INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO
"Capitán Silverio Blanco Núñez"
.

TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MÁSTER EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.
MENCIÓN: SECUNDARIA BÁSICA.

TÍTULO: "LA MODELACIÓN PICTOGRÁFICA UNA ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBALES EN LA SECUNDARIA BÁSICA".

AUTORA: Lic. Profesora Instructora: Carmen Alicia Fábregas López.

Sancti Spíritus

2008-2009

INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO

"Capitán Silverio Blanco Núñez"

.

TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MÁSTER EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN. MENCIÓN: SECUNDARIA BÁSICA.

TÍTULO: "LA MODELACIÓN PICTOGRÁFICA UNA ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBALES EN LA SECUNDARIA BÁSICA".

AUTORA: Lic. Profesora Instructora: Carmen Alicia Fábregas López.

TUTORA: MSc. Profesora Auxiliar: Olga Lidia Rabelo Piñero.

Sancti Spíritus

2008-2009

PENSAMIENTO.

”LOS SERES HUMANOS HAN DESARROLLADO TRES SISTEMAS PARALELOS PARA PROCESAR LA INFORMACIÓN Y PARA REPRESENTAR: UNO, POR MEDIO DE LA MANIPULACIÓN Y DE LA ACCIÓN; OTRO, POR MEDIO DE LA ORGANIZACIÓN PERCEPTUAL Y LA IMAGINACIÓN; Y OTRO, POR MEDIO DEL APARATO SIMBÓLICO.”

BRUNNER (1996)

DEDICATORIA.

- A mis padres por contribuir decisivamente en mi educación.

- A mis hijos por comprender que el tiempo restado a su atención, tenía este noble propósito.

- A mis nietas Patricia y Melissa por ser la razón de mi constante superación.

- A mi hermano Ernesto por su ayuda incondicional.

- A mi yerno Yoel Bandomo por ayudarme en mis momentos difíciles.

AGRADECIMIENTOS.

Se dice que: " La gratitud es el más legítimo pago al esfuerzo ajeno, es el reconocer que todo lo que somos es la suma del sudor de los demás, es tener conciencia de que solo no vale nada y de que la dependencia humana además de obligatoria, es hermosa."

Gracias a:

- Mi amiga Riselda Corujo Quesada por su ayuda sin fluctuar en horas de trabajo en la computadora.

- A mi alumna Melissa Duvergel por su incondicional ayuda.

- A mi tutora, MSc. Olga Lidia Rabelo por sus orientaciones constantes.

- A mi consultante Dr. Aldo Ruiz Pérez por sus orientaciones brillantes e inteligentes.

- A mis compañeros/as, MSc. Teresa Linares y Lic. Yean Cano por sus orientaciones constantes.

- Al profesor Yasmany Verges por su generosidad y compañía en el grupo.

- Al Dr. Humberto Rodríguez por su ayuda desinteresada.

- A todos mis amigos de siempre que han sabido confiar en mí.

RESUMEN.

La resolución de problemas se ha convertido en el centro de la época actual de la matemática, constituyendo el eje central del trabajo con los contenidos de la asignatura en la Secundaria Básica, por lo que es necesario una concepción renovadora que priorice este proceso, donde los estudiantes aprendan los contenidos y desarrollen estrategias que les permita aplicarlos posteriormente en su vida. En este trabajo se presenta un sistema de ejercicios para contribuir al aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica, aprovechando sus potencialidades para la resolución de problemas matemáticos verbales. En la conformación de los ejercicios se utilizaron las diferentes fuentes de información escritas y en particular los que se proponen en los lineamientos metodológicos de la asignatura y en el modelo de Escuela Secundaria Básica para alcanzar una cultura general integral utilizando las posibilidades que brindan las tecnologías de la información y comunicación. Fueron utilizados diferentes métodos teóricos, empíricos y matemáticos y/o estadísticos. Estos ejercicios fueron experimentados a partir del curso 2007-2008, logrando transformaciones positivas, tanto cualitativas como cuantitativas, además en la motivación y la actitud de los estudiantes.

ÍNDICE

Contenidos Páginas

INTRODUCCIÓN

El nuevo modelo de la Secundaria Básica tiene hoy ante sí el reto de garantizar que todos los adolescentes que ingresan a ella transiten por este nivel de educación, alcanzando conocimientos esenciales para la vida y el estudio, con una educación integral, portadora de valores humanos y revolucionarios necesarios en nuestra sociedad, poseedores de una cultura general básica que les permita tomar decisiones responsables sobre sus vidas futuras, en correspondencia con las necesidades sociales de nuestro país. Dentro del nuevo modelo se encuentran los objetivos formativos a cumplir en la Secundaria, el quinto se refiere a la resolución de problemas que plantea:

Solucionar problemas propios de las diferentes asignaturas y de la vida cotidiana, con una actitud transformadora y valorativa, a partir de la identificación, formulación y solución de problemas, mediante el desarrollo del pensamiento lógico, la aplicación de conocimientos, el empleo de estrategias y técnicas de aprendizaje específicas, así como de las experiencias y hábitos de estudios, de su comunicación, es decir, expresarse, leer, comprender y escribir correctamente; actuar con un nivel de independencia y autorregulación de su conducta adecuado a su edad.

Por esta razón, la resolución de problemas se ha convertido en el centro de la enseñanza de la Matemática en la época actual, por lo que es necesario contar con una concepción que ponga en primer lugar este proceso. En el cual aprenda contenidos y desarrolle estrategias que le permitan aplicar y encontrarle el sentido en su vida a las ideas Matemáticas. Es muy importante que los estudiantes propongan y analicen conjeturas, modelen Matemáticamente diferentes situaciones. (Campitraus y Rizo: 1996)

En el Programa Director de Matemática se precisa el papel de la misma como asignatura priorizada para lograr su vínculo con la vida y su papel en el desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos, por lo que el eje central de los contenidos lo constituye la resolución y planteamiento de problemas.

La Comisión Nacional de Matemática de Cuba ha concebido una competencia específica denominada "modelar" que se corresponde con tendencias internacionales acerca de la importancia de la modelación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura.

Al respecto, Ball y Wettrok, (citado por Castro Enrique. Y Castro, .Encarnación.1997) sostienen que los sujetos que han dibujado por sí mismo un diagrama para la formación de un concepto, recuerdan dicho concepto más significativamente que cuando se les ha proporcionado el dibujo con una representación visual del concepto.

Por otra parte, los sujetos que representan gráficamente un concepto lo aprenden mejor que aquellos que solo conocen su definición verbal. Una explicación admitida de este fenómeno es que la generación activa de una imagen visual por parte del que aprende facilita más el aprendizaje que la simple presencia visual. ''Es una hipótesis generalmente admitida que mejorando la educación visual en Matemática aumenta la intuición y se proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento''

Hay un alto consenso entre investigadores y especialistas relativos a que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer Matemáticas. Existen acuerdos entre ellos que hay que ayudar al estudiante a enriquecer el mundo de sus representaciones íntimas para que puedan seleccionar, de forma eficaz, los significados correspondientes a los objetos mentales que elabora y constituye, lo que deben ser instruidos y educados en su uso y comprensión.

Contrastando con la importancia que se le atribuye a la inclusión de la representación en los planes de estudio de algunos países y el reconocimiento de científicos y pedagogos de lo esencial de ésta para el aprendizaje de la Matemática, son muy escasas las investigaciones, que dentro de la resolución de problemas, abordan la representación.

A nivel internacional, se destacan las desarrolladas por R. Duval y colaboradores, J. Kaput, R. Skemp, J. R. Hayes y en los últimos tiempos E. Castro y E. Castro, L. Puig y otros las que han hecho contribuciones valiosas en este campo, dirigidas, en lo fundamental, a su conceptualización, al estudio de la representación de hechos y relaciones como aspectos importantes del aprendizaje y pensamiento matemático, así como a la exteriorización de las representaciones.

Como resultado de las investigaciones de diversos autores (Campistrous y Rizo, (1999); Labarrere,(1987); Llivina,(1999) ; Alonso,(2001) ; Rebollar, (2000), del estudio de los documentos rectores de la asignatura de Matemática en la enseñanza media y la entrevista a profesores, se ha obtenido un conjunto de elementos que permiten caracterizar la solución de problemas matemáticos dentro del proceso de enseñanza- aprendizaje en la escuela primaria y secundaria, donde los procedimientos metodológicos que se dan están dirigidos a acciones que debe realizar el maestro, es decir, es una metodología de enseñanza y no está dirigida a la búsqueda de procedimientos de actuación para el alumno. Esto significa que:

La estimulación es indirecta, mediatizada o mezclada con la acción del maestro que por lo general enseña como se encuentra la solución de un problema especifico. No se logran formas de actuación generalizadas en el alumno que son muy necesarias pues representan un desarrollo en si mismas y son aplicables, en general, para la vida. Los problemas se utilizan en función de desarrollar habilidades de cálculo y no como objetivo de enseñanza. Por otra parte, no enseñan técnicas de trabajo que pueden ser muy útiles en la resolución.

En el caso particular de los problemas aritméticos hay que añadir que no se trabajan adecuadamente los significados prácticos de la operaciones aritméticas y, en consecuencia, se abusa de la búsqueda de palabras claves en los textos de los problemas, logrando con esto que los alumnos traten mediante ellas de adivinar que operación u operaciones deben realizar y cometan muchos errores, unido al poco desarrollo que esta práctica provoca.

La práctica pedagógica cotidiana, demuestra que existen muchas dificultades en los estudiantes para resolver problemas en general, pero muy en especial cuando en la vía de solución intervienen los significados de las operaciones aritméticas, por lo que se debe enseñar la modelación pictográfica para que los mismos lleguen a "descubrir" la vía de solución o la respuesta del mismo problema.

Al recibir los estudiantes en séptimo grado y teniendo en cuenta la entrega pedagógica se comenzó la observación del desempeño en la resolución de problemas matemáticos verbales, a través de las preguntas escritas, comprobaciones masivas, lo que evidenció que existen dificultades en la resolución de problemas en cuanto al dominio de las acciones constantes que conforman la instrumentación ejecutora de la actuación, existen tendencias a emplear los últimos conocimientos adquiridos en las asignaturas (ecuaciones), no se trabaja adecuadamente los significados prácticos de las operaciones aritméticas y no se utilizan las técnicas de modelación pictográficas como medio o vía para resolver problemas matemáticos verbales, observándose el abandono ante la primera señal de fracaso.

De las reflexiones anteriores. Se deriva el siguiente problema científico:

Problema científico: ¿Cómo contribuir a elevar el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica en la Secundaria Básica?

Objeto: Proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática.

Campo de estudio: La resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

Objetivo: Aplicar un sistema de ejercicios que contribuyan a elevar el aprendizaje de los estudiantes de séptimo grado en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

Para dar cumplimiento al objetivo se formularon las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cuáles son los fundamentos teóricos y metodológicos del aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica?

2. ¿Qué estado presenta el aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica?

3. ¿Qué sistema de ejercicios contribuye a elevar el aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica?

4. ¿Cuál es la efectividad de la aplicación de un sistema de ejercicios para elevar el aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica?

Para dar cumplimiento del objetivo propuesto fue necesario planificar y ejecutar las siguientes tareas.

1. Determinación de los fundamentos teóricos-metodológicos que sustentan la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

2. Diagnóstico del nivel de aprendizaje de los estudiantes de séptimo grado en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

3. Estructuración de un sistema de ejercicios que contribuyen al aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica

4. Validación del sistema de ejercicios que contribuyen al aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

Variable independiente: Sistema de ejercicios mediante el uso de la modelación pictográfica.

Variable dependiente: Nivel de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales utilizando la modelación pictográfica.

Para la evaluación de la variable dependiente se aplicó el procedimiento siguiente:

- Determinación de dimensiones e indicadores.
- Modelación estadística de los indicadores mediante variables.
- Medición de los indicadores.
- Procesamiento estadístico de los datos.
- Elaboración de juicios de valor sobre el objeto de evaluación.

Para evaluar a los estudiantes en el nivel de desarrollo que poseen con respecto al tratamiento del aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales utilizando modelación pictográfica, se determinan las siguientes dimensiones con sus correspondientes indicadores cualitativos y cuantitativos, los cuales revelan, en un sentido amplio e integral.

Dimensión 1: Cognitiva (conocimiento que poseen para resolver problemas aplicando la modelación pictográfica)

Indicadores:

1. Representar gráficamente una parte del todo.
2. Identificar la parte (resto) que queda del todo.
3. Calcular por vía grafica una parte del resto.
4. Calcular el todo conociendo la parte y el número que representa la parte
5. Resolver problemas utilizando la modelación pictórica.

Dimensión 2: Motivacional.

Indicadores:

1. El gusto por resolver problemas utilizando la vía gráfica.
2. El interés de resolver problemas por vía gráfica.
3. El entusiasmo por la obtención del resultado.
4. La participación de las tareas propuestas.

Dimensión 3: Actitudinal.

Indicadores:

2. La voluntad para enfrentar la solución de la situación problémica.
3. La disciplina durante la resolución de problemas planteados.

Los criterios utilizados para la asignación de valores a las variables de indicadores están explicitados en el (Anexo #13)

Aquí se realiza un estudio de los diferentes conceptos que definen la variable independiente:

Ejercicio: Es la acción de repetir muchos actos para adiestrarse en la ejecución de una cosa, tomar posición de ella o hacer que uno la aprenda mediante la enseñanza y práctica de ella (RAE, 2006).

Sistema de ejercicio: Es un conjunto de ejercicios relacionados entre sí y diferenciados, que satisface los principios de potencialidad desarrolladora, representatividad y balance procedimental, suficiencia ejecutora, representatividad de los errores, ordenamiento progresivo de la complejidad de los ejercicios y diversidad en la formulación de las exigencias, cuya resolución conduce a la ejecución de las acciones de identificación, valoración y corrección. (Ballester y otros 1992: 407).

Modelo: Es un sistema (colección de objetos y relaciones) que se ha logrado mediante, entre otras, una de las variantes siguientes: se ha obtenido mentalmente, se ha realizado en forma material, se ha expresado verbalmente, visualmente o simbólicamente; o se ha descrito mediante las leyes y principios de una ciencia (Mederos & González, 2005: 2).

Modelación: Es el proceso de construcción de modelos de objetos en áreas del conocimiento humano, con el objetivo de aplicar las leyes y resultados de esas áreas a la determinación de información sobre los modelos con el objetivo de transferirla a los objetos que se estudian y comprobar su ajuste a ellos (Mederos & González, 2005: 3).

Modelos pictográficos: Son los modelos matemáticos que representan ideas Matemáticas mediante diagramas o ilustraciones. (Castro y Castro, 1997).

Población: Integrada por 45 estudiantes de séptimo grado de la Secundaria Básica Ramón Leocadio Bonachea

Muestra: Fueron seleccionados de forma intencional y por constituir una muestra suficientemente representativa de la población objeto de estudio, un total de 15 estudiantes y se caracteriza de la siguiente forma: Del total de estudiantes siete son del sexo femenino y del masculino seis, la edad promedio de estos es de 13 años. Los mismos se encuentran dentro de los siguientes niveles de desempeño cognitivo seis (nivel III), tres (nivel II) y seis (nivel lll)

En el desarrollo de la investigación se utilizaron diversos métodos del nivel teórico, empírico y estadístico-matemático.

Entre los métodos del nivel teórico se destacan:

Analítico-Sintético: Se emplea en la determinación de las dimensiones e indicadores para evaluar el aprendizaje de la resolución de problemas mediante la modelación pictográfica.

Inductivo-Deductivo: Permite establecer generalizaciones, a partir del estudio de casos particulares, en el nivel de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante. la modelación pictográfica.

Histórico-Lógico: Posibilita profundizar en la evolución e historia del uso de las técnicas de modelación pictográfica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales.

Enfoque de sistema: Proporciona la orientación general para el estudio de los fenómenos educativos como una realidad integral formada por componentes que cumplen determinada funciones y mantiene formas estables de interacción.

Dentro de los métodos y técnicas del nivel empírico se emplearon:

La observación: Se emplea, sistemáticamente, para valorar el aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos verbales de los estudiantes durante su desempeño en las clases..

La prueba pedagógica: Se aplica a los estudiantes de séptimo grado con la finalidad de conocer el nivel de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

Análisis de los documentos: Posibilita la revisión del plan de estudio y el proyecto de Secundaria Básica en transformación, los programas de Primaria, Secundaria Básica, así como el plan de estudio de la carrera del Profesor General Integral en el Instituto Superior Pedagógico Silverio Blanco Núñez, Programa Director de Matemática, Orientaciones Metodológicas, además las libretas y otros documentos de los estudiantes para determinar las posibilidades y realidades de la utilización de la modelación pictográfica.

Estadístico-Matemático: Se utiliza el cálculo porcentual para la recopilación y análisis de los datos obtenidos en la etapa del diagnóstico. Tablas y gráficos para la presentación e interpretación de los resultados de la investigación.

Aportes de la tesis:

Aporte práctico: Brinda un sistema de ejercicios utilizando la modelación pictográficas para la resolución de problemas matemáticos verbales

La novedad científica: Radica en el sistema de ejercicios para elevar el nivel de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas verbales utilizando la modelación pictográfica. Demuestra los cambios positivos en los niveles de desarrollo cognitivos, en la motivación y en la actitud de los estudiantes.

Estructura de la tesis: Está conformada por, introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. El capítulo 1 contiene los fundamentos teóricos sobre el tema de investigación y el capítulo 2 contiene el diagnóstico, el sistema de ejercicios dirigido al aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica y la validación de la misma. Cada capítulo está dividido en epígrafes.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBALES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE UTILIZANDO LA MODELACIÓN PICTOGRÁFICA.

El presente capítulo contiene los fundamentos del tema de investigación de la tesis, referido a la resolución de problemas matemáticos verbales, utilizando la modelación pictográfica, así como el papel que juegan estos modelos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

1.1- Los problemas matemáticos verbales y su resolución

La palabra problema se asocia con situaciones que se plantean en el transcurso de la vida, en las que existe algún tipo de conflicto o contradicción, las cuales hay que salvar para tener un resultado satisfactorio. Por su puesto, no todas las contradicciones tienen el mismo grado de dificultad, y es la educación que el hombre recibe, la que entrena para poder resolver la variedad de problemas a los que ha de enfrentarse durante su vida.

Problema. “Cuestión o proposición dudosa que se trata de resolver Proposición encaminada a averiguar el modo de obtener un resultado cuando se conocen ciertos datos” (Aristos, 1978:388).

