}^{(v)} I_{ijk}^{(v)}}{\sum_{v=1}^{N_{ijk}} C_{ijk}^{(v)}}, \quad I_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{ij}} C_{ijk} I_{ijk}}{\sum_{k=1}^{N_{ij}} C_{ijk}}, \quad I_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} I_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_i} C_{ij}}, \quad I = \frac{\sum_{i=1}^5 C_i I_i}{\sum_{i=1}^5 C_i}$$

### 3. Acotamiento de los índices

Todos los índices toman valores del intervalo [0, 100].

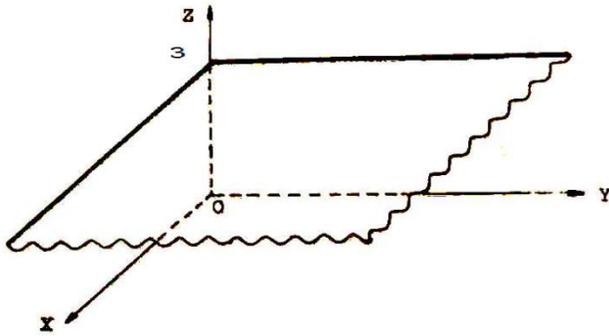
## Cuestionario A

Prueba para la evaluación de algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

Alumno (a): \_\_\_\_\_

Esta prueba tiene como objetivo medir algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

1. De las expresiones siguientes determina cuáles corresponden a representaciones verbales de la recta  $r: 2x-3y-12=0$ . Argumenta.
  - a) Recta que pasa por los puntos  $A(6;0)$  y  $B(0;-4)$ .
  - b) Recta que pasa por el punto  $C(3;2)$  y es perpendicular al vector  $n=(-2;3)$ .
  - c) Recta que pasa por el punto  $A(6;0)$  y tiene pendiente  $m = \frac{2}{3}$ .
  - d) Recta que pasa por el punto  $D(9;2)$  y es paralela al vector  $a=(-3;2)$ .
  - e) Recta que tiene pendiente  $m = \frac{2}{3}$ .
  
2. Expón un ejemplo de los conceptos siguientes para los objetos geométricos que se indican entre paréntesis y argumenta. Deben ser diferentes a los de las preguntas 1 y 3)
  - a) Representación de un objeto geométrico (recta en el plano, recta en el espacio, plano).
  - b) Tipo de representación de un objeto geométrico (recta en el plano, recta en el espacio, plano).
  - c) Forma de representación de un objeto geométrico (recta en el plano, recta en el espacio, plano).
  
3. Identifica el tipo y la forma de las representaciones de los objetos geométricos dados en cada uno de los siguientes incisos. Argumenta.
  - a) Recta que pasa por  $P(2;3)$  y es perpendicular al vector  $n=(2;1)$
  - b) Recta representada por el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$
  - c) Recta dada por las ecuaciones  $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$
  - d) Plano que contiene las rectas paralelas  $r: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$
  - e) Plano cuya ecuación es  $2x-y+z=4$ .
  - f) Plano que se muestra en la figura



4. La ecuación 
$$\begin{cases} x = -2 + 2r + 5s \\ y = 3 - 3r + 2s \\ z = -1 + r - s \end{cases}$$
 corresponde al plano  $\eta$ .

- Escribe la ecuación general de  $\eta$ . Explica como compruebas si la representación obtenida corresponde al plano  $\eta$ .
- ¿La representación obtenida en el inciso anterior es única? Argumenta.
- Obtén representaciones verbales de  $\eta$  dadas por: i) un punto y un vector normal y por ii) dos rectas paralelas.
- Determina el tipo y la forma de las representaciones dada y buscada del inciso ii).
- Representa gráficamente el plano  $\eta$ .
- Clasifica las transferencias realizadas en los incisos a, c y e.

