INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO CAPITÁN SILVERIO BLANCO NÚÑEZ

Sancti- Spíritus

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROCEDIMIENTO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO FUNCIÓN LINEAL A PEDAZOS EN LOS ALUMNOS DE DÉCIMO GRADO

Tesis en opción del título académico de Máster en Ciencias de la Educación

Autor: Lic. Neisy Caridad Rodríguez Morales

2008

Resumen

El trabajo trata, el aprendizaje por medio de problemas donde se hace uso de la modelación matemática en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la función lineal a pedazos. En la ejecución de la investigación, se combinaron métodos del nivel teórico, del nivel empírico y del nivel estadístico – matemático. Se pudo constatar, la existencia de insuficiencias en la formación del concepto función lineal a pedazos, en el preuniversitario Serafín Sánchez Valdivia de la provincia de Sancti- Spíritus. El análisis de las posibles causas del problema, condujo a la elaboración de un procedimiento didáctico para usar la modelación matemática en el estudio de la función lineal a pedazos, el cual, puede ser utilizado por los docentes en el empeño de mejorar los resultados de su labor durante el aprendizaje de los estudiantes, el procedimiento consta de seis acciones, que a la vez, están integradas por operaciones que contribuyen a guiar la actividad a realizar, por el docente, para dirigir el proceso de formación del concepto función lineal a pedazos. La validación de la propuesta se realizó mediante el pre- experimento. Se pudo constatar que el procedimiento didáctico elaborado contribuye a la formación del concepto función lineal a pedazos en los estudiantes de décimo grado.

ÍNDICE

INTRODUCCION

Hoy día nuestro pueblo está inmerso en una inmensa batalla ideológica, política y económica, para preservar su independencia y soberanía y contribuir con su aporte a salvar el mundo de los peligros que lo acechan en todos los órdenes.

En el logro de este objetivo, el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática juega un papel importante, pues esta asignatura tiene potencialidades para dotar al alumno, desde que éste se enfrenta por primera vez a la escuela, de las capacidades, los hábitos y las habilidades necesarias para lograr un pensamiento creador.

El proceso de formación de conceptos matemáticos en los escolares, ha constituido a lo largo de la historia un proceso complejo, lo que ha estado en plena correspondencia con la naturaleza de los propios conceptos. Por ejemplo, uno de los conceptos de mayor trascendencia en la Matemática es el de función, cuya definición se elabora con la participación del alumno en el noveno grado de la Secundaria Básica cubana, sin embargo, por su naturaleza abstracta, la enseñanza de este concepto ha llamado la atención de muchos investigadores en el mundo.

El desarrollo del proceso de formación de conceptos ha enfrentado una etapa de renovación de enfoques, muy vinculados a las exigencias de las transformaciones realizadas en la enseñanza media, que han estado dirigidas en lo esencial al cambio en los métodos y estilos de trabajo**.** Uno de estos cambios es: “Plantear el estudio de los nuevos contenidos matemáticos en función de resolver nuevas clases de problemas y no considerar la resolución de problemas exclusivamente como un medio para fijar contenidos “. (MINED, 2006, p. 10).

Uno de los fines que persigue estas nuevas ideas es que los alumnos puedan aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones de la vida real y mostrar la utilidad y el carácter instrumental de los conocimientos matemáticos.

Para lograr lo anteriormente planteado, entre otras cosas, es necesario que se incluyan en los contenidos de la matemática escolar problemas relevantes, que contribuyan a la educación ideo política, jurídica, laboral y económica, para la salud y la sexualidad, estética y ambiental de los alumnos, preferentemente vinculados a su entorno natural y social, en una dialéctica entre las formas de trabajo y pensamiento disciplinar e interdisciplinar, problémico y no problémico. (MINED, 2006).