Problema. “Controversia o duda que se trata de resolver.// Lo que impide o dificulta la consecución de algo; Traba // Cuestión que ha de resolverse científicamente previo conocimiento de ciertos datos // Tema delicado o para el que no se tiene una respuesta única // Enigma, pena o dificultad (*Diccionario de la lengua.* Real Academia Española 1984:332).

En conclusión, el término problema se usa comúnmente para asignar a una situación que conlleva duda, contradicción o controversia en la consecución de una meta, las que constituyen obstáculos o trabas para encontrar de inmediato una vía de solución a partir de ciertos datos.

Para Polya, “Tener un problema significa buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar”. (1999:92).

Según Santos Trigo, en esta caracterización de Polya se identifican tres componentes de un problema: (1999:102)

- Estar consciente de una dificultad
- Tener deseos de resolverla
- Desconocer la existencia de un camino inmediato para resolverla.

Y continúa señalando este autor que, en su concepto de problema, Polya destaca implícitamente estos tres aspectos: la identificación del problema, el aspecto motivacional o interés por resolverlo y la no existencia de la vía inmediata de solución. El propio Polya aseguraba que: “Resolver problemas es la realización específica de la inteligencia y la inteligencia es el don especial de la humanidad: resolver problemas puede ser considerada como la más característica actividad humana”. (1961:86)

Para Schoenfeld “, son situaciones problémicas aquellas en las que el individuo no tiene acceso directo a medios de solución más o menos preparados”. (Cervera 1998:253)

En su definición, se aprecia que centra su caracterización en la vía de solución, sobre la cual considera que debe ser desconocida, no preparada de antemano, y también que, a diferencia de Polya, Schoenfeld no resalta el interés del individuo por resolverla.

Santos (1996:302) plantea*:* “Un problema es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes:

o La existencia de un interés. Es decir, una persona o grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.

o La no existencia de una solución inmediata. No hay un procedimiento algorítmico o regla que garantice la solución completa de la tarea.

o La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.

Queda claro en estos elementos que un problema deja de serlo cuando se pierda el interés, se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo o la posibilidad de que la solución no sea única. Según su criterio, un problema es tal hasta que se logre encontrar la vía (o vías) de solución y se haya resuelto.

En tanto, Miguel de Guzmán plantea: "Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me pueda llevar de una a otra". (1994:165). Coincide con el autor anterior al destacar aspectos como la necesidad de que exista un interés o motivación por realizar una transformación (resolver el problema); así como que, la vía para hacerla sea desconocida. Para este trabajo, es significativo que a la situación a la cual se quiere llegar, puede ser unas veces bien conocida y otras no tan bien conocida, o "confusamente perfilada".

Torres Fernández en su tesis en opción al grado científico de doctor, acerca de "La enseñanza problémica de la Matemática del nivel medio general" refiere como "la situación problémica refleja la contradicción dialéctica entre lo conocido y lo desconocido, entre el sujeto y el objeto de conocimiento, es la que estimula la actividad cognoscitiva y desencadenada todo el proceso de solución de problemas". (8.5)

Y más adelante señala:

"Estrechamente vinculada con la situación problémica está la categoría problema docente. Si la primera representa lo desconocido, la segunda caracteriza lo buscado. Es decir, el problema docente, es la propia contradicción asimilada por el sujeto" (8.5). El citado autor hace referencia a una categoría más específica, que es la del problema docente, de la cual ya se hizo mención, que está estrechamente vinculada a la enseñanza problémica, y que resumiendo se define de la siguiente forma:

"El problema docente es el reflejo de la contradicción lógica-psicológica del proceso de asimilación, lo que determina el sentido de la búsqueda mental, despierta el interés hacia la investigación de la esencia de lo desconocido, y conduce a la asimilación de un concepto nuevo o de un modo nuevo de acción".

Por último, Rizo y Campistraus que han desarrollado varios trabajos relacionados con la enseñanza de la solución de problemas aritméticos en la Escuela Primaria, en el material impreso "Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos", definen el concepto de problema de la siguiente manera:

"Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación". (1999.7). Estos mismos autores en "Aprender a resolver problemas aritméticos", aclaran que si la vía mencionada es conocida, dejó de ser un problema. (10.IX).

Acerca del concepto de problema matemático existen muchas definiciones. En este trabajo se asume como tal: "una situación Matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias, *(*Alonso*, 2001:49).*

En la extensión del concepto problema determinado por la definición anterior, es posible incluir a los problemas escolares en el sentido de Campistrous y Rizo (1999: 7) quienes los caracterizan como:

[…] situaciones didácticas que asumen, en mayor o menor grado, una forma problémica cuyo objetivo principal es la fijación o aplicación de los contenidos de una asignatura dada (conceptos, relaciones y procedimientos), y que aparecen regularmente en el contexto de los programas que se quieren trabajar. Estos problemas escolares son tipificados, en mayor o menor medida, y para cuya solución se desarrollan procedimientos más o menos rutinarios.

Entre los problemas escolares se identifican muchos los que se representan mediante una descripción verbal y en los cuales los datos y las incógnitas están relacionados mediante las operaciones aritméticas usuales (adición, sustracción, multiplicación y división); a estos se les llama en este trabajo **problemas matemáticos verbales**.

En todo problema escolar existen condiciones y exigencias. Estas últimas explicitan el resultado a obtener, llamado **solución** del problema. El proceso mediante el cual se obtiene la solución recibe el nombre de **resolución** de problema.

La resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje desempeña funciones que le son esenciales. Entre estos se reconocen: la función de enseñanza, la función educativa y la función de desarrollo (Labarrere, 1987: 15).

La **función de enseñanza:** radica en que los problemas sirven de vía o medio para la apropiación, ejercitación y consolidación del sistema de conocimientos en los alumnos y para la formación de las habilidades y los hábitos correspondientes.

La **función educativa:** de los problemas comprende la influencia que ellos ejercen sobre la formación de la personalidad del alumno, es decir, sobre el desarrollo de su concepción científica del mundo, y de una posición activa y crítica con respecto a los fenómenos y hechos naturales y sociales. Esta función incluye también su participación en la formación de sentimientos positivos hacia el trabajo.

La resolución de problemas tiene una **función de desarrollo** de los alumnos que se implican en este proceso. El concepto de desarrollo es una de las categorías utilizadas en la pedagogía para caracterizar al alumno, el mismo proviene de la psicología, que lo concibe, como el conjunto de transformaciones físicas y mentales relativamente estables, operadas en un sujeto, que les permite pasar de un estadio a otro (Delval, 1984: 16; Yadeshko, citado por Chávez, Suárez & Permuy, 2005: 11).

Entre los aportes de Vigotski a la educación respecto al desarrollo cultural de un niño, está el haber planteado la necesidad de tener en cuenta por lo menos dos niveles, el desarrollo actual y el desarrollo potencial (1989b: 216). El primero contempla a todo aquello que el niño puede hacer y decir de forma independiente, mientras que el segundo, está determinado por lo que puede hacer y decir con la ayuda de otros. En tanto lo que un niño puede hacer solo, está incluido en lo que puede hacer con ayuda, Vigotski introdujo el concepto de zona de desarrollo próximo (ZDP) para caracterizar el desarrollo del niño debido a la ayuda, y lo describió como:

La distancia entre el nivel de desarrollo, lo que sabe, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, lo que puede llegar a saber, determinado por el adulto o en colaboración con otro niño más capaz (Vigotski, 1978: 86).

Como es apreciable en la concepción vigotskiana de las categorías referidas al desarrollo, la resolución de problemas de forma autónoma o en situación de colaboración, es un proceso que se utiliza como indicador para determinar el desarrollo mental del alumno.

Se ha podido comprobar en investigaciones realizadas (Labarrere, 1987), que la resolución de problemas contribuye en el alumno a desarrollar la memoria y el carácter, la rigurosidad, el sentido práctico y la facultad de abstracción; también ayuda a cultivar la inteligencia y la disposición para enfrentar nuevas exigencias; permite despertar la curiosidad y motivar el interés por la investigación, así como apoyar y fomentar el desarrollo del espíritu crítico, la independencia y firmeza en sus convicciones.

Por su parte (Campistrous y Rizo, 1999: 61_62) plantean que: En la literatura psicopedagógica se recogen tres momentos o fases fundamentales en el desarrollo de cualquier actividad. Estas son: Orientación, ejecución, control.

De igual forma estos autores plantean que la resolución de problemas, considerada como una actividad, está sujeta esos tres momentos. En este sentido, la literatura relativa a la enseñanza de la solución de problemas, hace un despliegue de esos tres momentos de la actividad.

Estos mismos autores se refieren a las cuatro etapas consideradas por G.Polya. Comprender el problema, concebir el plan, ejecución del plan, visión retrospectiva. En el propio texto se muestran las cuatro etapas consideradas por Werner Jungk: Orientación hacia el problema, trabajo con el problema, solución del problema, consideraciones retrospectivas y perspectivas.

También el esquema propuesto de Labarrere, concluyendo que todos responden al esquema básico propuesto por Polya. Estos autores plantean la necesidad de "abrir" el esquema con el fin de "dar recursos para profundizar en el significado de cada paso y en el qué hacer para lograr la meta en cada caso".

Se obtiene lo que los autores llaman un procedimiento generalizado para la solución de problemas, en el cual se parte de las fases conocidas para solución de problemas y de los procedimientos heurísticos que desde Polya ocupan un lugar apreciable en esta teoría, pero se busca el desarrollo de dos líneas fundamentales:

Completar la teoría de las fases o etapas, pues las formas antes referidas resultan demasiado generales para la mayoría de los alumnos. Se busca que este deje de ser objeto de enseñanza y pase a ser sujeto de su aprendizaje, es decir, describir el procedimiento en acciones para el alumno, incluidas las técnicas que pueda utilizar en cada fase y que en este material han sido descritas en términos de acciones para el alumno. (Campistrous y Rizo, 1999: 63)

El procedimiento en cuestión comprende las siguientes fases, que responden a preguntas establecidas y sistematizan las técnicas a emplear en cada caso. De problemas matemáticos verbales en la propuesta que hace la autora. (Anexo. 5).

1.2 El papel de la modelación pictográficas en la resolución de problemas matemáticos verbales.

En el estudio de los documentos que norman el currículo de la Enseñanza Primaria se incluyen entre sus recomendaciones metodologicas "el paso del lenguaje oral y manipulativo, al gráfico y al simbólico", e incluso cuando esta recomendación se restringe al mundo de los números suele precisarse más hablándose, por ejemplo, de "correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica".

Según Luís Puig y Fernando Cerdán en su libro Problemas Aritméticos Escolares (1989:8) plantean la necesidad, que en la educación se deba poner todo el énfasis posible en las destrezas que tienen que ver con manipular, ver e imaginar, y realizar operaciones simbólicas ya que en la resolución de problemas las representaciones gráficas o ayudas visuales han sido y son ampliamente utilizadas pensando, sin precisar más, que lo visual, al reunir las características de lo abstracto y lo concreto, podría servir de puente entre lo uno y lo otro. En cualquier caso está claro que dibujos, esquemas, diagramas, figuras o representaciones desempeñan un papel importante en cualquier estrategia de resolución de problemas, por lo que vale la pena realizar un pequeño análisis y estudio de ellas.

Para ello proponen que conviene distinguir entre:

1) Los dibujos, esquemas o figuras que acompañan al texto de un problema.

2) Las representaciones internas del resolutor.

3) Las producciones gráficas de carácter simbólico que el resolutor hace en el curso de la resolución, o que el profesor hace o induce que se hagan.

La autora de esta investigación tomando en cuenta las exposiciones de los autores referidos está de acuerdo que la representación pictográfica utilizada en esta investigación, facilita reflejar la estructura del problema y puede ser útil en la instrucción por que:

— permite "ir por partes" (ayudando en la descomposición del problema en trozos) y permite volver una y otra vez sobre el plan de solución.

— sirve de gestor en cuanto refleja con claridad los avances y retrocesos que tienen lugar mientras se elabora el plan de solución.

— en la fase de revisión, facilita el examen del plan, la eficacia y la racionalidad de la solución obtenida, al presentar a la vista todo el problema de una vez.

En este mismo libro Luis Puig y Fernando Cerdán plantean que la traducción a dibujos es más fácil que la traducción de dibujos a otra cosa, y que la traducción en la que esté involucrado el lenguaje escrito es más fácil que la que involucra símbolos, aparte de estos datos de facilidades de traducción. De ahí la importancia de tomar en consideración las producciones gráficas que se realizan en el curso del proceso de resolución y estas son:

— ha de tener consistencia interna. Esto es, usando las mismas convenciones ha de proporcionar soluciones correctas para todas las cuestiones posibles de la misma clase.

— ha de tener capacidad de proliferación. Esto es, ha de ser lo suficientemente flexible para inspirar la invención de nuevos modelos relacionados con los que se adapten a nuevos tipos de problemas.

- habría que matizar que alguna idea de las operaciones aritméticas que hay que realizar para resolver el problema podría extraerse si en la interacción alumno-profesor éste muestra explícitamente la estrategia que sigue en la distribución de las patas a la vez que realiza el dibujo.

- ha de tener una estructura intrínseca. Lo que aquí quiere decir que el modelo no ha de estar construido con reglas artificiales cuyo significado sólo se encuentra en el reflejo de la situación original.

Multitud de investigaciones realizadas aportan datos que indican que muchas dificultades en el aprendizaje del cálculo, el álgebra y la geometría pueden diluirse e incluso evitarse si a los estudiantes se les anima a usar e interiorizar gráficos o representaciones visuales asociadas a dichos conceptos. Pero es un hecho comprobado que existe rechazo por parte de muchos maestros de Matemáticas a usar recursos visuales en el desarrollo de su labor. Una causa de dicho distanciamiento se encuentra en que la enseñanza basada en la visualización requiere que los profesores dispongan de una formación adecuada para poner en marcha diversas habilidades pedagógicas. En este caso no solo se requiere entender la Matemática, sino también saberla comunicar visualmente.

Conjuntamente Campistraus Pérez y Rizo Cabrera han expresado la necesidad de utilizar las técnicas de modelación en su libro" Aprende a resolver problemas matemáticos" (1999:12_28). En este material se presentan algunas técnicas que pueden ser explicadas a los alumnos para aprender a resolver problemas y se estructuran dentro de un proceso generalizado de actuación que puede también ser útil.

El poder de modelar, es decir, reproducir las soluciones fundamentales que se establecen en el enunciado de un problema, despejados de elementos innecesarios o términos no matemáticos que hacen difícil la compresión, es una capacidad muy importante en la resolución de problemas.

La forma de hacer los modelos es muy personal, pues depende de la manera propia de interpretar el problema; sin embargo, hay algunas ideas generales que pueden ser enseñadas a los alumnos y que de ejercitarse adecuadamente, pasarán a formar parte de los recursos técnicos a utilizar en la solución de problemas, cuando considere necesario hacerlo.

Los modelos más utilizados son los lineales, los tabulares, los conjuntistas y los ramificados. Aunque en este trabajo se utiliza los modelos lineales para establecer el significado práctico de las operaciones aritméticas, es muy conveniente utilizar la relación parte-todo. Esta relación es muy elemental, obvia y relaciona al conjunto completo o todo con sus subconjuntos o partes: además establecida entre números o cantidades, tiene algunas propiedades como:

La descomposición del todo da lugar a dos o más partes, la reunión de todas las partes da como resultado el todo, cada parte es menor que el todo. Aunque en el dominio de las fracciones es posible que suceda que la parte es mayor que el todo, es importante que se tenga en cuenta que los conceptos parte y todo son relativos, pues en una situación determinada las partes pueden operar a su vez como todo y viceversa.

En el desarrollo de la habilidad de construir esquemas también son importantes los tipos de ejecución que se propongan con esa intención didáctica. Un criterio adecuado para hacer esa selección puede ser la formulada por Labarrere, A. (1989) en el que se plantean exigir a los estudiantes: elaborar esquemas para situaciones y problemas que no incluyan datos numéricos.

Analizar situaciones en las cuales a determinadas formulaciones se le han hecho corresponder varios esquemas. Investigar cuáles son los esquemas más apropiados, justificar por qué, rectificarlos, etcétera

Elaborar problemas y ejercicios a partir de esquemas.

Transformar esquemas de manera que se vaya aumentando o disminuyendo su complejidad, a la vez que se van formando los problemas y ejercicios que le corresponden.

Para la formación de la habilidad de construir esquemas pueden encontrarse una serie de acciones que, en forma resumida y considerada dentro de un procedimiento generalizado para la solución de problemas, el alumno debe aprender. Dentro de ellas deben estar las siguientes:

- Análisis del modelo a utilizar.
- Decidir por dónde se comienza a representar la información (Cómo representar)
- Hacer el esbozo.
- Controlar si se relaciona con la situación (¿se ajusta el esquema a la situación?)
- Se analiza para constatar si ayuda a comprender mejor el problema o a encontrar la vía de solución. (¿Qué se puede inferir de él?) .

1.2.1. Antecedentes históricos y ontogenéticos de la enseñanza y el aprendizaje de la modelación pictográfica en la resolución de problemas.

Comportamiento de la resolución de problemas en Cuba.

En Cuba, el proceso de asimilación de la resolución de problemas por los programas de Matemática en todos los niveles y, en especial, en la Enseñanza General, Primaria y Media, presenta la misma lentitud que se da en otros países. Una mirada crítica a esta situación permite reconocer que la escuela tradicional se conforma con la competencia en el cálculo, y la considera como un aporte a la eficiencia social. Sin menospreciar el valor de la destreza operatoria, en esta época, se puede sentir satisfacción, a menos que se acompañe de un alto grado de competencia en la manera de pensar, por el desarrollo de la operatoria y el cálculo. En este sentido, conviene recordar a los maestros que se aprende a pensar pensando.

Con el triunfo de la Revolución, en 1959, se abren nuevas perspectivas para el desarrollo general de la educación. De 1961 a 1970, aparecen numerosas contribuciones a la reorganización del Sistema Nacional de Educación. Se enmarca en el período de la década de los años 60, el fenómeno de la implantación a escala mundial de la llamada “Matemática Moderna” que, a juicio de muchos investigadores, exagera el énfasis en la estructura abstracta de esta ciencia en detrimento de aspectos importantes como la intuición. Los cambios en los programas de Matemática (1964-1967), no mejoran la situación descrita respecto a la enseñanza de la resolución de problemas.