### Cuestionario B

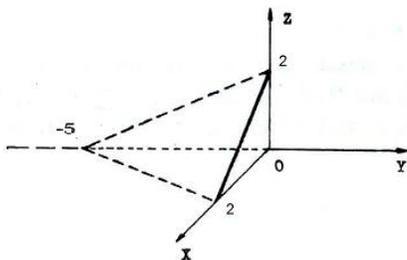
Prueba para la evaluación de algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

Alumno (a): \_\_\_\_\_

Esta prueba tiene como objetivo medir algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

- De las expresiones siguientes determina cuáles corresponden a representaciones verbales del plano  $\beta: x + y + 2z - 4 = 0$  y argumenta.
  - Plano que pasa por el punto  $A(4;0;0)$  y es paralelo a los vectores  $a=(-1;1;0)$  y  $b=(-2;0;1)$
  - Plano que pasa por los puntos  $A(4;0;0)$ ,  $B(2;2;0)$  y  $C(0,4;0)$ .

- c) Plano que pasa por el punto  $D(1;1;2)$  y tiene como vector normal  $n=(1;1;2)$ .
- d) Plano que pasa por los puntos  $D(0;4;0)$  y contiene a la recta  $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ .
- e) Plano que pasa por el punto  $A(4;0;0)$  y tiene vector normal  $n=(-2;-2;-4)$ .
2. Expón un ejemplo de los conceptos siguientes para los objetos geométricos que se indican entre paréntesis y argumenta. Deben ser diferentes a los de las preguntas 1 y 3)
- a) Representación de un objeto geométrico (recta en el plano, recta en el espacio, plano).
- b) Tipo de representación de un objeto geométrico (recta en el plano, recta en el espacio, plano).
- c) Forma de representación de un objeto geométrico (recta en el plano, recta en el espacio, plano).
3. Determina el tipo y la forma de las representaciones de los objetos geométricos dados en cada uno de los siguientes incisos.
- a) Recta que pasa por el punto  $C(-6;2)$  y tiene pendiente  $\frac{1}{3}$ .
- b) Recta cuya ecuación es:  $x-2y+1=0$ .
- c) Recta dada por el sistema  $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 4z - 8 = 0 \end{cases}$
- d) Plano que pasa por el punto  $A(5;2;-3)$  y es paralelo a los vectores  $a=(2;-1;2)$  y  $b=(1;3;-5)$ .
- e) Plano que contiene las rectas que se cortan  $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$
- f) Plano que se muestra en la figura



4. La siguiente ecuación corresponde a una recta  $r$ : 
$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 4z - 8 = 0 \end{cases}$$
- Escribe una ecuación paramétrica de  $r$ . Explica como compruebas si la representación obtenida corresponde a la recta.
  - ¿La representación obtenida en el inciso anterior es única? Argumenta.
  - Obtén representaciones verbales de la recta  $r$  dadas por: i) dos puntos y ii) un punto y un vector paralelo a  $r$ .
  - Representa gráficamente la recta  $r$ .
  - Clasifica las transferencias realizadas en los incisos a, c y d.

### Cuestionario C

Prueba para la evaluación de algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

Alumno (a): \_\_\_\_\_

Esta prueba tiene como objetivo medir algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

- De las expresiones siguientes determina cuáles corresponden a representaciones de la circunferencia de centro  $M(3;1)$  y radio  $r=3$ . Argumenta.
  - Circunferencia de centro en  $M(3;1)$  y que pasa por  $A(3;-2)$ .
  - Circunferencia uno de cuyos diámetros es  $\overline{CD}$  con  $C(0;1)$  y  $D(6;1)$ .
  - Circunferencia de centro en  $M(3;1)$  y tangente a la recta  $y=0$ .
  - Circunferencia que pasa los puntos  $A(3;-2)$  y  $E(3;4)$ .
  - Circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$
- Determina el tipo y la forma de las representaciones de las curvas dadas en cada uno de los siguientes incisos.
  - Elipse de centro  $C(3;5)$ , un vértice en  $V(3;10)$  y un foco en  $F(3;2)$ .
  - Elipse de ecuación  $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 32 = 0$ .
  - Hipérbola de focos  $F_1(4; -2)$  y  $F_2(4; -8)$  y un vértice en  $V(4;-3)$ .
  - Hipérbola de ecuación  $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ .
  - Parábola de vértice  $V(-2;-4)$  y directriz  $2x+7=0$ .
  - Parábola de ecuación  $(y - 1)^2 = -8(x - 5)$ .
- La figura 1 corresponde a la representación gráfica de una esfera:
  - Determina su ecuación ordinaria.