En Cuba, la preparación para el estudio del concepto de función comienza desde el preescolar, es decir es aquí donde comienza la primera fase para la elaboración del mismo. En este grado el niño se familiariza con rudimentos de la teoría de conjuntos. Comienza a agrupar objetos que tienen una característica en común, ya sea el color, la forma, etc. Establece relaciones sencillas entre elementos de un conjunto, relaciones de pertenencia de elementos a conjuntos y aprende a reconocer leyes sencillas para la formación de conjuntos.

A medida que avanza en los primeros grados, se familiariza más con la teoría de conjuntos y las relaciones entre ellos.

Cuando conocen los números naturales comienzan a asignarle números a objetos, se familiarizan con el valor cardinal y ordinal, y aprenden a asociarlos con conjuntos. Más tarde aprenden las operaciones básicas de cálculo, trabajan con ecuaciones y profundizan en el trabajo con las correspondencias.

Esta fase continúa en la Secundaria Básica hasta que se comienza a tratar el concepto función de forma explícita dentro de la clase, en el noveno grado.

Es decir, que la primera fase del proceso de elaboración del concepto función comienza mucho antes de su tratamiento en el noveno grado, caracterizadas por consideraciones y ejercicios preparatorios, pues se ha trabajado conscientemente de forma implícita durante toda la enseñanza primaria, hasta la enseñanza media. Por ello, se considera que la primera fase de la elaboración de este concepto cumple con las exigencias necesarias que ella requiere en el proceso.

Es precisamente en la enseñanza media donde comienza la segunda fase, la formación del concepto. Esta fase del proceso va dirigida a la motivación y la orientación hacia el objetivo, y que pasa por la separación de las características comunes y no comunes hasta llegar a la definición. Se continúa luego con la tercera fase de la formación del concepto que es la fijación. A esta etapa corresponden las profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones.

En los programas actuales de la asignatura Matemática para el nivel medio, las funciones lineales se siguen estudiando en Secundaria Básica, de manera que su formación se realiza en el noveno grado. Los profesores disponen para trabajar de los mismos textos del plan anterior, de nuevas orientaciones metodológicas y de un conjunto de video clases, grabadas bajo la dirección del Ministerio de Educación y consideradas como el modelo a seguir por los docentes. En el preuniversitario se retoman estas funciones, teniendo en cuenta para su estudio las mismas concepciones de la Secundaria Básica, siendo este el momento que la autora propone para la formación del concepto función lineal a pedazos.

> *"La idea metodológica fundamental que acompaña las concepciones de los nuevos programas de Matemática para la Secundaria Básica, la cual tiene su continuidad en el preuniversitario, consiste en "la formulación y resolución de problemas vinculados con la vida relacionados con el desarrollo político, económico y social del país y del mundo, así como con fenómenos y procesos científicos y ambientales a partir de la recopilación y análisis de datos estadísticos" (MINED, 2001, p.1).*

Muchos fenómenos de la vida, ya sean de carácter natural o social, se pueden representar a través de funciones lineales a pedazos. Su representación gráfica nos ayuda a interpretar y hacer estudios de tales fenómenos, y arribar a conclusiones sobre su comportamiento.

En el programa de Matemática 10. Grado se plantea entre los objetivos generales de la asignatura:

Representar situaciones de la vida práctica, la ciencia o la técnica mediante modelos analíticos y gráficos, aplicando para ello los conceptos, relaciones y procedimientos relativos a las funciones lineales (MINED, 2006, P.10).

A partir de la experiencia de la autora como docente de la asignatura durante varios cursos, de las visitas a clases, de la revisión de los programas y orientaciones metodológicas de 9. y 10. grado, de la aplicación de una encuesta (anexo 1), de una entrevista a profesores de preuniversitario (anexo 2) y la aplicación de un diagnóstico inicial para alumnos de décimo grado del IPUEC Serafín Sánchez Valdivia (anexo 3), se pudo constatar que:

1 Los alumnos resuelven problemas donde el modelo matemático es una función lineal a pedazos, pero no son capaces de identificarlas.