En la etapa comprendida entre los años 1977 y 1987 se implantó el llamado “Plan Alemán” en el marco del surgimiento el 23 de abril de 1975 del Perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación, que entre sus objetivos se plantea inicialmente*:* Perfeccionar los métodos de enseñanza sobre la base del aprendizaje para el desarrollo y otros cambios encaminados al mejoramiento del trabajo de la escuela de educación general, en cuanto a la preparación de las nuevas generaciones, para cuya consecución se plantea una serie de tareas, entre las cuales se destaca:

"(…) enseñar a los alumnos a utilizar (aplicar) libremente sus conocimientos y habilidades (...)" de manera que pudieran "(…) adquirir por sí solos los nuevos conocimientos después de terminar la escuela"(…) Colectivo de autores. MINED; 1975:231).

Lo anterior constituye, por el contenido implícito en cuanto a la concepción del desarrollo del pensamiento y su "libre" aplicación personal, un buen punto de partida para el cambio que la revolución científico-técnica exige en ese momento. No obstante, constituye una contradicción, y en esto están de acuerdo la mayoría de los investigadores y pedagogos en la actualidad, que para la consecución de estos objetivos, al implantarse la Matemática Alemana, en los programas y libros de texto se lleva a cabo la adición de un conjunto de ejercicios y actividades prácticas que contribuyeran positivamente al logro de los mismos.

A partir de 1987 y hasta la actualidad, se han producido importantes cambios en la concepción de la enseñanza de la Matemática. En las Orientaciones Metodológicas del Programa de Matemática de Sexto Grado, puede leerse este planteamiento de Polya: “(...) ¿Qué significa dominar las Matemáticas? Significa resolver problemas, y no solo problemas tipo, sino también problemas que exijan pensamiento independiente, sentido común, originalidad, inventiva”. (MINED. 1990:234). Es así como, desde la enseñanza primaria, los programas reflejan una nueva concepción acerca de la Matemática.

Luís, Campistrous, refiriéndose a los resultados del Primer Estudio Internacional Comparativo de Lenguaje, Matemática y Factores Asociados (OREALC.1997) — en el que Cuba participó y obtuvo resultados significativamente superiores a los alcanzados por los demás países del área— plantea:
” (…) es insuficiente la atención a las formas de orientación y control de la actividad de aprendizaje que propicien eliminar la tendencia poco reflexiva de los estudiantes a ejecutar sin que medien los procesos de análisis y razonamiento requeridos. (...)” En Matemática, los resultados de las preguntas formales de cálculo aunque aún no satisfacen completamente las expectativas, son muy superiores a las de aquellas donde tienen que utilizar el cálculo en una situación con carácter de problema (....) Es obvio que esta dificultad es una de las más frecuentes entre ellas, porque se reveló en todas las preguntas de solución de problemas que tuvieron un importante peso en las pruebas utilizadas”. (2002:52).
Es evidente que con los trabajos de orientación y superación que se realizan sistemáticamente a nivel nacional, los logros en cuanto a la enseñanza de la resolución de problemas, sean una realidad para los próximos años en Cuba. Se espera que este trabajo constituya un modesto aporte al logro de formar nuevas generaciones de estudiantes capaces de reflexionar sobre la forma de resolver los problemas que la vida les depare, en las aulas y fuera.
En el proceso de esta investigación se realizó un estudio del programa y las orientaciones metodológicas de quinto y sexto grados en la cual se puede constatar la utilización de las técnicas de modelación pictográficas en ambos grados.

En el programa de quinto grado (MINED 2004:32-34) en la unidad #2 “Fracciones numéricas. Cálculo con fracciones”. Son objetivos:

- Comprender en situaciones de la práctica el concepto de fracción como parte de una unidad y de un conjunto, así como reconocer y representar fracciones en objetos geométricos (segmentos, rectángulos, circunferencias, etc.)

- Aplicar sus conocimientos y habilidades sobre fracciones en ejercicios con textos y problemas.

- Familiarizarse con algunos métodos de la teoría combinatoria y resolver problemas simples mediante conteos.

En las orientaciones metodológicas de quinto grado (MINED.1989: 67-72) se orienta el tratamiento de los problemas típicos de fracciones, donde se plantea que desde el punto de vista metodológico se destaca el hecho de que la unidad de fracciones no tiene un contenido teórico elevado y los conceptos y relaciones que se introducen se elaboran sobre la base de material concreto, diagramas o gráficas que ilustran lo que se hace de una forma intuitiva y de una manera clara para el alumno.

Uno de los objetivos del concepto de fracción y su significado práctico, es reconocer y representar fracciones en segmentos, rayos, rectángulos, circunferencias, etc. Para aplicarlos en la resolución de problemas típicos de fracciones, ya que es importante que se apoye en una representación gráfica que simbolice de algún modo al conjunto, o a la parte del conjunto que se trata. Es de suma importancia que los estudiantes hagan reflexiones lógica apoyándose en representaciones graficas a Matemática, sino también saberlas comunicar visualmente.

1.3 El proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales en la Secundaria Básica y su relación con la modelación pictográfica

La resolución de problemas adquiere gran importancia y esta dada por las funciones que esta desempeña en la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica, y que se encuentran estrechamente vinculadas con los campos de los objetivos de esta disciplina.

La práctica pedagógica cotidiana, demuestra que existen muchas dificultades en los estudiantes para resolver problemas en general, pero muy en especial cuando en la vía de solución intervienen los significados de las operaciones aritméticas, por lo que se debe enseñar la modelación pictográfica para que los mismos lleguen a "descubrir" la vía de solución o la respuesta del mismo problema.

Según Encarnación Castro y Enrique Castro (1997) la modelación Matemática y la resolución de problemas están ligadas al surgimiento de la Matemática; sin embargo, la modelación Matemática puede considerarse un elemento importante de los métodos modernos de enseñanza y aprendizaje, tan modernos que todavía no han terminado de crearse todos los procedimientos para el buen desarrollo de habilidades de modelación en los estudiantes. La definición de modelación está estrechamente ligada al concepto de modelo, sobre el que se ha escrito mucho. Según el parecer de Davidov, (sin fecha, p. 313) la definición de modelo más aceptable es la dada por Shtoff, (1966, pg 19): *"Por modelo se entiende un sistema concebido mentalmente o realizado en forma material, que, reflejando o reproduciendo el objeto de la investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio nos dé una información sobre dicho objeto".*

En Gordon, 1980, citado por Recarey, (1999) se define un modelo como *"un cuerpo de información, relativo a un medio o sistema con el objetivo de estudiarlo".*

En las dos definiciones anteriores, un modelo tiene como objetivo el estudio de un objeto, un medio o un sistema. Precisamente el propósito del estudio es el que determina la información que se requiere y reúne. Consecuentemente, para un objeto o medio específico se pueden realizar distintos modelos del mismo en correspondencia con la información requerida. Para estudiar cualquier objeto real, por lo general, es más conveniente investigar un modelo del mismo que reproduzca el objeto en un sentido específico.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje puede ocurrir que un mismo educador vaya realizando, de un mismo objeto, diferentes modelos (geométrico, físico, gráfico, analítico, y otros), en la medida que va aumentando la comprensión del objeto por parte de sus alumnos. Un modelo se construye por medio de un proceso de abstracción del objeto real, y debe satisfacer dos requerimientos contrapuestos.

- debe ser suficientemente simple para que los resultados que se obtengan del mismo, puedan transferirse al objeto, medio o sistema.

- debe ser lo suficientemente complejo para reflejar lo más fielmente posible la realidad, en el sentido que la mayoría de los resultados del modelo, al transferirse, correspondan a propiedades y resultados del sistema.

Existen diferencias con respecto a la forma en que se estudia la Matemática en la Enseñanza General (EG). En Cuba el estudio de la Matemática está ordenado mediante líneas directrices teniendo en cuenta aspectos principales de la transmisión de conocimientos, del desarrollo de habilidades y de la educación de los alumnos por lo tanto, en la enseñanza general se debe lograr que los estudiantes adquieran un pensamiento numérico, y deben comenzar las acciones para que los estudiantes que continúan estudios universitarios puedan adquirir un pensamiento funcional.

Existe una interdependencia entre la modelación y el planteamiento en la resolución de problemas que puede utilizarse para desarrollar habilidades en estas dos direcciones. En la enseñanza media la modelación está vinculada a la solución de problemas. La modelación Matemática puede considerarse un elemento importante de los métodos modernos de enseñanza - aprendizaje.

En muchos temas, como por ejemplo, las proporciones, el tanto por ciento, las ecuaciones de primer grado, la geometría, etc., es frecuente encontrar en los textos problemas que requieren una modelación Matemática con operaciones elementales. Sin embargo, se piensa que falta todavía mucho por hacer en este sentido, sobre todo, en problemas que modelen situaciones más cercanas a la problemática de la vida.

En el (Anexo 20) se muestra un ejemplo de la resolución de un problema matemático verbal utilizando la modelación pictográfica.

A modo de resumen y teniendo en cuenta los resultados del estudio realizado se puede arribar a la siguiente conclusión.

La solución de problemas matemáticos desde el proceso de Enseñanza-Aprendizaje en la escuela primaria y secundaria, no está dirigida a la búsqueda de procedimientos de actuación para el alumno, debido a que los procedimientos metodológicos que se dan están dirigidos a acciones que debe realizar el maestro y no logran formas de actuación generalizada. Esta modelación pictográfica está presente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de 5 y 6 grado, pero no se aprovecha en la resolución de problemas, existiendo un divorcio entre la primaria y secundaria respectivamente.

El aprendizaje de la aritmética es un proceso que debe seguir racionalmente, sin saltos ni precipitaciones, y cuya velocidad debe ser condicionada únicamente, por el niño que aprende.

CAPÍTULO II: SISTEMA DE EJERCICIOS DIRIGIDOS AL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBALES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN PICTOGRÁFICA.

Desde los fundamentos teóricos expuestos en el Capítulo I y en correspondencia con las dificultades que presentan los alumnos en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica , declarados en el capítulo anterior, se expone un sistema de ejercicios para elevar el aprendizaje de las mismas en la Secundaria Básica, una de las formas de modelar los problemas es mediante esquemas gráficos que permiten al alumno hacer visibles los elementos que componen el enunciado y las relaciones que se establecen entre ellos y, en muchos casos, facilitan “descubrir” la vía de solución o la respuesta misma del problema.

2.1 Diagnóstico de la resolución de problemas matemáticos verbales utilizando la modelación pictográfica.

En el camino recorrido en busca de información imprescindible se recurre al diagnóstico que permite un acercamiento del estado inicial del nivel de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales, y desde él, modelar el deseado. Con este fin se determinó la muestra abarcadora, de un total de 15 estudiantes de Séptimo Grado, a partir de una selección intencional que permitiera trabajar con ellos de una forma heterogénea.

El punto de partida para la selección de la muestra es la caracterización de estos estudiantes, desde el punto de vista psicológico, sociológico y por niveles de desempeño cognitivo. Previamente se aplica la observación al desempeño de los estudiantes que conforman la muestra (Anexo 1), a la vez que fue aplicada una entrevista (Anexo 4), y una Prueba Pedagógica Inicial (Anexo 3), las cuales permitieron conocer el estado actual de los estudiantes para resolver problemas verbales. Para el procesamiento de estas técnicas se utiliza el cálculo porcentual y el procesamiento de la información recogida a través de tablas y gráficos, obteniéndose los siguientes resultados.

El grupo tiene una matrícula de 45 estudiantes de noveno grado. El estado físico está acorde con la edad, existen dos alumnos que usan espejuelos (miopes) y dos asmáticos (uno alergia). El rendimiento académico es bueno, el promedio de nota está por encima de 91 puntos; con una buena motivación hacia el estudio. Sostienen muy buenas relaciones sociales y comunicativas.

Las familias a las cuales pertenecen estos estudiantes son heterogéneas, de zona urbana. De los padres, 25 tienen nivel universitario o técnico medio (83,3%), son obreros (16,6%), cinco padres son fumadores (16,6%), uno es alcohólico. Hay seis estudiantes que sus padres son divorciados, aunque reciben correcta atención por los mismos, excepto dos casos de divorcios mal manejados.

Los instrumentos aplicados arrojan como resultado que existen dificultades en los distintos tipos de significados que pueden atribuírseles al concepto de fracción y su significado práctico así como la representación gráfica de las mismas y en primaria no utilizan la representación gráfica. Existiendo un divorcio entre lo que se aprende en quinto, sexto grado y la Secundaria Básica, al igual que en los libros de textos y cuadernos complementarios, de esta última tienen limitaciones pues no utilizan la técnica de modelación como instrumento de aprendizaje.

Se realizaron 3 observaciones al desempeño de cada estudiante constatándose que de la totalidad de la muestra 7 estudiantes no tienen dominio de las acciones constantes que conforman la instrumentación ejecutora de la actuación en la resolución de problemas, con tendencias a emplear los últimos conocimientos adquiridos en la asignatura, 9 no conocen el significado práctico de las operaciones aritméticas incluyendo fracciones y por ciento; observándose la reproducción de patrones y 4 abandonan el ejercicio ante la primera señal de fracaso.

En la entrevista grupal (Anexo 4) se constató que: de 15 estudiantes 2 conocen el significado práctico de las operaciones aritméticas lo que representa un 13,3% y ninguno utiliza gráficos para resolver problemas aritméticos, así como a 5 le gustaría resolver problemas utilizando esa vía, para un 33.3 %.

De la prueba pedagógica Inicial realizada a la muestra (anexo 2) se obtuvieron los siguientes resultados:

Un 73,3 % (11 alumnos), no representan gráficamente una parte del todo, 12 alumnos para un 80% no identifican la parte del resto, 13 para un 86.6 % no saben calcular una parte del resto y 9 que representa 60 % no calculan el todo conociendo la parte y el número que representa la parte.

En esta investigación se han tenido en cuenta los contenidos que se enseñan en quinto y sexto grados, para el aprendizaje de la modelación en la resolución de problemas matemáticos verbales, siendo esta la base fundamental, ya que la representación visual y abstracta del concepto de fracción y su significado práctico por medio de segmentos, rayos, rectángulos, circunferencias, etc., que simbolice de algún modo al todo o a la parte del todo que se trate.

Después que el alumno se apropie de la modelación pictográfica tiene herramientas para trabajar al resolver problemas matemáticos verbales sin obligarlo a utilizar una vía específica. El alumno que presenta dificultad en el algoritmo de resolver ecuaciones asume la vía gráfica, porque al menos identifica el proceso representativo contribuyendo a que se manifieste satisfacción a resolver problemas.

2.2 - Fundamentos que avalan la elaboración del sistema de ejercicios.

En el ámbito didáctico y especialmente en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, el concepto de ejercicio tiene una connotación especial. Para Ballester y otros (1992: 406) "la mayoría de los autores lo definen como una exigencia para la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etc."

Según Horst Müller (citado por Ballester y otros, 1992: 406) considera que en la enseñanza de la Matemática, un ejercicio es una exigencia para actuar que se caracteriza por "el **objetivo** de todas las acciones en la resolución de un ejercicio es, en cada caso, transformar una situación inicial (elementos dados, premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis)", el **contenido** de las acciones en la resolución de un ejercicio está caracterizado por el objeto de las acciones y los tipos de acciones, mientras que en las **condiciones** "se encuentran en primer lugar las exigencias que el ejercicio plantea al alumno, expresada por el grado de dificultad del mismo" (Ballester y otros, 1992: 407).

Muchas veces resulta compleja la elaboración de colecciones de ejercicios en forma de sistema, pero por la importancia que tienen para favorecer el desempeño de los alumnos ante los errores cognitivos al representar el concepto de fracción y su significado práctico mediante la modelación pictográfica, es que se recurre a un sistema de ejercicios.

Aunque en el desempeño de los alumnos ante los errores se integran los procedimientos de identificación, valoración y corrección de los errores y en estos se entremezcla lo matemático y lo extramatemático, los principios propuestos por Muñoz no se pueden trasladar mecánicamente a los sistemas de ejercicios destinados a favorecer tal desempeño.

Teniendo en cuenta los principios y las reflexiones de Lorente:(2007) acerca de los sistemas como resultado de la investigación pedagógica, la autora de este trabajo se acoge a lo planteado por Lorences al concebir un sistema de ejercicios que deben satisfacer los requisitos siguientes:

- Potencialidad desarrolladora.
- Representatividad procedimental.
- Balance procedimental.
- Suficiencia ejecutora.
- Representatividad de los errores.
- Ordenamiento progresivo de la complejidad de los ejercicios.
- Diversidad en la formulación de las exigencias.

La **potencialidad desarrolladora** del sistema consiste en que los ejercicios componentes exigen una actuación ubicada en la zona de desarrollo próximo de los alumnos, de manera que su resolución requiere de niveles de ayuda de los otros, especialmente del docente en un ambiente donde se combinan el trabajo autónomo y la colaboración.

La **representatividad procedimental** del sistema está en que las condiciones y exigencias de los ejercicios que lo conforman conducen a la ejecución por el alumno de los tres procedimientos esenciales del desempeño ante los errores: identificación, valoración y corrección.

El **balance procedimental** del sistema reside en una distribución equitativa de los ejercicios integrantes, de manera que se garantice periodicidad y continuidad en la ejecución de los tres procedimientos esenciales del desempeño de los alumnos ante los errores.

La **suficiencia ejecutora** consiste en que los ejercicios sean suficientes para que los alumnos desarrollen habilidades en la ejecución de los procedimientos esenciales del desempeño ante los errores.

La **representatividad de los errores** reside en que los ejercicios del sistema cubren los tipos fundamentales de errores que cometen los alumnos al representar en grafico el concepto de fracción, así como los errores más frecuentes de cada tipo.

El **ordenamiento progresivo de la complejidad de los ejercicios** consiste en que las acciones que integran el desempeño ante los errores son ejecutadas al resolver las tareas después de cierto nivel de dominio por el alumno de las operaciones componentes, gracias a la existencia de ejercicios en el sistema, dirigidos a la ejecución de estas operaciones los cuales aparecen primero en el ordenamiento.

El cumplimiento de este requisito pone orden didáctico a las relaciones de dependencia entre los ejercicios que componen el sistema.

La **diversidad en la formulación de las exigencias de los ejercicios** radica en que se cambie la formulación de la exigencia que conduzca a la aplicación de un mismo procedimiento cuando se utilicen varios ejercicios en que esté presente esta exigencia. Por ejemplo, si la exigencia se refiere a la identificación del error, esta se puede formular de varias formas para evitar estereotipos.

Este sistema de ejercicios para favorecer el desempeño de los alumnos ante los errores cognitivos al representar el concepto de fracción y su significado práctico por la modelación pictográfica, es un conjunto de ejercicios relacionados entre sí y diferenciados, que satisface los principios de potencialidad desarrolladora, representatividad y balance procedimental, suficiencia ejecutora, representatividad de los errores, ordenamiento progresivo de la complejidad de los ejercicios y diversidad en la formulación de las exigencias, cuya resolución conduce a la ejecución de las acciones de identificación, valoración y corrección.