- b) Determina su ecuación general.
- c) Obtén representaciones verbales de la esfera dadas por: i) el centro y el radio, ii) los extremos de un diámetro.
- d) Explica cómo compruebas que la representación obtenida en el inciso ii) corresponde a la esfera dada.
- e) ¿La representación obtenida en el inciso ii) es única? Argumenta.
- f) Existe otro procedimiento para obtener la representación del inciso ii)? Descríbelo.
- g) Formula un nuevo problema de transferencia relacionado con la esfera dada.
- h) Clasifica las transferencias realizadas en los incisos a y c.

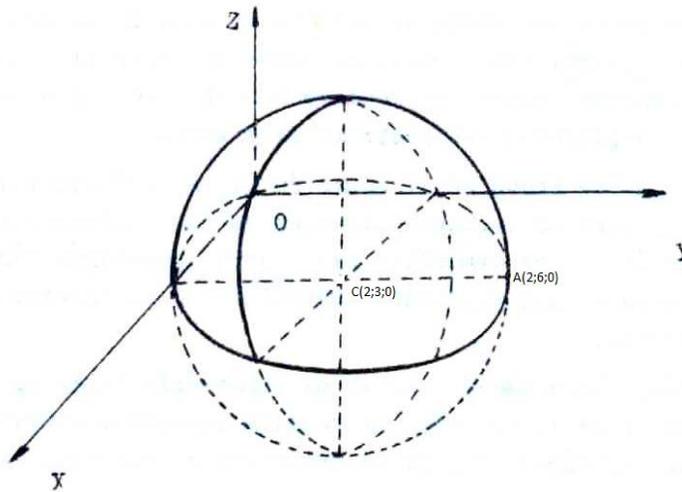


Figura 1

### Cuestionario D

Prueba para la evaluación de algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

Alumno (a): \_\_\_\_\_

Esta prueba tiene como objetivo medir algunos indicadores del desempeño de los alumnos en la Teroga.

1. De las expresiones siguientes, determina cuáles corresponden a representaciones verbales de la hipérbola  $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ . Argumenta.
  - a) Hipérbola de centro en C(2;-1) y focos  $F_1(-3;-1)$  y  $F_2(7;-1)$ .
  - b) Hipérbola de centro en C(2;-1) y longitud del eje real 4 u.
  - c) Hipérbola de vértices  $V_1(2;2)$  y  $V_2(2;-3)$  y excentricidad  $e = \frac{5}{4}$ .
  - d) Hipérbola de centro en C(2;-1), un foco en  $F_1(-3;-1)$  y  $e = \frac{5}{4}$ .

- e) Hipérbola de focos en los puntos  $F_1(-3;-1)$  y  $F_2(7,-1)$  y longitud del eje imaginario igual a 6 u.
2. Determina el tipo y la forma de las representaciones de las curvas dadas en cada uno de los siguientes incisos.
- a) Circunferencia **C** de centro en el punto  $M(-4;2)$  que es tangente a la recta  $s: 3x+4y-16= 0$ .
- b) Circunferencia que pasa por los puntos  $A(-1;5)$ ,  $B(-2;-2)$  y  $C(5;5)$ .
- c) Parábola de ecuación  $y^2 - 6y - 8x - 23 = 0$
- d) Parábola **P** de vértice  $V(3; 3)$  y foco  $F(3; 1)$ .
- e) Elipse de focos  $V_1(1; 1)$  y  $V_2(7; 1)$  y  $e = \frac{1}{2}$ .
- f) Elipse **E** de centro  $C(4,-1)$ , uno de los focos en  $F(1,-1)$  y  $a=3u$ .
3. La ecuación  $16y^2 - 36x^2 + 9z^2 - 144 = 0$  corresponde una superficie de segundo grado:
- a) Representála gráficamente.
- b) Obtén una representación verbal de la superficie dada por el centro y tres puntos de la superficie.
- c) Explica cómo compruebas que la representación obtenida en el inciso c) corresponde a la superficie dada.
- d) ¿La representación obtenida en el inciso b) es única? Argumenta.
- e) Clasifica las transferencias realizadas en los incisos a y b.