2 En los programas y orientaciones metodológicas vigentes para la enseñanza media no existen sugerencias metodológicas para la formación y desarrollo del concepto función lineal a pedazos.

3 Los profesores no tiene a su alcance bibliografía para el estudio y profundización de las funciones lineales a pedazos.

Por todo lo expuesto se presenta el siguiente **problema científico**:

¿Cómo contribuir a la formación del concepto de función lineal a pedazos en el proceso de enseñaza-aprendizaje de las funciones numéricas en alumnos de décimo grado?

Se enmarca el **objeto** de investigación en el proceso de enseñaza-aprendizaje de las funciones numéricas en alumnos de décimo grado.

Campo de acción: Formación del concepto función lineal a pedazos.

En correspondencia con el problema, objeto, campo y tema de investigación, se propone cumplir el siguiente ***objetivo de investigación****:*

Elaborar un procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal a pedazos en alumnos de décimo grado.

Para ello se pretende dar respuesta a las siguientes ***preguntas científicas****:*

1. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan la formación de conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones numéricas?
2. ¿Cuál es el estado actual del dominio del concepto función lineal en alumnos que ingresan al décimo grado?
3. ¿Qué procedimiento didáctico proponer para la formación del concepto

función lineal a pedazos en los alumnos de décimo grado?

4. ¿Qué efectos se alcanzan con la implementación de un procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal a pedazos?

Para dar respuestas a estas preguntas científicas y de esta forma lograr el objetivo trazado, se propusieron las siguientes **t*areas***:

1. Caracterización de los fundamentos teóricos que sustentan la formación de conceptos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las funciones numéricas.
2. Caracterización del estado actual del dominio del concepto función lineal en alumnos que ingresan al décimo grado.

3. Elaboración de un procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal a pedazos en los alumnos de décimo grado.
4. Implementación del procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal a pedazos en los alumnos de décimo grado.
5. Evaluación del procedimiento elaborado a partir de su implementación en la práctica pedagógica.

Población: 168 alumnos de décimo grado del IPUEC Serafín Sánchez Valdivia

Muestra: 29 alumnos del grupo décimo 1

Variable independiente: Procedimiento didáctico.

Variable dependiente: nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto función lineal a pedazos.

Procedimiento: "un procedimiento es un conjunto de acciones ordenadas, dirigidas a la consecución de una meta" (Del Carmen, 1999, p.111).

Didáctica tiene por objeto de estudio el proceso docente – educativo, o sea, el proceso educativo escolar que del modo más sistémico se dirige a la formación social de las nuevas generaciones y en él, el alumno se instruye, capacita y educa, es decir, forma sus conocimientos, su pensamiento y sus sentimientos.

(Álvarez de Zayas, 1998, p.8)

Formación de conceptos: La formación se produce cuando:

- Se ha determinado un sistema esencial de propiedades, llamado **contenido**.
- Los objetos que tienen esas propiedades se han agrupado en una clase, llamada **extensión**.
- Se ha asignado un **nombre** al concepto (Mederos, 2002, p.2).

Operacionalización de la variable dependiente

Dimensión	Indicadores
Cognitiva	Identificar el concepto y argumentar.
	Ejemplificar el concepto y argumentar.
	Plantea problemas relacionados con el

	concepto.
Motivacional	Interés por conocer el concepto
	Estado de ánimo mientras se estudia el concepto.
	Interés por resolver ejercicios relacionados con el concepto.

Métodos:

En el proceso de investigación se aplicaron, a partir de la concepción dialéctico materialista, los siguientes métodos del nivel teórico:

Histórico-lógico*:* Para analizar la evolución histórica de la formación del concepto función lineal a pedazos, así como la situación actual tanto nacional como internacional al determinar sus irregularidades, además para analizar las diferentes etapas por las que ha transitado.