Fuentes y documentos que sustentan la propuesta de ejercicios.

1. Objetivos estatales del MINED.
2. Programas de la asignatura en la Secundaria Básica.
3. Planes de estudios por enseñanzas y grados.
4. Guías metodológicos para la enseñanza de la Matemática en el Sistema de Educación en la escuela cubana actual.
5. Guías metodológicos de la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica.
6. La Matemática dentro de las prioridades de MINED para la Enseñanza Media.
7. Los libros de texto de la Enseñanza Primaria y Secundaria.
8. Programa audiovisual.
9. Programa de Informática(Software Educativo:" Elementos Matemáticos")
10. Estrategia de la Educación de la enseñanza en la Secundaria Básica.
11. Trabajos de investigadores de este tema.

Objetivos Generales del conjunto de ejercicios

1- Demostrar una concepción científica del mundo y una cultura político-ideológica a partir del modo en que se argumentan los contenidos matemáticos, la consecuencia con que se sostienen los principios de la batalla de ideas y las ideas de Martí, el Che y Fidel; la forma en que se defienden las conquistas del socialismo cubano; y la profundidad con que se rechaza el capitalismo y el poder hegemónico del imperialismo yanqui. (A cumplir por los profesores)

2- Adoptar decisiones responsables en su vida personal, familiar y social sobre la base de la comprensión de las necesidades vitales del país; la aplicación de los procesos del pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo; y la utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva, la aritmética y el álgebra.

3- Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social , local, nacional, regional y mundial ;y con fenómenos y procesos científico-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas a diferentes contextos, y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que les permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.

4- Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación, que les permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelven.

5- Exponer argumentaciones de forma precisa, coherente, racional y convincente a partir del dominio de la simbología y terminología Matemática, como base para su mejor desenvolvimiento en todos los ámbitos de la actividad futura.

2.2.1 Características del sistema de ejercicios elaborado.

El sistema de ejercicios elaborado pretende favorecer el aprendizaje de los estudiantes de la Secundaria Básica en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

El sistema elaborado (Anexo 19) está compuesto por 15 ejercicios distribuidos en los siguientes tipos:

- Ejercicios dirigidos al aseguramiento del nivel de partida para la resolución de problemas matemáticos verbales utilizando la modelación pictográfica.

- Ejercicios dirigidos a la fijación de la resolución de problemas matemáticos verbales utilizando la modelación pictográfica.
- Ejercicios dirigidos a la resolución de problemas matemáticos verbales utilizando la modelación pictográfica.

Los ejercicios que componen el sistema fueron concebidos teniendo en cuenta las condiciones y exigencia. (Anexo 19)

Condiciones:

Se ofrece información acerca de que un alumno al resolver problemas matemáticos verbales lo hace de la forma algorítmica de las ecuaciones y no utiliza la representación lineal pictográfica que le proporciona el texto para una mejor comprensión del mismo.

Posibles exigencias:

1. Decidir por qué vía de resolución asume el alumno
2. Modelar el problema por vía gráfica.
3. Valorar la actuación del resolutor.
4. Corregir el error.
5. Valorar las causas de la comisión del error.

Aunque la primera exigencia se enmarca en la vía de resolución asumida por el alumno, se le atribuye un carácter independiente con el objetivo de que el alumno esté en situación de duda y tenga un motivo para asumir las vías de modelación lineal pictográficas.

La valoración de que la causa del error conduce a que el alumno reflexione sobre su propia forma de resolver problemas matemáticos verbales, de manera que esta exigencia favorece su metacognición.

Estos ejercicios fueron distribuidos para trabajarlos en diferentes momentos y desde distintas perpesctivas, por ejemplo:

- En los turnos planificados para las clases de ejercitación establecidos en el horario docente.
- En las clases de sistematización se introducen aquellos que se vinculan a diferentes contenidos matemáticos.
- En las clases de nuevo contenido se utilizan para motivar a los estudiantes por lo que van a aprender.
- Otros se indican como tarea.
- Otros se utilizan para la evaluación sistemática.

Requerimientos que sustentan los ejercicios elaborados

- Reintroducción sistemática de los contenidos básicos que aprenden desde preescolar hasta sexto grado.
- Presentación de ejercicios que alternan sin atender a contenidos prefijados.
- Exigencia al estudiante de un nivel mayor de razonamiento atendiendo a los diferentes niveles de desempeño, desde el reproductivo hasta el creativo.
- Vinculación de los contenidos de los problemas con situaciones de la vida cotidiana del escolar.
- Atención diferenciada a los estudiantes.
- Selección o elaboración de problemas teniendo en cuenta un grupo de temáticas que se corresponden con los intereses, vivencias, necesidades de los estudiantes; además de otros temas que se considera importante trabajar en estas edades, como parte de su cultura general e integral

Se asume las exigencias planteadas por Celia Rizo y Luis Campistrous Pérez; (1996) en Aprende a resolver problemas aritméticos a la hora de seleccionar los ejercicios para garantizar el desarrollo de habilidades. Estas son:

1-Buscar variedad tanto en la forma como en el contenido.
2-Presentar ejercicios por varias vías de solución.
3-Plantear ejercicios con solución única, varias o ninguna.
4-Plantear ejercicios que logren la sistematicidad de los contenidos y siempre que sea posible integre las tres áreas de la Matemática.

5-Los ejercicios que se planifiquen deben constituir vías para evaluar los tres niveles de desempeño**.**

Los ejercicios elaborados responden a los lineamientos de trabajo de la asignatura Matemática son:

1-Contribuir a la educación ideo política, jurídica, laboral económica, para la salud, estética y ambiental de los alumnos**,** mostrando que la Matemática permite la obtención y aplicación de conocimientos a la vida, la ciencia, la técnica y el arte, posibilita comprender y transformar el mundo, y ayuda a desarrollar valores y actitudes acordes con los principios de nuestra Revolución, favorece la comprensión conceptual desarrollando un pensamiento flexible reflexivo al proponer tareas de aprendizaje en correspondencia del resultado del diagnóstico individual y grupal.

2-Potenciar el desempeño de los alumnos hacia niveles superiores.

3-Hacer que los alumnos aprendan a identificar, formular y resolver problemas dados en un contexto diferente.

4-Sistematizar contínuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental.

5-Propiciar la integración de las diferentes áreas de la Matemática.

Ejemplos de ejercicios resueltos por la modelación pictográfica. (Anexo 20)

2.3. Propuesta del sistema de ejercicios para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.

En correspondencia con el análisis realizado sobre los resultados del diagnóstico se diseña un conjunto de ejercicios para el aprendizaje de la solución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictórica, ya que no se aprovecha su potencialidad con la profundización y sistematización requerida. Estos ejercicios que a continuación se proponen contribuyen a elevar el aprendizaje de los estudiantes, sobre todo, en los que más afectados están en la resolución de problemas matemáticos verbales.

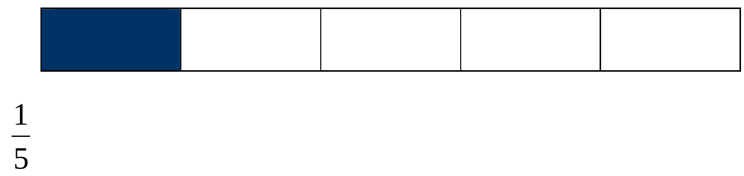
Actividad #1

Objetivo: Representar gráficamente una parte de otra parte.

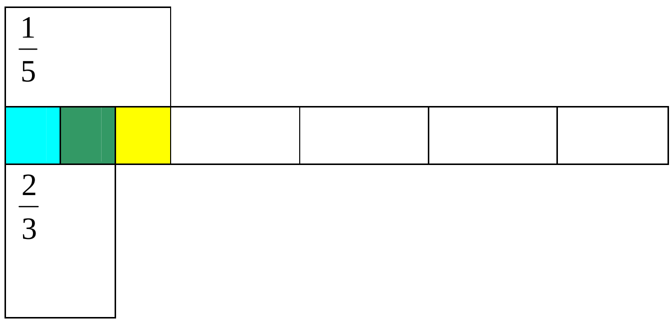
1. Hallar gráficamente $\frac{2}{3} de \frac{1}{5}$

Respuesta

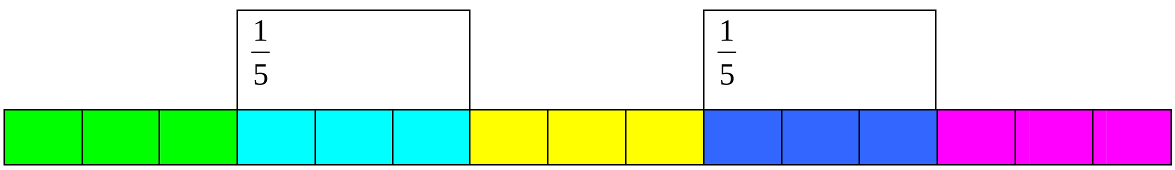
Se representa el todo como un rectángulo dividiéndolo en 5 partes iguales y se representa $\frac{1}{5}$.



Se divide $\frac{1}{5}$ en tres partes iguales y se toman 2 de dichas partes



Se divide cada uno de los demás quintos en tres partes para averiguar a qué parte de la unidad entera es la fracción obtenida.



Entonces: $\frac{2}{3} de \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

La unidad entera quedó dividida en 15 partes iguales. Cada parte es un quinceavo de la unidad. La fracción obtenida es $\frac{2}{15}$

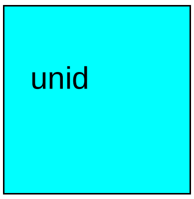
Actividad #2

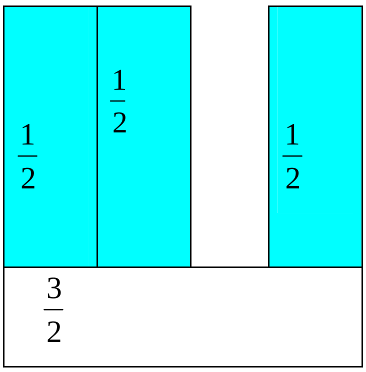
Objetivo: Representar gráficamente un número mixto.

2. Representa gráficamente 3/2 (considera como figura cuadrado)

Respuesta

Cada cuadrado representa una unidad entera





Ahora bien con $\frac{2}{2}$ se forma una unidad.

En $\frac{3}{2}$ hay 1 $\frac{1}{2}$ $con \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$; $1 + \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2} > 1$

Actividad #3

Objetivo: Calcular la fracción que representa una parte del todo.

3. Este rectángulo se ha dividido en cuatro sectores desiguales. En tres de ellos se ha indicado qué parte del círculo representa

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	**?+**

Averigua qué parte del rectángulo representa el cuarto sector.

Respuesta

El profesor con este ejercicio recuerda que el todo es la unidad. Ejemplo: $\frac{4}{4}=1$ por lo que hay que sumar $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{12}{60}+\frac{15}{60}+\frac{20}{60}=\frac{47}{60}$ Por lo tanto se le hace la pregunta ¿Cuánto le falta al numerador para que sea igual al denominador? Entonces el alumno resta 60-47=13 y la respuesta es $\frac{13}{60}$

Nota: Cuidado en esta situación el alumno tiene grandes dificultades por lo que hay que trabajar bastante en las clases y ejercicios.

Actividad #4

Objetivo: Representar gráficamente una parte del todo.

4. Representa gráficamente 5/8 del número =20

Respuesta

Realizamos una gráfica donde el estudiante puede escoger su forma de representar por ejemplo:

$\frac{5}{8}$ del número es 20							

Es decir que hay que dividir a 20 en 5 partes iguales por lo tanto 20: 5= 4.

Quiere decir que 1/8 del número es = 4 por lo que:

4	4	4	4	4	4	4	4
$\frac{8}{8}$ del número es 32							

Ahora bien se aprovecha este ejercicio para recordar:

$\frac{5}{8}$ de N=20

$\frac{5}{8}x$ N= 20 N=20: $\frac{5}{8}$ N=20. $\frac{8}{5}$ N=32.

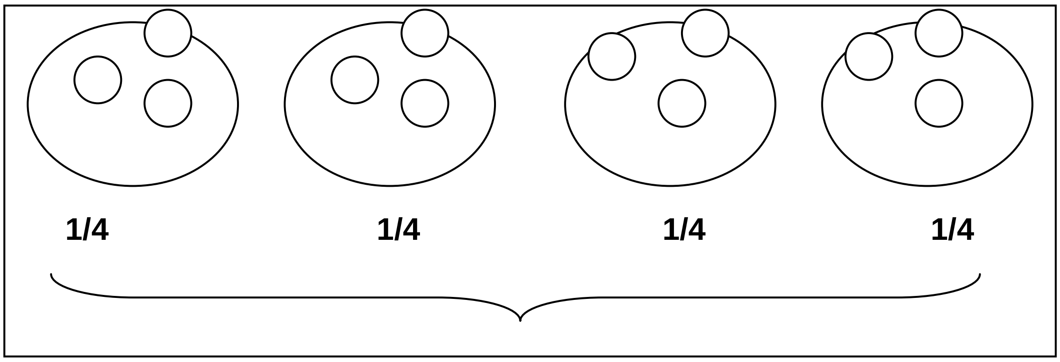
Actividad #5

Objetivo: Representar gráficamente una parte de un todo.

Representemos gráficamente 3/4 de un grupo de cosas por ejemplo (12 Triángulos).

Respuesta

Es decir que tenemos que hallar 3/4 de 12, ahora bien 3/4 x 12



$\frac{3}{4} x$ 12= 9

Hay que dividir en 4 partes iguales la unidad

Actividad # 6

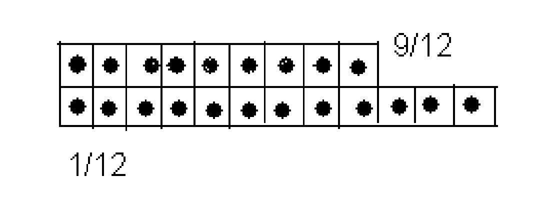
Objetivo: Representar gráficamente qué parte es un número de un todo.

6: Representa gráficamente ¿Qué parte es 9 de 12?

Respuesta

Vía 1

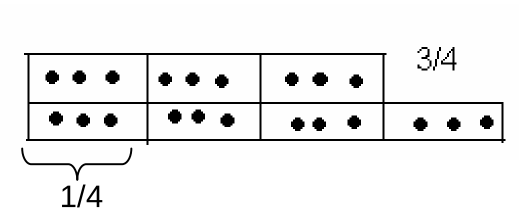
Representemos los grupos de 9 y 12 elementos. Se divide el de 12 en 12 partes iguales donde cada elemento es 1/12 del conjunto 12



Entonces 9 elementos son 9/12 del conjunto 12

Vía 2

Divide el grupo de 12 elementos en 4 partes iguales, por lo que 3 elementos representan 1/4 del conjunto de 12, entonces 9 elementos son 3/4 del conjunto 12



Pero si usted se da cuenta $\frac{9}{12}$ y $\frac{3}{4}$ son iguales.

Actividad # 7

Objetivo: Calcular el por ciento teniendo en cuenta su significado.

7. Expresar el tanto por ciento en forma de fracción

a) 20% ___ este ejemplo es fácil ya que se aplica los porcentajes cómodos es decir 20%=$\frac{20}{100}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

Respuesta

Con estos ejemplos que se presentan a continuación son pocos utilizados en los libros de texto pues son necesarios para sus conocimientos

b) $\frac{1}{2}\%$ ___ Este es un tanto por ciento menor que el 1% por lo que se escribe una fracción con denominador 100 y cuyo numerador es en tanto y después simplificamos la fracción

$\frac{1}{2}\%=\frac{1}{2}\div 100=\frac{1}{2}\cdot 100=\frac{1}{200}$ es decir $\frac{1}{2}\%=\frac{1}{200}$

c) =0,5% ___ Este es un tanto por ciento representado en expresión decimal por lo que se escribe una fracción con denominador 100 es decir

$$0{,}5\%=\frac{0{,}5}{100}=\frac{5}{10}\div 100=\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{100}=\frac{5}{1000}=\frac{1}{200}$$

Con este ejercicio el profesor debe relacionar el significado de por ciento con su representación grafica.

Actividad # 8

Objetivo: Resolver problemas relacionados con la vida práctica utilizando la modelación pictográfica.

8. Juan, María y Luisa se repartieron una cierta cantidad de mangos que tenían en una cesta. Juan tomó de la cesta $\frac{1}{4}$ y Maria $\frac{2}{3}$ de lo que le quedaba y Luisa los 30 mangos restantes. ¿Cuántos mangos le correspondió a cada uno?

Respuesta.

Vía 1 Utilizando ecuaciones

Datos: **Luego** $\frac{2}{3}\cdot 90 = 120$

Total: x $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) + 30 = x$ 120-30=90

Juan: $\frac{1}{4}$x $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x\right) + 30 = x$ $\frac{2}{3}\cdot 90 = 60$

María. $\frac{2}{3}$(x-1/4) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + 30 = x$ **Comprobación:**

Luisa: 30 x=-30(-4)

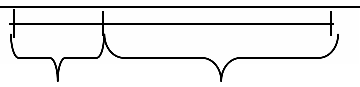
x=120

$\frac{3}{4}x + 30 = x$

$\frac{3}{4}x - x = -30$ 30+60+30=120

$\frac{-1}{4}x = -30$

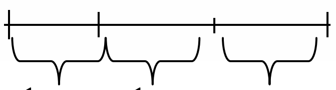
R/A Juan le tocó 30, a María 60 y Luisa 30.



1/4 **3/4**

Se señalan las partes que determinan el resto que sería 3/4 y se calculan los 2/3 del resto que fue lo que tomó María

2/3de 3/4= 6/12=1/2



$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 30

Si sumamos $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ por lo que 30 representa $\frac{1}{4}$ del total

Entonces tenemos que calcular $\frac{1}{4}$ de X =30

X= 30. 4

X= 120

Luego se calcula $\frac{1}{4}$ de 120 para hallar a Juan que es igual a 30 y posteriormente se calcula.

Actividad # 9

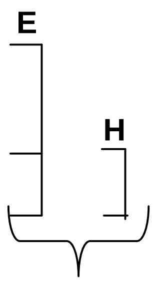
Objetivo: **Resolver problemas relacionados con la vida práctica utilizando la modelación pictográfica.**

9- Entre Elena y su hermanita más pequeña pesan 87kg. Si la hermanita pesa la mitad de lo que pesa Elena, ¿cuánto pesa cada una?