Anexo 25

A. Índices correspondientes a los indicadores de la subdimensión “Dominio de los conceptos fundamentales de la teoría de las representaciones en el contexto de la Geometría Analítica”.							
Alumnos	1.1.1.1	1.1.1.2	1.1.1.3	1.1.1.4	1.1.2.1	1.1.2.2	1.1.2.3
1	90,1	100	100	93,4	100	100	100
2	63,5	86,2	72,2	67	55,7	22,0	44,7
3	83,5	89,0	89,0	80,2	67	78,0	78,0
4	63,6	86,3	77,9	53,4	22	67,0	67,0
5	80,1	89,0	86,3	80,2	78	89,0	66,7
6	46,8	58,3	58,3	53,4	33	44,7	33,3
7	86,8	100	94,5	93,4	78	78,0	55,7
8	53,4	86,1	58,4	67	67	89,0	44,3
9	43,4	58,3	44,3	60,2	44,3	22,0	33,0
10	96,7	100	100	95,8	67,0	100	100
11	56,9	91,8	72,3	71	67	100	66,7
12	63,6	91,8	75,1	71	67	100	89,0
13	53,5	61,2	33,2	61,2	67	100	89,0
Promedio	67,8	84,4	73,9	72,9	62,5	76,1	66,7

B. Índices correspondientes a los indicadores de la subdimensión “Aplicación del PH-Teroga”.

Alum.	1.2.1.1	1.2.1.2	1.2.1.3	1.2.2.1	1.2.2.2	1.2.3.1	1.2.3.2	1.2.4.1	1.2.4.2	1.2.4.3	1.2.4.4
1	100	100	83,5	75	75	83,5	87,5	50	91,75	100	83,5
2	62,5	75	50	50	50	41,5	37,5	0	66,8	0	67
3	75	62,5	67	75	75	75	100	50	66,8	75	83,5
4	37,5	37,5	50	50	50	67	75	0	41,8	50	50
5	75	75	87,5	75	75	83,5	62,5	50	91,8	75	50
6	37,5	37,5	58,5	0	0	0	37,5	0	41,8	0	33,5
7	62,5	50	67	50	50	83,5	75	66,7	83,5	75	100
8	50	62,5	50	25	25	33,5	50	0	41,8	50	16,5
9	37,5	37,5	50	0	0	0	37,5	0	41,8	0	33
10	75,0	100,0	83,5	75	100	100	100	100	100	100	100
11	62,5	75	50	50	25	33,5	25	66,7	67	0	83,5
12	50	50	33	75	50	16,5	75	66,7	58,5	0	66,5
13	37,5	37,5	50	0	0	0	25	50,0	41,75	0	33
Prom	58,7	58,5	60,0	46,2	44,2	47,5	60,6	38,5	64,2	40,4	61,5

C. Índices correspondientes a los indicadores de la subdimensión “Aplicación de procedimientos de transferencia”											
Alum	1.3.1.1	1.3.1.2	1.3.1.3	1.3.1.4	1.3.1.5	1.3.1.6	1.3.2.1	1.3.2.2	1.3.2.3	1.3.2.4	1.3.2.5
1	100	100	93,4	75	66,7	100	75	75	50	50	50
2	100	100	60,2	50	16,7	78	75	75	75	75	75
3	100	100	66,8	75	50,0	66,7	25	0	0	0	0
4	90	90	46,8	50	0	55,7	75	75	25	25	25
5	100	100	73,6	75	66,7	89	75	75	75	75	75
6	100	70	40	0	0	55,7	50	25	0	0	0
7	100	100	93,4	50	66,7	89,0	25	25	25	25	25
8	100	100	46,6	75	0	55,7	0	0	0	0	0
9	100	70	40	25	0	55,7	50	50	50	25	50
10	100	100	100	75	100	100	100	100	100	75	100
11	100	100	72,5	50	62,5	67	75	75	75	75	75
12	100	100	78	75	75	58,5	25	25	25	25	25
13	85,7	100	55,5	25	50	41,75	0	0	0	0	0
Prom.	98,1	94,6	66,7	53,8	42,6	70,2	50,0	46,2	38,5	34,6	38,5