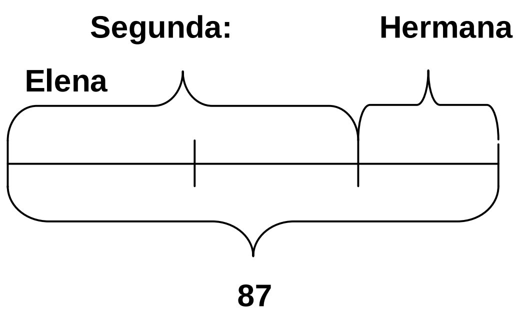
Respuesta

Dos formas de representar las condiciones pueden ser:

Primera:



Segunda:



87

En estas representaciones se hace visible que Elena pesa el doble de la hermana y que se conoce el todo (87kg) y la cantidad de partes iguales (3 partes): una que corresponde al peso de la hermana y dos que corresponden al peso de Elena.

El problema se resuelve entonces fácilmente interpretando un significado de la división: buscar el contenido de cada parte si se conoce el todo y el número de partes.

87:3=29 → peso de la hermana.

2·29=58 → peso de Elena.

(u 87-29=58)

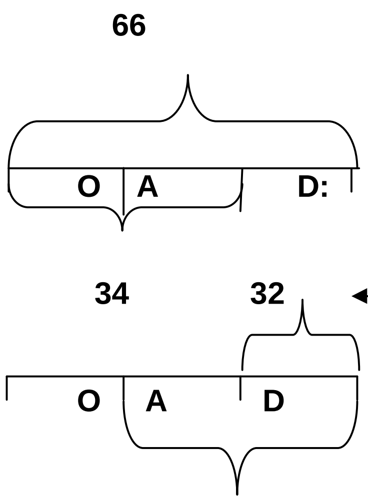
Actividad # 10

Objetivo: Resolver problemas relacionado con la vida práctica utilizando la modelación pictográfica.

10- Otto, Alejandro y Daniel tienen 60 bolas entre los tres. Las del primero con las del segundo suman 34, las del segundo con las tercero suman 45, y las del tercero y el primero suman 53. ¿Cuántas bolas tienen cada uno?

Respuesta

Aquí se conoce el todo (66 bolas) y se sabe que está compuesto por tres partes (la de Otto, la de Alejandro y la de Daniel). Se pueden representar las relaciones, por ejemplo, de la forma siguiente:



De esta representación y de un significado de la sustracción se tiene que:

66-34=32

Análogamente se tiene de esta que:

O: 66-45=21 A: 45-32=13

45 Comprobando: 32+21+13=66

En el segundo esquema se ve el uso relativo de las partes y del todo(A y D eran partes; ahora su suma pasa a ser el todo.)

En este problema, el dato de las 66 bolas (el todo) es innecesario. Puede encontrarse solo con las relaciones que se dan entre los pares de niños, como se muestra a continuación.

O	**A**	**A**	**D**	**D**	**O**

34 **45** **53**

En este esquema, se pude ver lo que tiene cada niño aparece dos veces; luego la suma de estas cantidades es el doble de lo que tiene entre los tres.

34+45+53=132

132:2=66 ⟶ dato inicial del problema

Obteniendo este dato, se procede como se indicó antes para hallar lo de cada niño.

Actividad # 11

Objetivo: Resolver problemas relacionados con la vida práctica utilizando la modelación pictográfica.

11- Silvia compra 7 tarjetas postales. Mario compra 5 del mismo tipo. Paga 50 centavos menos que Silvia. ¿Cuánto cuesta una tarjeta?

50

			·	

Significado de la sustracción, para hallar el exceso de partes: 7-5=2 postales

Significado de la división, para hallar el contenido de cada parte: 50:2=25

Hay una sola magnitud en juego: dinero; las postales indican la cantidad de partes

RESPUESTA.

Una tarjeta cuesta 25 centavos**.**

Actividad # 12

Objetivo: Resolver problemas matemáticos verbales utilizando modelación Pictográfica.

Ejercicio 18 página 84 (Cuaderno de Matemática 7mo grado)

Un niño tenía cierta cantidad de cordel y utilizó 25% para empinar un papalote. De lo que le quedó, le regaló el 50% a su amigo y luego le dio 30m a su mamá para que tejiera. ¿Cuántos metros de cordel tenía al principio?

Vía 1. Ecuaciones

Datos

Cordel: x

25% x= $\frac{1}{4}$ x

$(x-\frac{1}{4})=\frac{3}{4}x$

$50\%(\frac{3}{4}x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x$

$\mathrm{Re}\,sto 30m$

$$\frac{3}{8}x+30=x$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x-x=-30$$

$$\frac{2x+3x-8x}{8}=-30$$

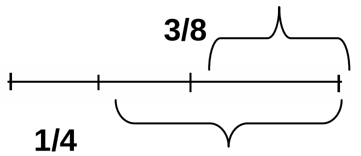
$$-\frac{3}{8}x=-30$$

$$x=-30\cdot-\frac{3}{8}$$

$$x=80$$

R/ El niño tenía al principio 80m de cordel.

Vía 2. Gráfico **30** $\rightarrow$ **3/8**



1/2 · 3/4 = 3/8

3/4 1/4+3/8=5/8

Por lo que la parte que corresponde a los 30m es 3/8

Entonces: 3/8x=30

x=30 ·8/3

x= 80

R/ El niño tenía al principio 80m de cordel

Actividad # 13

Objetivo: Resolver problemas matemáticos verbales vinculados con la vida práctica.

Ejercicio 15 página 84 (Cuaderno de Matemática 7mo grado)

Una persona debe recorrer 2/9 de una determinada distancia en automóvil; el 50% del resto en ómnibus y los 245km restantes en tren; ¿cuál es la distancia total que debe recorrer?

Vía 1. Ecuaciones

Datos:

Distancia total: x

Automóvil 2/9x

Ómnibus 50% (resto) = 50%(x-2/9x)=1/2 $\cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{18}$

Tren 245km

Entonces planteamos la ecuación $\frac{2}{9}x + \frac{7}{18}x + 245 = x$

$\frac{2}{9}x + \frac{7}{18}x -$ x = -245 transponiendo termino.

$\frac{11}{18}x$ - x = -245   reduciendo termino semejantes.

$-\frac{7}{18}x = -245$

x = $-245 \div -\frac{7}{18}$ despejando la variable

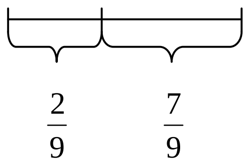
x = -245 – $\cdot \frac{18}{7}$ calculando.

x = 630

R/ La distancia total es de 630 Km.

Vía 2. Gráfica

Represento la distancia total y se calcula el resto.



Luego le hallo 1/2 de 7/9= 1/2 · 7/9= 7/18 y se coloca en el grafico.

Es decir que en ómnibus recorrió 7/18. La parte que queda es el recorrido en tren (245Km). Ahora cálculo que parte representa 245 del todo o la unidad. Por lo tanto sumo 2/9+7/18=11/18 por lo que la parte que falta es 7/18

Entonces 7/18x= 245

x= 245 · 18/7

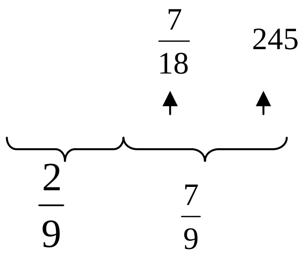
x= 63

La distancia total que debe recorrer es de 630 Km.

Comprobando: se calcula $\frac{2}{9} \cdot 630 = 140$ y $\frac{7}{18} \cdot 630 = 245$ entonces se suman

140+245+24

Resumiendo la vía gráfica



R/ La distancia total es de 630Km

Actividad # 14

Objetivo: Resolver problemas matemáticos verbales vinculados con la vida práctica.

Ejercicio de Jacinto página 27

Después de venderse 75% de un rollo de alambre y 30m más, queda 1/6 del alambre que se tenía al principio, a razón de $ 0,65 el metro.¿Cuánto importa la cantidad de alambre vendido?

Vía 1

Datos:

Total x

75% x=3/4x

30m

Resto (quedan) 1/6x

Planteando la ecuación

$$3/4x + 1/6x+30=x$$

$$3/4x+1/6x-x=-30$$

$$\frac{9x+2x-12x}{12}= -30$$

$$-1/12x= -3$$

$$x= -30 \cdot -12$$

x= 360

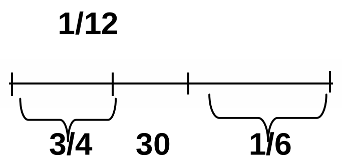
Pero como quedaron 1/6 sin vender y 1/6 ·360=60

Luego 360-60=300

Entonces se vendieron 300m lo que representa (300·65=195,00) $195,00

R/ El alambre vendido importó $195,00

Vía 2. (Gráfica)



Entonces $3/4+1/6= \frac{9+2}{12} = 11/12$

Luego: 1/12x = 30

x = 30 ·12

x = 360

Entonces: 1/6 ·360= 60

Por lo que se vendió 300m y 300·65=195,00

R/ El alambre vendido importó $195,00.

Actividad # 15

Objetivo: Resolver problemas matemáticos verbales vinculados con la vida práctica.

Dos trenes parten en la misma dirección, el tren A sale a una velocidad constante de 30 Km./h, y el tren B salió 2h después a una velocidad de 40 Km./h.¿A qué hora se alcanzan? y ¿A qué distancia?

Primera vía de solución: Física

Datos

Tren A	Tren B
v=30km/h	v= 40km/h
s=?	s= ¿
Fórmula	s=v.t

$s=v.t$ $s=40(t-2)$

$s=30t$

Entonces igualamos las distancias:

30t=40(t-2)

30t=40t-80 t=8h

30t-40t=-80 R/ Los trenes se alcanzan a las 8 horas.

-10t=-80 Por lo tanto:

$t = \frac{-80}{-10}$ s=30km/h.8h s=240km.

Segunda vía de solución: Matemática

Datos

Tren A	Tren B
v=30km/h	v= 40km/h
t=x	t=(x-2)
s=?	s= ¿
Fórmula	s=v.t
s=v.t	s=40(x-2)
s=30x	

Entonces igualamos las distancias:

30x=40(x-2) x=8 como t=x

30x=40x-80 t=8h

30x-40x=-80 R/ Los trenes se alcanzan a las 8 horas.

-10x=-80 Por lo tanto:

$x = \frac{-80}{-10}$ s=30km/h.8h s=240km.

Tercera vía.

Sistemas de ecuaciones.

Ecuación #1: y=30t

Ecuación #2: y=40t-80

Sustituyendo 1 en 2:

30t=40t-80

30t-40t=-80

-10t=-80

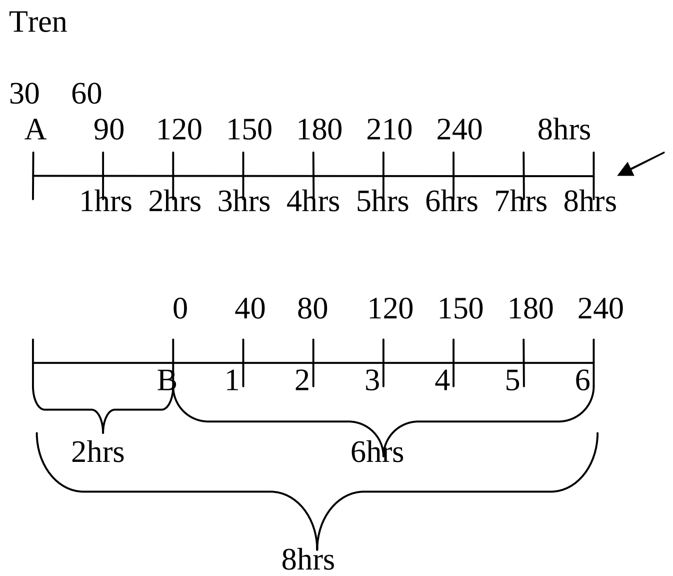
$$t = \frac{-80}{-10}$$

t=8

Cuarta vía de solución: Proporcionalidad

Tren A	**Tren B**
1h – 30 km	1h – 40 km
2h – 60 km	2h – 80 km
3h – 90 km	3h – 120km
4h – 120 km	4h – 160 km
5h – 150 km	5h – 200 km
6h – 180 km	6h – 240 km
7h – 210 km	
8h – 240 km	

Vía que se aplica en el trabajo: Técnica de modelación.



Se alcanzan a las 8hrs y a una distancia de 240km.

2.3.1. Juicios de valor del nivel de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica antes de la implementación del sistema de ejercicios

En este epígrafe se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación del sistema de ejercicios a partir del pre-experimento realizado, con medida pretest y postest.

Los criterios utilizados para la asignación de valores a las variables de indicadores están explícitos en el(Anexo 13)

Para la medición de los indicadores de cada dimensión, se utilizaron distintos instrumentos que se especifican en (Anexo 21)

A continuación se presentan los resultados obtenidos sobre la base de la medición de estos indicadores por cada una de las dimensiones.

Los resultados se exponen en su proyección individual en una tabla (anexo #12); Para evaluar el desarrollo de la resolución de problemas mediante la modelación pictográfica se definen tres categorías que van desde los niveles bajo (I), medio (II) y alto (III), en función de cómo se comportan en los estudiantes los indicadores; primero en cada una de las dimensiones y después en general, en el (anexo #12). La necesidad de conocer la situación real como punto de partida para proyectar el sistema de ejercicios con la objetividad que requiere, obliga a establecer ciertos límites entre uno y otro. Los juicios que a continuación se ofrecen generan a partir del calculo porcentual por frecuencia y la apreciación cualitativa de dichas categorías (0 niveles). El estado de cada dimensión se presenta a continuación.

Desarrollo Cognitivo.

La dimensión cognitiva es la más afectada. El dominio del significado práctico de las operaciones aritméticas está muy afectada, por lo que prácticamente se desconoce, así lo corroboran los siguientes datos:

Del total de 15 estudiantes se encuentran 3 (20%) en el nivel alto, 5 (33.3%) en el nivel medio y 7 (46.6%) en nivel bajo. (Anexo # 6)

Las dificultades se aprecian en los siguientes indicadores.

-Representar gráficamente una parte del todo 11 (33.3%) no logran realizarlo.

-Identificar la parte (resto) que queda del todo 12 (80%) no logra identificar pues no saben lo anterior.

-Calcular por vía gráfica una parte del resto 13 (86.6%) no logran ni hacen por calcularlo.

-Calcular el todo conociendo la parte y el número que representa la parte (numéricamente) 12 (80%) no se dan cuenta que tienen que plantear una ecuación.

-Resolver problemas aplicando las técnicas de modelación pictórica no lo resuelven por esta vía.

Motivaciones

En sentido general, prevalece en los estudiantes un estado motivacional que denota falta de estímulos para comprometerse en la solución de los problemas. Del total de ellos 9 (60%) se ubican en los nivele bajo y medio, y solo 6 (45%) se pueden evaluar en el nivel alto.

Los principales inconvenientes se evidencian en los indicadores:

-El gusto por resolver problemas por vía gráfica, 10 (66.6 %) no manifiestan satisfacción.

-El interés de resolver problemas por vía gráfica, 9 (60.0%) no muestran avidez por resolver problemas por vía gráfica.

- El entusiasmo por la obtención del resultado, 3 (20%) no se muestran animados y 6 (40%) se manifiestan poco animados.

-La participación en las tareas propuestas, 4 (26.6%) Participan de manera impuesta y 6(40%) de manera dirigida.

Actitud

Las principales debilidades en esta dimensión son:

- La voluntad para enfrentar la solución de la situación problémica, 4(26.6%) no muestran constancia y esfuerzo para enfrentar la situación y 6 (40%) en ocasiones.

- La disciplina durante la resolución de problemas planteados 3 (20%) nunca son metódicos y 7 (46.7%) no siempre son metódicos.

La expresión sistémica y dinámica de estas 3 dimensiones en su comportamiento individual y grupal, a partir de la información acumulada en el estudio inicial, permite determinar el desarrollo de la resolución de problemas mediante la modelación pictográfica en los estudiantes, en el nivel bajo 7(46.6%), en el nivel medio 5 (33.3%) y en el nivel alto 3 para un 20 %.(Anexo #11)

Como se puede comprobar, los resultados demuestran las dificultades que presentan los estudiantes en la representación grafica del concepto de fracción y su significado práctico, detectándose que existen dificultades en el procedimiento para la comprensión del problema y no se buscan vías didácticas para que el

alumno interiorice el procedimiento, además no se realizan los problemas por vías diferentes y no se desarrolla habilidades generales y específicas acompañados de otras técnicas como la modelación y la determinación de problemas auxiliares.
Todo esto trae como consecuencia que si el alumno no encuentra rápido la solución del problema abandona la tarea. (Ver anexos # 1, 2, 3,4)

2.3.2. Juicios de valor del nivel de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica después de la implementación del sistema de ejercicios.

Similar a lo realizado en el pre-test., en la valoración del estado final del nivel de preparación de los estudiantes en el aprendizaje de las técnicas de modelación pictográfica, se aplicó la Prueba Pedagógica Final (Anexo 3) y la Observación al desempeño a lo largo del experimento.

La valoración cuantitativa del estado final de los indicadores en su proyección individual se expone en el (Anexos 9,11) . La de carácter grupal en cada dimensión y en general sobre el desarrollo de las técnicas de modelación pictórica en la resolución de problemas en el (Anexo 12)
La comparación de los resultados obtenidos, de carácter grupal antes y después de la aplicación de los ejercicios, se tabula en el (Anexo 14). Los datos se ofrecen por dimensiones y de manera general, expresan el nivel de desarrollo del grupo, a partir de considerar cuantitativamente la evaluación de los sujetos seleccionados: cuántos se mantienen y cuántos elevan su grado de desarrollo intelectual. Es importante señalar que aquellos que siguen ubicados en el primer nivel si mejoran y avanzan dentro de su rango.

En realidad, todos los estudiantes evidencian transformaciones positivas, tanto cualitativas como cuantitativas. A continuación, se ofrecen los resultados que así lo corroboran.

Desarrollo cognitivo

La dimensión cognitiva presenta un cambio distinto a la etapa inicial; los estudiantes demuestran un mayor dominio de conocimientos básicos y un mejor desarrollo de las técnicas de modelación pictográfico. Así lo confirman los datos obtenidos por medio de los diferentes métodos. (Anexos 7, 9, 14,15) Del total de los estudiantes (15) se encuentran 7 (46.6 %) en el nivel alto y 6(40%) en el nivel medio. Solo 2 (13.3%) está en el nivel bajo, aunque evoluciona dentro de ese nivel, sobre todo, en la motivación y en la actitud; estos 2 alumnos poseen un desarrollo intelectual limitado, les cuesta trabajo concentrarse y razonar situaciones complejas o no comunes; su rendimiento académico general es bajo a pesar del esfuerzo que realizan y la preocupación que mantienen por obtener mejores resultados en sus estudios.