D. Índices correspondientes a los indicadores de la subdimensión “Análisis, valoración y complementación de fuentes bibliográficas respecto a la transferencia entre representaciones”												
Alum.	1.4.1.1	1.4.1.2	1.4.1.3	1.4.1.4	1.4.1.5	1.4.1.6	1.4.2.1	1.4.2.2	1.4.2.3	1.4.2.4	1.4.2.5	1.4.2.6
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	50	100	100
2	100	50	100	50	50	100	100	50	50	0	50	50
3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	50	100	100
4	100	100	100	50	50	100	100	50	50	50	50	0
5	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
6	100	50	100	50	50	50	100	50	50	0	50	0
7	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
8	100	100	50	50	50	50	100	50	50	50	50	50
9	100	50	50	50	50	100	50	50	50	0	50	0
10	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
11	100	100	100	50	50	50	100	50	50	50	50	50
12	100	100	100	100	100	50	100	100	50	50	100	50
13	50	50	50	0	0	50	50	50	0	0	50	0
Prom.	96,2	84,6	88,5	69,2	69,2	80,8	92,3	73,1	65,4	46,2	73,1	53,8

E. Índices correspondientes a los indicadores de la subdimensión “Atención a alumnos del nivel medio en la práctica laboral”										
Alum.	1.5.1.1	1.5.1.2	1.5.1.3	1.5.1.4	1.5.1.5	1.5.1.6	1.5.2.1	1.5.2.2	1.5.2.3	1.5.2.4
1	100	100	100	50	50	100	100	100	100	100
2	50	100	100	50	50	50	100	50	50	50
3	100	100	100	100	50	50	100	100	50	50
4	50	50	100	50	50	50	100	100	50	50
5	50	50	100	50	50	50	100	100	50	50
6	50	50	50	0	0	50	100	50	50	50
7	100	100	100	50	50	100	100	50	50	50
8	50	50	100	0	0	50	100	50	50	50
9	50	50	50	0	50	50	100	50	50	50
10	100	100	100	50	100	100	100	100	100	100
11	50	100	100	50	50	50	50	50	50	50
12	50	100	100	100	50	50	50	100	100	50
13	50	50	50	50	0	0	50	50	0	0
Prom.	65,4	76,9	88,5	46,2	42,3	57,7	88,5	73,1	57,7	53,8

F. Índices correspondientes a las “subdimensiones de segundo nivel de la dimensión cognitivo-procedimental”												
Alum.	1.1.1	1.1.2	1.2.1	1.2.2	1.2.3	1.2.4	1.3.1	1.3.2	1.4.1	1.4.2	1.5.1	1.5.2
1	95,9	100	94,5	75,0	85,5	75,1	85,6	57,1	100	75	81,25	100
2	72,2	40,8	62,5	50	39,5	26,8	59,1	75,0	70	37,5	62,5	62,5
3	85,4	74,3	68,2	75	87,5	65,1	72,3	3,6	100	75	75,0	75
4	70,3	52,0	41,7	50	71	28,4	47,7	39,3	75	43,75	56,3	75
5	83,9	77,9	79,2	75,0	73	63,4	79,9	75,0	100	87,5	56,3	75
6	54,2	37,0	44,5	0,0	18,75	15,1	34,0	10,7	65	31,25	31,3	62,5
7	93,7	70,6	59,8	50,0	79,25	78,4	78,8	25,0	100	87,5	81,3	62,5
8	66,2	66,8	54,2	25	41,75	21,7	55,4	0,0	60	50	37,5	62,5
9	51,5	33,1	41,7	0	18,75	15,0	39,5	42,9	60	25	43,8	62,5
10	98,1	89,0	86,2	83	100	100	94	92,9	100	87,5	94	100
11	73,0	77,9	62,5	42	29,25	56,8	70,8	75,0	70	50	62,5	50
12	75,4	85,3	44,3	67	45,75	51,7	79,4	25,0	95	62,5	68,8	75
13	52,3	85,3	41,7	0	12,5	35	54,3	0,0	25	18,75	25,0	25
Prom.	74,8	68,5	60,1	45,5	54,0	48,6	65,5	40,1	78,5	56,3	59,6	68,3