De manera general, los logros en esta dimensión se aprecian en los siguientes indicadores:

- Representar gráficamente una parte del todo 12 (80%) logran realizarlo correctamente, de ellos 1 (6.67%) no llega a la respuesta final.
- Identificar la parte (resto) que queda del todo 10 (66.6%) logra identificarlo.
- Para calcular por vía gráfica una parte del resto 10 (66.6%) logran y hacen por calcularlo.
- Para calcular el todo conociendo la parte y el número que representa la parte (numéricamente) 9 (60%) se dan cuenta que tienen que plantear una ecuación.
- Resolver problemas aplicando las técnicas de modelación pictórica 9 (60%) lo resuelven por esta vía.

Motivaciones

Los datos demuestran los avances en esta dimensión, se aprecia interés y estimulación para resolver problemas aplicando estas técnicas.

Del total de ellos 13 (86.6%) se ubican en los niveles alto y medio, y solo 2 (13.3%) se pueden evaluar en el nivel bajo.

Los principales avances se evidencian en los indicadores:

- El gusto por resolver problemas por vía gráfica se manifiestan en todos, en mayor o menor grado pero 3 (20 %) de ellos lo muestran solo al resolver determinado tipo de problemas.
- Con respecto al interés de resolver problemas por vía gráfica, 1 (6.69%) no lo expresan marcadamente en ningún tipo de problema y 6 (40%) lo patentizan al realizar ciertos tipos, el resto 8 (63.3%) si le interesa cualquier tipo de problema.
- El entusiasmo por la obtención del resultado es visible en la gran mayoría, solo 3 (20%) se manifiestan poco animados.
- La participación en las tareas propuestas, 8 (55.5%) lo realizan de modo espontáneo, 5 (33.3%) de manera dirigida y 2 (13.3%) de manera impuesta..

Actitud

Lo volitivo – conductual se refiere en lo fundamental al valor y la significación que cobra para los estudiantes la solución de problemas, la información recopilada denota el mejoramiento en los progresos en esta dimensión.
- En la voluntad para enfrentar la solución de la situación problémica, 11(73.3%) muestran constancia en el esfuerzo para enfrentar la situación y 4 (26.6%) sólo en ocasiones.
- En la disciplina durante la resolución de problemas planteados, 9 (60%) son metódicos, muestran constancia en el esfuerzo y el resto no siempre lo son.

Después de valorar los datos brindados en el (Anexo 17), se concluye diciendo que existen cambios cuantitativos y cualitativos de los sujetos seleccionados, es importante señalar que aquellos que siguen ubicados en el primer nivel si mejoran y avanzan dentro de su rango.

Finalmente y a modo de conclusión parcial de este epígrafe, se destaca que la resolución de problemas mediante la modelación pictográficas transforma el nivel de preparación de los estudiantes en el tratamiento de resolución de problemas matemáticos verbales ya que es una poderosa arma para enfrentarse a buscar la solución de los mismos.

CONCLUSIONES:

- La sistematización de conocimientos fundamentales y de la experiencia de la autora de esta investigación en cuanto a la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica, en particular en el trabajo con el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica, permite determinar los conceptos, ideas, proposiciones que son fundamentales para conformar los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el desarrollo de estas en la resolución de problemas matemáticos verbales.
- El estudio del diagnóstico realizado a los egresados de la enseñanza primaria arrojó deficiencias en la representación gráfica del concepto de fracción y su significado práctico .A pesar de ser exigencias avaladas por los programas de quinto y sexto grados, los maestros no la utilizan en la resolución de problemas matemáticos verbales ya sea por el poco dominio de las ventajas que las mismas proporcionan. Se aprecian manifestaciones relacionadas con el poco dominio de las cinco habilidades que necesitan los estudiantes (interpretar, relacionar, modelar, resolver y comprobar la situación problémica); la baja motivación por resolver situaciones problémicas y la actitud pasiva que asumen ante los mimos. Asimismo, permite reconocer las potencialidades que ayudan al desarrollo de la resolución de problemas matemáticos verbales, como el rendimiento académico.
- A partir del estado real que presentan los estudiantes y sobre la base de sus potencialidades, además, las condiciones materiales que hoy tienen las escuelas, se diseñan y aplican un sistema de ejercicios que retoman los contenidos básicos de primaria; proyectado desde un estilo distinto, pues su representación de modo pictórico provocan en los escolares un esfuerzo cognitivo de mayor compromiso con la solución de los mismos, incluso, con problemas que se les puede presentar en la vida cotidiana.
- La evaluación de los efectos originados en los estudiantes, demuestran los cambios positivos en los niveles de desarrollo cognitivo, en la motivación y en la actitud de los estudiantes.

RECOMENDACIONES:

Derivado de las conclusiones anteriores, se recomienda que:

- En coordinación con las estructuras metodológicas y de dirección pertinentes, se creen las condiciones para la sistematización de la resolución de problemas matemáticos verbales utilizando la modelación pictórica, en los últimos grados de la primaria y que continúen con su aplicación en la enseñanza secundaria, además de preparar al profesor para poder aplicar estas técnicas.
- Se valore por las estructuras científicas y metodológicas autorizadas del territorio, la posibilidad de divulgar, lo referido al tratamiento de la aplicación de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictórica, por diferentes vías, así como los resultados de esta investigación e incluso, en otros niveles de enseñanza.

BIBLIOGRAFÍA.

Albarrán, I. (2006). Didáctica de las Matemática. La Habana: Pueblo y Educación.

Alonso, I. (2001). La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Tesis presentada en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Santiago de Cuba. Cuba.

Aristos*. Diccionario ilustrado de la lengua española*.(1978) España: Editorial Ramón.

Ausubel, D. (1983). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México D.F.: Trillas.

Ballester, S. & otros (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática, tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, S. & otros (1999). Los ejercicios de nuevo tipo. La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, S. & otros (2000). Metodología de la enseñanza de la Matemática Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, S. & otros (2000). Metodología de la enseñanza de la Matemática, tomo II. La Habana: Pueblo y Educación.

Bassanezi, R. C. y M. S. Biembengut, (1997). Modelación Matemática. Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, No 32.

Bernabeu, M., Jiménez, M., León, T. y Matos, C. (2006). Errores frecuentes de los estudiantes de educación básica en la evaluación del desempeño académico en Matemática y español. La Habana. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

Bunge, M. (1972). La investigación científica. La Habana: Ciencias Sociales.

Capote, M. (2005). La etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos para la escuela primaria. La Habana. Pueblo y Educación.

Carretero, M. (1989). Proceso de información y educación. En Cuadernos de Pedagogía (Barcelona). -- No. 166.

Castro, E y Castro E. ((1997) Representaciones y modelización. En L. Rico .La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona; Horsori.

Castro, E y Castro, E. (1999) Representaciones y modelación. Artículo del Departamento Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada.

Castro, E. (1994) Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años) Tesis Doctoral. Granada: Comares.

Castro, E., Morcillo, L. y Castro, E. (1999). Las representaciones Matemáticas. (Formato digital)

Cerezal Mezquita, J. y otros. (2006). “Metodología de la investigación y calidad de la educación”, en Fundamentos de las Ciencias de la Educación. Maestría en Ciencias de la Educación, Módulo II, Primera Parte, Ministerio de Educación Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. La Habana: Pueblo y Educación.

Cervera Márquez, P. (1998). Algunas estrategias para la Resolución de Problemas Geométricos en duodécimo grado. Ph. MSc en Ciencias de la Educación. C. H. Cuba.

Cervera Márquez, P. (1999). *Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en duodécimo grado*. Tesis de Maestría. Santiago de Cuba: Instituto Superior Politécnico "Julio Antonio Mella". Facultad de Matemática Física.

Cervera Márquez, P.(2007).La integración de conceptos Matemáticos a partir de las relaciones clásicas en la Educación preuniversitaria. Tesis de doctorado. Sanctis Espíritus: Instituto Superior Pedagógico “Félix Varela”

Chávez, J., Suárez, A. & Permuy, L. D. (2005). Acercamiento necesario a la Pedagogía General. La Habana: Pueblo y Educación.

Chirino, M. V. y A. Sánchez. (2003). Guía de Estudio. Metodología de la Investigación Educativa. La Habana: Pueblo y Educación

Córdova Llorca, M. D. La estimulación intelectual en situaciones de aprendizaje.— Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica E.J.Varona, La Habana, Cuba, 1997.

Córdova Llorca, M. D. Constructivismo, un enfoque de nuestro tiempo. Fotocopia. -- . Pueblo y Educación. 2006 Cuaderno Complementario de 7mo a 9no grado.

Cruz, M. (1999) “Sobre el planteo de problemas matemáticos”, en Revista Electrónica Órbita, (pp.18-23). La Habana: ISP “Enrique José Varona”.

Cruz, M. y Aguilar, A. (2001). “Evolución de la Didáctica de la Matemática”, en revista Función Continua. No. 12, Año II.

De Guzmán, M.. (1991). *Para Pensar Mejor*. España: Editorial Labor.

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Madrid.

De Guzmán, M. y P. D Gil, (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: tendencias e innovaciones*. Madrid: Editora Madrid Popular.

Delval, J. (1984). *Crecer y pensar: la construcción del conocimiento en la escuela*. Barcelona: Laia

García Batista, G. y R. Valledor. (2006). “Conformación del Informe de la investigación”, en Fundamentos de las Ciencias de la Educación. Maestría en Ciencias de la Educación, Módulo II, Primera Parte, Ministerio de Educación Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Gascón, J. (1994). "El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas", en revista Educación Matemática, vol. 6, Nº 3. (pp.14-21) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas. Educación Matemática, 6 (3), 125-141. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

González A. M. y C. Reinoso. (2002). Nociones de sociología, psicología y pedagogía. La Habana: Pueblo y Educación.

González Serra, D. (1989) Concepto y determinación de las capacidades. En Varona (La Habana). -- No. 21.

Hernández Avalos, J.(2006). ¿Cómo estas en Matemática? La Habana. Pueblo y Educación.

Jungk, W. (1978). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1. La Habana: Pueblo y Educación.

Jungk, W. (1979). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Primera parte. La Habana: Pueblo y Educación.

Jungk, W. (1982). Conferencia sobre metodología de la enseñanza de la Matemática. Segunda Part. La Habana: Pueblo y Educación.

Jungk, W. (1986). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Segunda Parte. La Habana: Pueblo y Educación.

Krutievski, V.A. (1986). Cuestiones generales sobre la estructura de las capacidades Matemáticas. En Antología de la psicología pedagógica y de las edades. -- La Habana: Pueblo y Educación,

Labarrere, A. (1980). “Sobre la formulación de problemas en los escolares”, en revista Educación. No. 36.La Habana.

Labarrere, A. (1987). Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. La Habana: Pueblo y Educación. .

Labarrere, A. (1988). Cómo en enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. La Habana: Pueblo y Educación.

Labarrere, A. (1988). Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. La Habana: Pueblo y Educación.

Labarrere, G. Pedagogía. La Habana: Pueblo y Educación, 1988.

Labarrere, A. (1989, noviembre). “Cómo el maestro de primaria puede iniciar a sus alumnos en la construcción de esquemas para resolver problemas matemáticos”, en revista La Educación por el Mundo. La Habana, noviembre.

Labarrere, A. Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. -- México D.F.: Ángeles, 1994.

Lorences, J. (2007). *Aproximación al sistema como resultado científico.* ISP

LLano, A. (1999) El enigma de la representación. Madrid: Síntesis.

Llivina Lavigne, M. J. Una alternativa metodológica para evaluar la capacidad para resolver problemas matemáticos. La Habana, 1996. -- Tesis de Maestría en Didáctica de la Matemática.

Majmutov, M. I. (1983) La enseñanza problémica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación

Majmutov M., I. (1986). La enseñanza problémica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Mederos, O, Martínez, J.E. y González, B.E. (2000). Las capacidades para resolver problemas y para la modelación. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. de la Corporación Universitaria de Ibagué. ISSN- O123 – 9643. Ibagué. Colombia.

Mederos, O. & González, B. E. (2005). *La modelación en la Educación Matemática*. Saltillo. México: Universidad Autónoma de Coahuila.

Ministerio de Educación de Cuba (2007, septiembre). Proyecto de documento sobre las líneas directrices y competencias en la asignatura Matemática. [versión electrónica]. La Habana.

Ministerio de Educación de Cuba (1971) Matemática 7. Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1971) Matemática 9. Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1971). Matemática 8. Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1980). Pedagogía. La Habana: Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1989). Programa Matemática, Séptimo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1989).Matemática 5 Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1989). Orientaciones metodológica de 5 grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1990). Matemática 6 Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1990). Programa Matemática. Octavo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1997). Programa director de Matemática. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (1999). Programa de Matemática para la Secundaria Básica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2004). III Seminario Nacional para Educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2004). Programa de 5 grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2005). IV Seminario Nacional para Educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2005).Cuaderno complementario 7 grado .La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2005).Cuaderno complementario 8 grado .La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2005).Cuaderno complementario 9 grado .La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2006). Programa de 6 grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2007) versión #7. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2007). Video-Conferencias de la Maestría en Ciencias de la Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2008). Versión # 8 La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba. Plan de estudio de la carrera Licenciatura en educación. Especialidad: PGI. Formato Digital.

Ministerio de Educación de Cuba. Orientaciones metodológica de 6 grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Muller, H. (1987) Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la Enseñanza de la Matemática.--La Habana: ICCP.

Muñoz, F.(1985). *Ejercitación en la enseñanza de la Matemática*. Revista Educación, XV, pp-39-49.

Muñoz, F. (1989). Libro de texto. Matemática, séptimo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Muñoz, F.(1989). Orientaciones Metodológicas. Matemática, séptimo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Muñoz, F. (1990) Orientaciones Metodológicas. Matemática, octavo grado". La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Muñoz, F. (1990). Libro de texto. Matemática, octavo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Muñoz, F.(1991). Orientaciones Metodológicas. Matemática, noveno grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Muñoz, F.(1991). Libro de texto. Matemática, noveno grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Pérez Rodríguez, G. y otros. (2002). Metodología de la investigación educacional. Primera parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Petrovsky, A. V. (1982). Psicología pedagógica y de las edades. La Habana: Pueblo y Educación.

Polya, G. (1976). Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F.; (1989), Problemas aritméticos escolares (Síntesis:Madrid).

Real Academia Española (2006). Integración. En, Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición. Recuperado el 8 de marzo de 2006, en http://www.rae.es/

Real Academia Española.(1984) *Diccionario de la lengua*. Ed. Madrid..

Rebollar, A. (1995) Una alternativa en la preparación de los alumnos para resolver problemas matemáticos en la enseñanza media cubana. En Memorias de Pedagogía 95. La Habana: IPLAC.

Rebollar, A. (2000). *Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Santiago de Cuba.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá: Una Empresa Docente.

Rico, L; Castro, E. y Romero, I. (1996) Sistema de representación y aprendizaje de estructura numéricas.

Rizo, C. y L. Campistrous (1997). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Ponencia presentada en el Congreso Pedagogía 97. Del 2 al 5 de febrero. La Habana.

Rizo, C. y L. Campistrous: (1997). “Aprender preferentemente procedimientos de cálculo”, en: Aprende a resolver problemas aritméticos. La Habana: Pueblo y Educación.

Rizo, C. y L. Campistrous. Tomado del artículo: “Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos”.Digitalizado sin fecha.

Rizo, C. y L. Campistrous: (1999) Aprender a resolver problemas aritméticos. La Habana. Editorial Pueblo y educación,

Rodrigues, Armando, C.(2007).La solución de problemas matematicos.Una necesidad de la enseñanza preuniversitaria .Sancti Spíritus: Instituto Superior Pedagógico “Félix Varela”.

Rubinstein, J. L. (1967). Principios de Psicología General. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Rubinstein, L.(1966) El proceso del pensamiento. La Habana: Editorial Universitaria.

Rubinstein, S. L. (1986) El problema de las capacidades y las cuestiones relativas a la teoría psicológica. -- En Antología de la psicología pedagógica y de las edades. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Ruiz Pérez, Aldo, M.(2007).La integración de conceptos Matemáticos a partir de las relaciones clásicas en la Educación preuniversitaria. Tesis de doctorado. Sancti Spíritus: Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela"

Ruiz, E. (1995). Exploración de estrategias heurísticas en la Resolución de Problemas:

Santos Trigo, L. M. (1994). La solución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas. CINVESTAV-IPN.

Santos Trigo, L. M. (1996). Análisis de algunos de los métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. Revista Educación.

Santos Trigo, L. M. (1996). Principios y métodos de la resolución de problemas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Silvestre, M. y J. Zilberstein (2002). Hacia una didáctica desarrolladora. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Software Educativo: "Colección el Navegante", Elementos matemáticos.

Torres Fernández, P. (1992) Los métodos problémicos en la enseñanza de la Matemática. -- La Habana,. -- Tesis en opción al grado científico de Dr. en Ciencias Pedagógicas. Pueblo y Educación.

Torres Fernández, P. (1993).La Enseñanza Problémica de la Matemática en el nivel Medio General. Tesis para la opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISPEJV. La Habana, Cuba.

Vigotski, L. S. (1978). Mind in Society (Mente y Sociedad). El desarrollo de los principales procesos psicológicos. Harvard University Press.

Vigotski, L.S. (1989). El problema de la enseñanza y del desarrollo mental en la edad escolar. En Y. Guippenréiter (Ed.), El proceso de formación de la psicología marxista (pp. 210-220). Moscú: Progreso.

Vigotsky L. S. (1998). Pensamiento y Lenguaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Segunda Edición. Cuba.

ANEXOS:

Anexo 1:

Guía de observación.

Objetivo: ***Observar el estado del nivel de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica.***

1. ***La mayoría de los alumnos pueden trabajar independientemente en la clase a partir de las orientaciones dadas por el profesor.***

2. ***Se conocen los significados prácticos de las operaciones aritméticas.***

3. ***Se resuelven los problemas por varias vías***

4. ***Se utilizan los gráficos o esquemas para resolver problemas.***

5. ***Se aplican los procedimientos para resolver un problema.***

6. ***Cómo se comportan los estudiantes en la esfera motivacional al presentársele un problema.***

7. ***Disposición de los estudiantes para resolver problemas.***

Anexo 2:

Prueba pedagógica inicial.