G. Índices correspondientes a los indicadores de la dimensión afectivo-motivacional					
Alumnos	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
1	100	100	100	100	100
2	50	50	0	50	50
3	100	100	50	50	50
4	50	100	100	50	50
5	100	100	50	50	50
6	100	100	50	50	50
7	100	100	100	100	100
8	50	100	0	50	50
9	100	100	50	50	50
10	100	100	100	100	100
11	50	50	50	100	100
12	50	100	50	50	50
13	0	50	0	0	0
Promedio	73,1	88,5	53,8	61,5	61,5

H. Índices correspondientes a los indicadores de las subdimensiones “Comunicación con el profesor”, “Comunicación con los compañeros de clase” y “Comunicación con sus alumnos de la práctica laboral e investigativa”

Alumnos	3.1.1	3.1.2	3.2.1	3.2.2	3.2.3	3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.3.4
1	100	100	50	100	100	100	100	100	100
2	50	0	100	50	50	50	100	100	50
3	50	50	100	50	100	100	100	100	100
4	100	50	50	100	100	50	100	100	50
5	100	50	100	100	100	100	100	100	100
6	100	50	50	50	50	50	100	100	50
7	100	100	50	100	100	100	50	100	100
8	50	0	50	50	50	50	100	100	50
9	100	0	50	100	100	50	100	100	50
10	100	100	100	100	100	100	100	100	100
11	50	50	50	50	50	50	100	50	50
12	100	50	100	50	100	100	100	50	50
13	50	0	0	0	50	50	50	50	50
Promedio	80,8	46,2	65,4	69,2	80,8	73,1	92,3	88,5	69,2

I. Índices correspondientes a los indicadores de las subdimensiones “Comunicación matemática oral.” y “Comunicación científica oral”								
3.4.1	3.4.2	3.4.3	3.5.1	3.5.2		3.5.3	3.5.4	3.5.5
1	100	100	100	100	100	100	100	100
2	100	50	0	50	50	50	100	50
3	100	100	50	100	100	100	100	100
4	0	50	50	50	50	100	50	100
5	100	100	50	100	50	50	100	100
6	0	50	50	50	50	50	50	50
7	0	100	100	100	100	100	50	100
8	0	50	0	50	50	50	50	50
9	0	50	0	50	50	50	50	50
10	100	100	100	100	100	100	100	100
11	100	50	50	50	50	100	50	50
12	100	100	50	50	50	100	100	50
13	0	50	0	0	0	0	0	0
Promedio	53,8	73,1	46,2	65,4	61,5	73,1	69,2	69,2

J. Índices correspondientes a las dimensiones y el constructo					
Alumno	Dimensión 1	Dimensión 2	Dimensión 3	Constructo	Categoría
1	81,4	100	Dim3	89,9	Muy alto
2	57,4	40	96,7	52,9	Medio
3	64,0	70	57,0	70,3	Alto
4	53,0	70	83,3	61,3	Alto
5	76,7	70	69,0	77,7	Alto
6	29,2	70	87,7	46,7	Medio
7	67,0	100	58,3	79,7	Alto
8	39,2	50	84,7	43,3	Medio
9	35,7	70	45,0	49,5	Medio
10	93,5	100	56,7	96,7	Muy alto
11	61,1	70	100,0	62,7	Alto
12	60,4	60	58,7	65,0	Alto
13	26,5	10	79,0	21,2	Bajo
Promedio	57,3	67,7	21,7	62,8	

K. Tabla de frecuencias de la distribución de los índices correspondientes a las dimensiones y el constructo

Dimensiones	Categorías									
	MB	FR(%)	B	FR(%)	M	FR(%)	A	FR(%)	MA	FR(%)
D1	0	0	4	30,8	2	15,4	5	38,5	2	15,3
D2	1	7,7	0	0	2	15,4	7	53,8	3	23,1
D3	0	0	1	7,7	5	38,5	2	15,3	5	38,5
Constructo	0	0	1	7,7	4	30,8	6	46,2	2	15,3