Objetivo: comprobar el estado actual del nivel de aprendizaje de la representación grafica del significado práctico de las operaciones aritméticas.

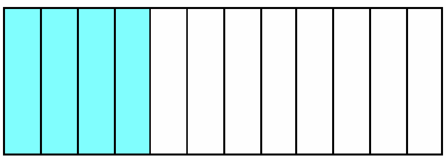
Nombre***:*** ____

Hora de inicio: ______ Hora de culminación: _____

Indicaciones: Resuelve los siguientes ejercicios. Es necesario que escribas todo lo que pienses en el papel. No borres nada. Si te equivocas, puedes tachar el error y continuar escribiendo a continuación.

Gracias.

1- Dada la siguiente figura, responda:



a) La parte sombreada representa: ___________

b) La parte que quedó sin sombrear representa: ___________.

c) El todo de la figura representa: __________

d) Calcula 2/5 del resto__________

2- Halla gráficamente:

a) $\frac{3}{8}$ de 8 bolas

b) $\frac{4}{5}$ de 10 círculos

10- Calcula de qué número es 20 de 1/5

Anexo 3:

Prueba pedagógica final.

Objetivo: comprobar el estado actual del nivel de aprendizaje de la representación grafica del significado práctico de las operaciones aritméticas.

Nombre***:*** ______________________________________

Hora de inicio: ______ Hora de culminación: _____

Indicaciones: Resuelve los siguientes ejercicios. Es necesario que escribas todo lo que pienses en el papel. No borres nada. Si te equivocas, puedes tachar el error y continuar escribiendo a continuación.

Gracias.

10- Este rectángulo se ha dividido en cuatro partes desiguales. En tres de ellos se ha indicado qué parte del rectángulo representa

¼	1/5
¿?	1/3

a) Averigua que parte del rectángulo representa el cuarto sector.

b) Calcula 2/3 del cuarto sector.

c) Si 1/5 equivale a 18 en la figura. ¿Cuál es el número que representa el todo?

2-Los 3/8 de un aula practican baloncesto. ½ del resto practica football y 5 restantes practican ajedrez. ¿Cuántos alumnos tiene el grupo?

Anexo 4:

Entrevista grupal.

Objetivo: Constatar las motivaciones de los estudiante ante un problema matemático verbal. .

Como parte de la investigación que se realiza acerca del nivel motivacional de ustedes, como estudiante, necesitamos su colaboración para el perfeccionamiento del mismo.

Guía para la entrevista

1. ¿Te gusta resolver problema?
2. ¿Te gustaría resolver problemas aritméticos?
3. ¿Enfrentas con voluntad y disciplina la solución de una situación problémica?
4. ¿Cuáles son los pasos que realizas para resolverlo?
5. ¿Conoce la modelación pictórica para resolver problemas?
6. ¿Sabes representar una parte del todo?
7. ¿Resolvías problema en primaria por vía gráfica? Exponga su criterio.

Anexo: 5

Procedimiento generalizado para la resolución de problemas.

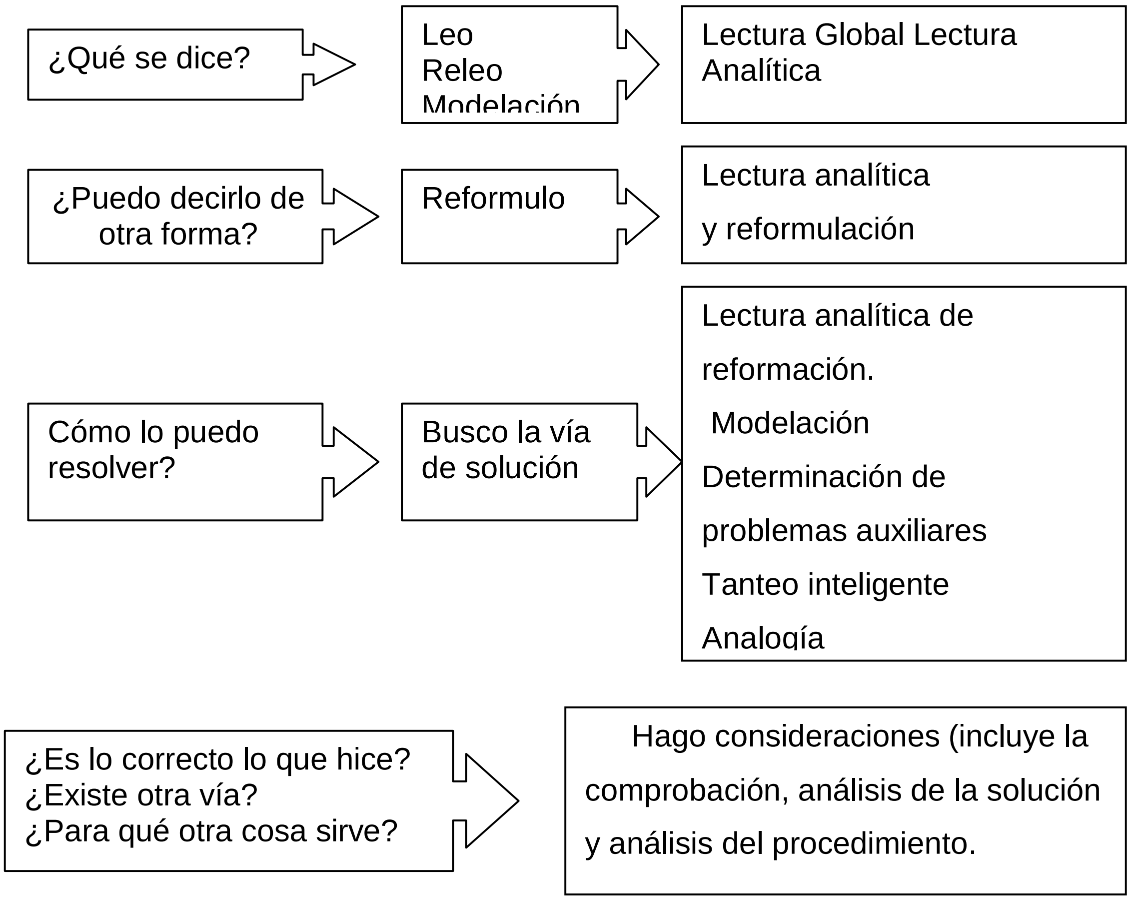


Fig. 1: Etapas consideradas por Polya para la resolución de un problema.

En el material se muestra como el procedimiento puede verse íntimamente relacionado con los tres momentos fundamentales de la actividad como se ilustra a continuación.

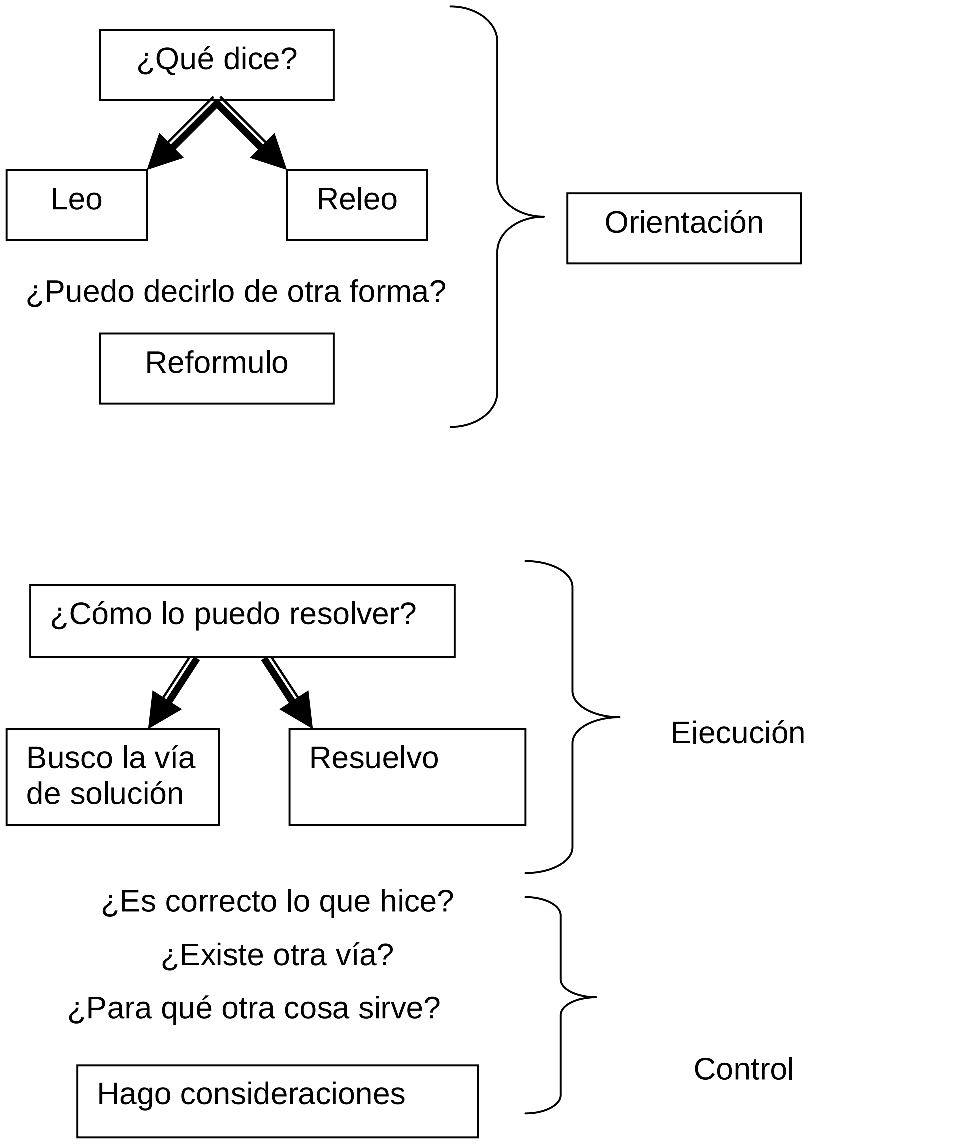


Fig.2. Fases fundamentales en el desarrollo de cualquier

Este procedimiento generalizado para la resolución de problemas es imprescindible tenerlo en cuenta también en el caso de la modelación pictográfica en la resolución.

Anexo: 6

NIVEL DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMA VERBALES MEDIANTES LA MODELACIÓN PICTÓRICA (ANTES).

	Indicadores											Niveles		
Estudiantes	**1ª**	**1b**	**1c**	**1d**	**1e**	**2ª**	**2b**	**2c**	**2d**	**3ª**	**3b**	**alto**	**medio**	**Bajo**
1	X	x	x	x	-	x	x	x	x	x	x	X	-	-
2	X	-	-	-	-	x	-	x	x	x	x	-	x	-
3	-	-	-	-	-	x	-	-	x	x	-	-	-	X
4	-	-	-	-	-	x	x	-	-	x	-	-	-	X
5	X	x	x	x	-	-	-	x	x	x	x	X	-	-
6	-	-	-	-	-	x	x	x	-	-	x	-	-	X
7	X	-	-	-	-	-	x	x	x	x	x	-	x	-
8	-	-	-	-	-	-	x	x	x		x	-	-	X
9	-	-	-	-	-	x	x	x	x	x	x	-	x	-
10	-	-	-	-	-	-	x	-	x	x	x	-	-	X
11	X	x	x	x			x	x	x	x	x	X	-	-
12	-	-	-	-	-	x	x	x	-	-	-	-	-	X
13	-	-	-	-	-	x	-	x	x	x	x	-	x	-
14	-	-	-	-	-	x	x	x	-	-	x	-	-	X
15	-	-	-	-	-	X	x	x	x	x	x	-	x	-

Anexo 7:

NIVEL DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMA VERBALES MEDIANTES LA MODELACIÓN PICTÓRICA (DESPUÉS).

	Indicadores											Niveles		
Estudiantes	**1ª**	**1b**	**1c**	**1d**	**1e**	**2ª**	**2b**	**2c**	**2d**	**3ª**	**3b**	**alto**	**medio**	**Bajo**
1	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
2	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
3	-	-	-	-	-	x	x	-	x	x	x	-	x	-
4	X	x	-	x	-	x	x	x	x	x	x	X	-	-
5	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
6	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
7	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
8	X	-	-	-	-	-	x	-	x	x	x	-	x	-
9	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
10	X	x	-	-	-	-	x	x	x	x	x	-	x	-
11	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
12	-	-	-	-	-	x	x	x	x	x	x	-	-	-
13	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-
14	X	x	-	-	-	-	x	-	x	x	x	-	x	-
15	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	-	-

Anexo 8: TOTAL DE INDICADORES ALCANZADOS POR CADA ESTUDIANTE. (Antes).

	Indicadores alcanzados por estudiante											Total de indicadores alcanzados por cada estudiante
Estudiantes	**1ª**	**1b**	**1c**	**1d**	**1e**	**2ª**	**2b**	**2c**	**2d**	**3ª**	**3b**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**10**
2	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**6**
3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**3**
4	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**3**
5	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**8**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**4**
7	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**6**
8	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**4**
9	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**6**
10	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**4**
11	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**9**
12	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**3**
13	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**5**
14	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**4**
15	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**6**
Total	**5**	**3**	**3**	**3**	**0**	**10**	**11**	**12**	**11**	**11**	**12**	**81**

LEYENDA: (0) No Alcanza el Indicador (1) Si Alcanza el Indicador

Anexo 9: TOTAL DE INDICADORES ALCANZADOS POR CADA ESTUDIANTE. (Después).

	Indicadores alcanzados por estudiante											Total de indicadores alcanzados por cada estudiante
Estudiantes	**1ª**	**1b**	**1c**	**1d**	**1e**	**2ª**	**2b**	**2c**	**2d**	**3ª**	**3b**	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
3	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	5
4	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	9
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	4
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
10	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	7
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
12	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
14	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	6
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
Total	13	12	9	10	9	12	13	12	15	15	15	136

LEYENDA: (0) No Alcanza el Indicador (1) Si Alcanza el Indicador

Anexo 10:

Frecuencia absoluta y relativa de categoría por indicadores. (Antes)

Categoría	1ª		1b		1c		1d		1e	
	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%
0	10	66,6	12	80	12	80	12	80	15	100
1	5	33,3	3	20	3	20	3	20	0	0

Categoría	2ª		2b		2c		2d		3ª		3b	
	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%
0	10	66,6	11	73,3	12	80	11	73,3	11	73,3	12	80
1	5	33,3	4	26,6	3	20	4	26,6	4	26,6	3	20

LEYENDA:

FA: FRECUENCIA ABSOLUTA

(O): NO ALCANZA EL INDICADOR

(I): SI ALCANZA EL INDICADOR

Anexo 11:

FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE CATEGORÍA POR INDICADORES (después)

Categoría	1ª		1b		1c		1d		1e	
	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%
0	2	13,33	3	20	6	40	5	33,3	6	40
1	13	86,66	12	80	9	60	10	66,6	9	60

Categoría	2ª		2b		2c		2d		3ª		3b	
	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%
0	3	20	2	13,3	3	20	0	0	0	0	0	0
1	12	80	13	86,6	12	80	15	100	15	100	15	100

LEYENDA:

FA: FRECUENCIA ABSOLUTA

(O): NO ALCANZA EL INDICADOR

(I): SI ALCANZA EL INDICADOR

Anexo 12:

Valoración grupal del estado inicial de cada dimensión y general (Antes)

Desarrollo Cognitivo

Primer Nivel (I): Bajo (de 5 a 7) ___________ 4 (26,7 %)

Segundo Nivel (II): Medio (de 8 a 12) _____ 8 (53,3 %)

Tercer nivel (III): Alto (de 13 a 15) _________3 (20,0 %)

Motivación

Primer Nivel (I): Bajo (de 4 a 6) ___________ 2 (13,3 %)

Segundo Nivel (II): Medio (de 7 a 10) _____ 8 (53,3 %)

Tercer nivel (III): Alto (del 11 al 12) ______ 5 (33,3 %)

Actitud

Primer Nivel (I): Bajo (de 4 a 6) ___________ 2 (13,3 %)

Segundo Nivel (II): Medio (de 7 a 10) _____ 9 (60,0 %)

Tercer nivel (III): Alto (del 11 al 12) ______ 4 (26,7%)

General

Primer Nivel (I): Bajo (de 13 a 25) _________ 5 (33,33 %)

Segundo Nivel (II): Medio (de 26 a 31) ____ 5 (33,33%)

Tercer nivel (III): Alto (del 32 al 39) ________ 5 (33,33%)

Anexo 13:

Tabla de criterios para valorar el estado de los indicadores establecidos Cognitiva:

Representar gráficamente una parte del todo	Obtiene el resultado con seguridad.	Sabe que se divide en partes iguales pero no llega al resultado.	Lo intenta pero no puede realizar.
Identificar la parte del resto	Identifica correctamente.	Identifica que queda una parte pero no llega a la respuesta	No lo identifica.
Calcular gráficamente una parte del resto	Calcula correctamente	No reconoce que el resto es el todo pero calcula en base al error.	No identifica por lo que no continua el ejercicio.
Calcular el todo conociendo una parte y el numeró que representa	Plantea la ecuación y calcula correctamente	Plantea la ecuación incorrecta pero La resuelve.	No plantea la ecuación por lo que no lo resuelve.

MOTIVACIONES			
	Alta	**Media**	**Baja**
Gusto por resolver problemas matemáticos	Manifiesta satisfacción por resolverlos	Manifiesta satisfacción solo por algunos tipos de problemas	No manifiesta satisfacción por ningún problema
Interés por resolver problemas	Muestra mucho interés por resolver problemas	Muestra interés por resolver algunos problemas	No muestra interés por resolver ningún problemas
Entusiasmo por la obtención de resultados	Se manifiestan muy animados por los resultados obtenidos	Se manifiestan poco animados por los resultados obtenidos	No se les nota animación
Participación durante las tareas propuestas	Participa de manera espontánea	Participa de manera dirigida	Participa de manera impuesta

Actitud			
	Buena	**Media**	**Regular**
Voluntad para enfrentar la solución de las situaciones problémicas	Muestra constancia y esfuerzo para enfrentar la solución de las situaciones problémicas	Muestra en ocasiones constancia y esfuerzo para enfrentar la solución de las situaciones problémicas	No muestra constancia y esfuerzo para enfrentar la solución de las situaciones problémicas
Disciplina durante la resolución de los problemas planteados	Es metódico durante la resolución de los problemas planteados	No siempre es metódico durante la resolución de los problemas planteados	Nunca es metódico durante la resolución de los problemas planteados

Anexo 14:

Escala ordinal

Categorías para evaluar el nivel de desarrollo de las habilidades en la resolución de problemas, antes y después.

(Antes)

<u>Cognitivos</u>

Primer nivel (I): Bajo de (0-2) ________ (2 para 80%)

Segundo Nivel (II): Medio de (3-4) ______ (3 para 20 %)

Tercer nivel (III) : Alto de (5) _________(0 para 0%)

<u>Motivaciones</u>

Primer nivel (I): Bajo de (1) _________(o para 0%)

Segundo Nivel (II): Medio de (2-3) ______ (11 para 73,33 %)

Tercer nivel (III) : Alto de (4) _________(4 para 26,66 %)

<u>Actitud</u>

Primer nivel (I): Bajo de (0) _________ (1 para 6,66 %)

Segundo Nivel (II): Medio de (1) ________ (5 para 33,33 %)

Tercer nivel (III) : Alto de (2) _________(9 para 60,00%)

<u>General</u>

Primer nivel (I): Bajo de (3,5) ________ (7 para 46,66%)

Segundo Nivel (II): Medio de (6,8) _______ (5 para 33,33 %)

Tercer nivel (III) : Alto de (9-11) _______(3 para un 20 %)

(Después)

Cognitivos

Primer nivel (I): Bajo de (0-2) ________ (5 para 33,33%)

Segundo Nivel (II): Medio de (3-4) ______ (1 para 66,66 %)

Tercer nivel (III): Alto de (5) _________ (9 para 60,00%)

Motivaciones

Primer nivel (I): Bajo de (1) _________(o para 0 %)

Segundo Nivel (II): Medio de (2-3) ______ (3 para 20,00 %)

Tercer nivel (III): Alto de (4) _________ (12 para 80,00%)

Actitud

Primer nivel (I): Bajo de (0) _________ (0 para 0%)

Segundo Nivel (II): Medio de (1) ________ (0 para 0%)

Tercer nivel (III): Alto de (2) _________ (15 para 100%)

General

Primer nivel (I): Bajo de (3,5) ________ (0 para 0%)

Segundo Nivel (II): Medio de (6,8) _______ (5 para 33,33 %)

Tercer nivel (III): Alto de (9-11) _______ (10 para 62%)

Anexo 15:

Comparación entre la primera y la última valoración a nivel grupal de cada dimensión y del estado general

	INDICADORES ANTES										
	1ª	**1b**	**1c**	**1d**	**1e**	**2ª**	**2b**	**2c**	**2d**	**3ª**	**3b**
#	**5**	**3**	**3**	**3**	**0**	**10**	**11**	**12**	**11**	**11**	**12**
%	**33,3**	**33,3**	**33,3**	**33,3**	**0**	**66,6**	**73,3**	**80**	**73,3**	**73,3**	**80**

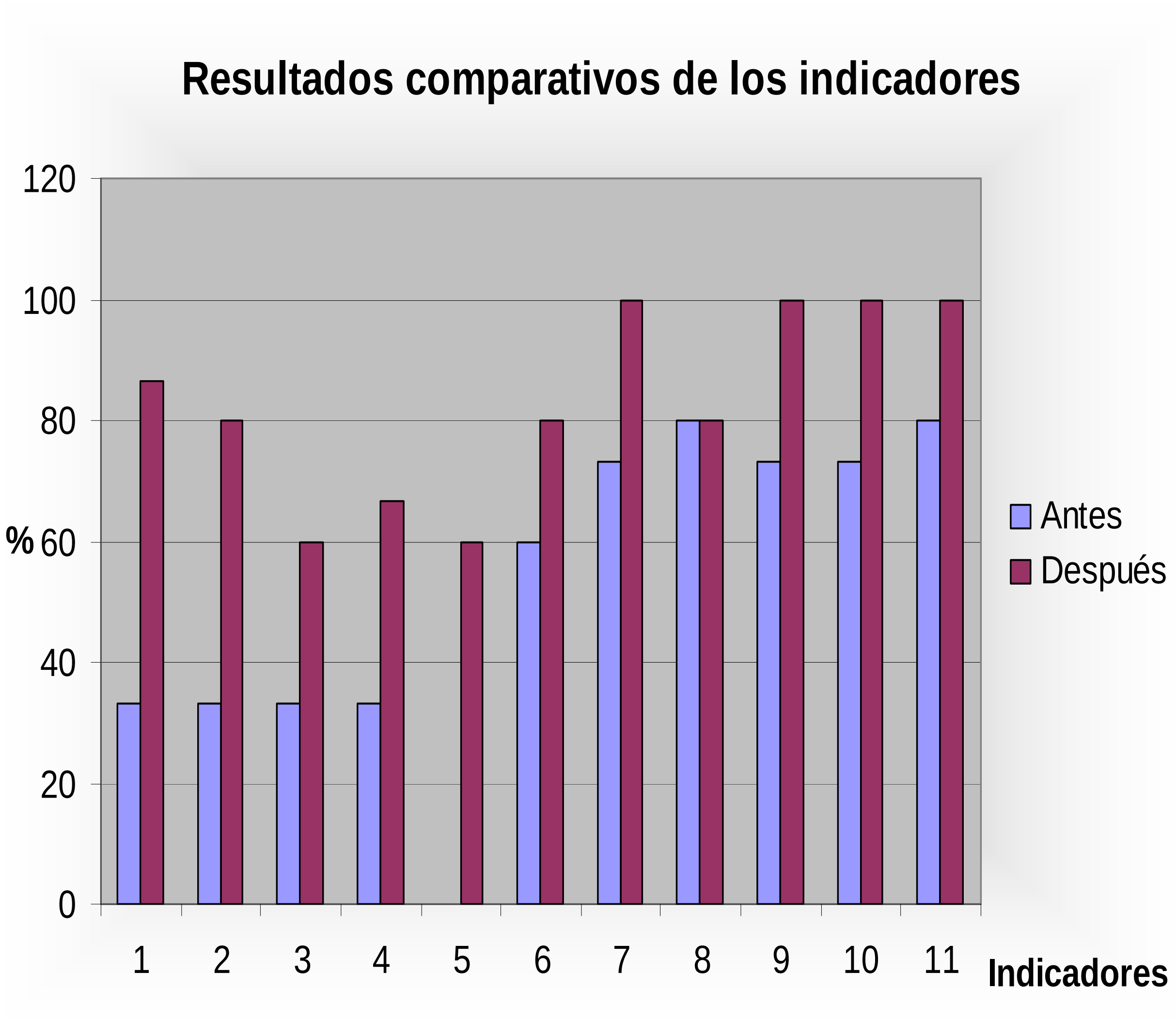
	INDICADORES DESPUÉS										
	1ª	**1b**	**1c**	**1d**	**1e**	**2ª**	**2b**	**2c**	**2d**	**3ª**	**3b**
#	**13**	**12**	**9**	**10**	**9**	**12**	**15**	**12**	**15**	**15**	**15**
%	**86,66**	**80**	**60**	**66,6**	**60**	**80**	**100**	**80**	**100**	**100**	**100**

Anexo: 16:

Desarrollo de la resolución de problemas verbales aplicando la modelación pictórica habilidades en la resolución de problemas

Sujetos	***Constatación inicial***			***Constatación final***		
15	**I**	**II**	**III**	**I**	**II**	**III**
	10	**5**	**0**	**0**	**5**	**10**
	66,6%	**33,33%**	**0**	**0%**	**33,33%**	**66,66%**

Anexo: 17



Leyenda

1-5 Cognitivo

6-9 Motivacional

10-11 Actitudinal

Anexo: 18

Procedimiento por vía gráfica (se observará que se aplican las etapas propuestas por Polya antes mencionadas y los tres momentos fundamentales

Juan, María y Luisa se repartieron una cierta cantidad de mangos que tenía una cesta. Juan tomó de la cesta ¼ y María 2/3 de lo que le quedaba y Luisa los 30 mangos restantes. ¿Cuántos mangos le correspondió a cada uno?

Comprender el problema

¿Qué se dice?

El alumno lee y relee el problema y hace un análisis de

$total: \times$

$Juan: \frac{1}{4} de \times.$

$María: \frac{2}{3} del resto$

$Luisa: 30.$

2. ¿Puedo decirlo de otra forma?

Analizar que el resto de la diferencia del todo y la parte que ocupa Juan es decir, que María cogió los $\frac{2}{3}$. De lo que le falta a $\frac{1}{4.}$ para llegar a ser la unidad es decir María $\boxed{\rightarrow}$ $\frac{2}{3}(\frac{3}{4})$

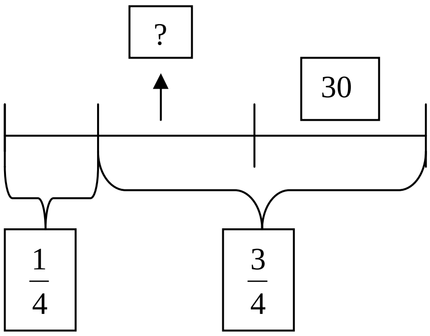
3? Cómo lo puedo resolver?

Buscar la vía de solución

Modelación

Lectura analítica de reformulación.

Representación de las condiciones de un modelo con las exigencias del ejercicio.



Determinación de problemas auxiliares.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

Para encontrara la parte fraccionaria que representa 30 del total, entonces se suman $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ luego $\frac{1}{4}$ es lo que le falta al todo entonces 30 equivale a $\frac{1}{4}$.

Se necesita encontrar de qué número es 30 un

$$\frac{1}{4}\cdot\times=30$$
$$\times=30\cdot 4$$
$$\times=120$$

resuelvo

recíproco

Luego se calcula $\frac{1}{4}\cdot 120=30$ además se calcula $\frac{1}{2}\cdot 120=60$. Por lo que ya se conoce el número que representa cada parte de la figura señalada.

Respuesta: La cesta tenía 120 mangos.

4. ¿Es correcto lo que hice? → Se comprueba en el texto del problema 30+30+60=120.

↓

¿La solución es única?

↓

¿Puede existir otra solución? ¿Por qué?

A modo de conclusión las acciones que deben tener en cuenta los estudiantes para modelar se resumen a continuación.

- Analizo qué tipo de modelo utilizar. (¿Qué tipo de modelo a utilizar?)
- ¿Cómo represento la información? (Hago el esquema. Represento y controlo si se corresponde con la situación.)
- ¿Se ajusta a la situación? (lo analizo para ver si me ayuda a comprender mejor el problema o encontrar la vía de solución).
- ¿Qué puedo inferir de él?

Anexo: 19.

Característica del sistema de ejercicios.

Objetivo del sistema

Ejercicios dirigidos al aprendizaje de la resolución de problemas

Estructura de los ejercicios:

Favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos verbales mediante la modelación pictográfica en la

Aseguramiento del nivel de partida.

Fijación del contenido a través de problemas.

Resolver problemas matemáticos verbales.

Exigencias

Decidir por que vía de resolución asume el alumno

Modelar el problema por vía gráfica.

Valorar la actuación del resolutor.

Corregir el error.

Valorar las causas de

Ejercicios dirigidos al aprendizaje de la modelación pictográfica:	
Ejercicios para el desempeño ante errores en:	**Número del ejercicio**
Aseguramiento del nivel de partida.	1, 2, 3, 4, 5, 6,y 7
Fijación del contenido a través de problemas.	8, 9, 10, y 11
Resolver problemas matemáticos verbales utilizando la modelación lineal pictórica.	13, 14, y 15

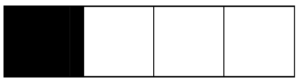
Relación entre los ejercicios del sistema y las exigencias					
Ejercicios	Exigencias				
	Decidir por que vía de resolución asume el alumno.	Modelar el problema por vía gráfica.	Valorar la actuación del resolutor.	Corregir el error.	Valorar las causas de la comisión del error.
1	X	X	X	X	X
2	X	X	X	X	X
3	X	X	X	X	X
4	X	X	X	X	X
5	X	X	X	X	X
6	X	X	X	X	X
7			X	X	X
8	X	X	X	X	X
9	X	X	X	X	X
10	X	X	X	X	X
11	X	X	X	X	X
12	X	X	X	X	X
13	X	X	X	X	X
14	X	X	X	X	X
15	X	X	X	X	X

Anexo: 20.

Ejemplos de ejercicios resueltos por la modelación pictográficas.

Ejemplo #1:

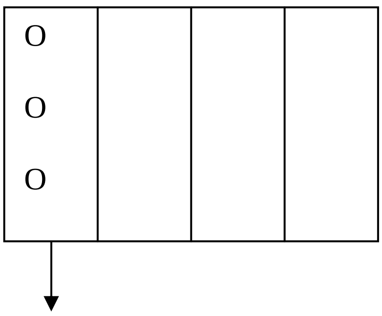
La representación de una o varias de las partes iguales en que se divide un todo constituido por una unidad entera. Es decir representar $\frac{1}{4}$ de un rectángulo.



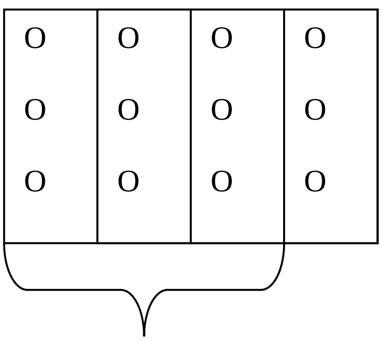
El rectángulo se ha dividido en 4 partes iguales y se toma 1.

$\frac{1}{4}$ Del rectángulo.

2-Representa gráficamente $\frac{1}{4}$ de 12 bolas.



$\frac{1}{4}$



$\frac{3}{4}$

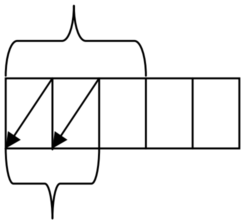
1.) $\frac{1}{4}$ de 12 significa que hay que dividir en 4 partes iguales a 12, que esto es igual a 3 $\therefore \frac{1}{4}$ equivale a 3 bolas.

2.) Como a $\frac{1}{4} \rightarrow 3$ luego 3 veces $\frac{1}{4}$ es igual a 9 $\therefore \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

3- Calcula $\frac{2}{3} de \frac{3}{5}$

Se divide el todo en cinco partes iguales y se toma tres.

$\frac{3}{5}$



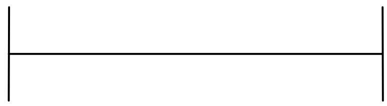
$\frac{2}{3} de \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Aquí se orienta al niño que de una parte fraccionaría de un entero se pueden obtener mas unidades fraccionarias. Observen que ahora el todo es $\frac{3}{5}$ y esta dividido en tres partes iguales, es decir por lo que $\frac{1}{3}$ equivale a $\frac{1}{5}$ luego dos veces $\frac{1}{3}$ equivale a $\frac{2}{5}$

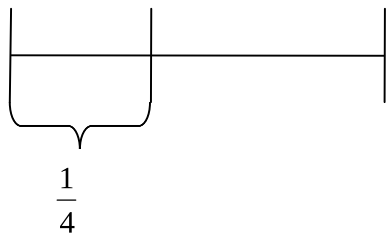
4-Si de un todo se toma $\frac{1}{4}$. ¿Que parte representa $\frac{2}{3}$ del resto?.

El profesor debe realizar la solución por la representación grafica para ir introduciendo el modelo pictográfico.

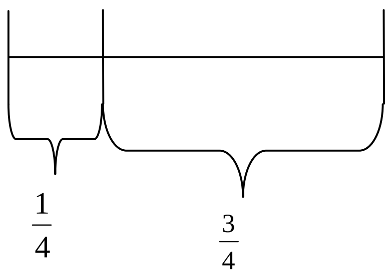
1- Se debe representar el todo por un segmento u otros modelos (El que escoja el alumno)



2- ¿En cuantas partes se debe dividir el todo?.
En cuatro partes, el alumno debe marcar supuestamente $\frac{1}{4}$



3 ¿Cual es el resto? El alumno debe aplicar lo que conoce del todo es decir que a $\frac{1}{4}$ le faltan $\frac{3}{4}$ para llegar a la unidad entonces el resto equivale a $\frac{3}{4}$, por lo que debe representarlo en la figura.

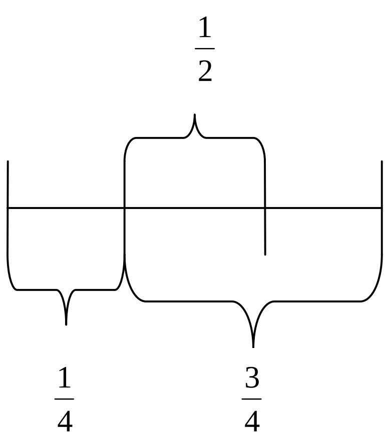


4-¿Qué me piden?
El alumno debe saber que tiene que calcular $\frac{2}{3}$ del resto. Por lo que tiene que calcular $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ y esto lo pueden hacer calculando, es decir:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

Simplificando $\frac{6}{12}$ equivale a $\frac{1}{2}$

Por lo que debe representar supuestamente $\frac{1}{2}$

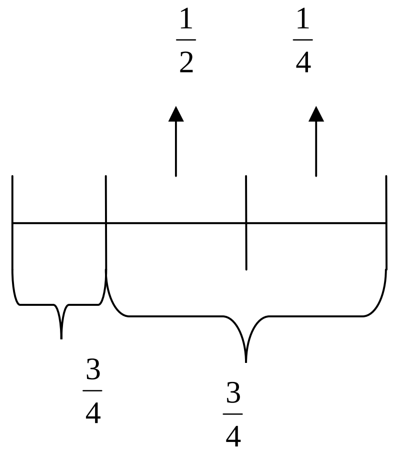


A partir de la situación anterior el profesor le preguntara a su alumno que parte del total representa el resto. Entonces los estudiantes deben calcular las partes fraccionarias que conocen es decir $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

Es decir que a $\frac{3}{4}$ le falta $\frac{1}{4}$ para completar el todo y deben representarlo en el grafico.

Para finalizar deben realizar la comprobación

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$



Anexo: 21

Instrumentos aplicados para medir los indicadores.

Dimensión	Indicadores	OC	EA	PP1	PP2
Cognitiva	1ª	X-	-	-X	X
	1b	X-	-	-X	X
	1c	X-	-	-X	X
	1d	-X	-	-X	X
	1e	X	X	X	X
Motivación	2ª	-X	X	-	-
	2b	-X	X	-	-
	2c	X	X	-	-
	2e	X	X	X	X
Actitud	3ª	X	X	-	-
	3b	X	X	-	-

- **EA: Entrevista grupal a estudiantes**.
- **OC: Observación.**
- **PP1: Prueba pedagógica de entrada.**
- **PP2: Prueba pedagógica de salida.**