Enfoque Sistémico: En el esclarecimiento de las relaciones de los métodos, técnicas e instrumentos desde la posición teórica que se asume para favorecer el proceso de formación del concepto función lineal a pedazos.

Analítico-sintético: El análisis permitió estudiar los diferentes factores que influyen en el proceso de enseñaza – aprendizaje de la Matemática, con énfasis en el estudio de la función lineal y los modelos que pueden establecerse, y mediante la síntesis se buscaron relaciones entre estos elementos y los problemas que pueden ser resueltos por los alumnos en este nivel.

Modelación: en la elaboración de las situaciones problemas, las cuales constituyen modelos.

Del nivel empírico se aplicaron:

La encuesta: para buscar hechos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto.

Entrevista: Para acopiar información acerca del proceso de formación del concepto función lineal a pedazos.

Prueba pedagógica: Se aplicó una prueba de entrada para conocer el nivel alcanzado en la formación del concepto función lineal por los alumnos de décimo grado del IPUEC:"Serafín Sánchez Valdivia" y una prueba de salida después de la implementación del procedimiento didáctico propuesto, para comprobar su efectividad en estos mismos alumnos.

Experimento pedagógico: permitió verificar en la práctica la factibilidad del procedimiento didáctico, con alumnos de 10. grado del IPUEC:"Serafín Sánchez Valdivia".

Del nivel estadístico- matemático se utilizaron los correspondientes a la Estadística Descriptiva tales como **tablas de frecuencias y gráficos** para realizar el procesamiento de la información recolectada con los instrumentos asociados a los distintos métodos.

La significación práctica de la investigación se refleja en el enriquecimiento que se hace a la metodología de la Enseñanza de la Matemática, al proporcionar un procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal a pedazos en el nivel medio.

La novedad científica de la tesis está dada por la forma en que se utiliza la modelación matemática para la formación del concepto función lineal a pedazos en los alumnos de décimo grado.

La tesis está conformada por una introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. En el capítulo I se realiza una caracterización de la formación del concepto función en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, se recogen los fundamentos teóricos esenciales relacionados con la formación de conceptos a partir del planteamiento y resolución de problemas, así como el estado actual del problema en el IPUEC Serafín Sánchez Valdivia del municipio Taguasco.

En el capítulo II se propone un procedimiento didáctico dirigido a la formación del concepto función lineal a pedazos en los escolares de la enseñanza media, teniendo como base los fundamentos teóricos a los cuales se hizo referencia en el primer capítulo. También se dan algunas recomendaciones para utilizar el procedimiento didáctico propuesto y por último, se exponen los resultados de la introducción en la práctica pedagógica del procedimiento didáctico, para la formación del concepto función lineal a pedazos.

Capítulo I: La formación de conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje

1.1 Caracterización de los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan la formación de conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. de la Matemática

El concepto es una forma del pensamiento abstracto, y este a su vez, es forma del reflejo mediato y generalizado de la realidad. A través de los órganos de los sentidos se conocen los objetos concretos y sus propiedades; éstas se reflejan mediante las formas del conocimiento sensitivo: sensaciones, percepciones y nociones (Talízina, 1988, p.150).

"Por concepto se entiende el reflejo de una clase de individuos, procesos o relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características invariantes" (Jungk, 1979, p. 58).

Guétmanova (1989, p.58) define concepto como la forma del pensamiento que refleja los indicios sustanciales de una clase de objetos homogéneos o de un objeto. Son sustanciales los indicios que, tomados por separado, son imprescindibles y todos juntos son suficientes para distinguir el concepto dado de los demás. En el lenguaje los conceptos se expresan como palabras o combinaciones de palabras. Son modos lógicos básicos de formación de conceptos el análisis, la síntesis, la comparación, la abstracción y la generalización. El contenido y el volumen son importantísimas características del concepto. Por contenido del concepto se entiende el conjunto de los indicios sustanciales de una clase de objetos homogéneos o de un objeto reflejados por el mismo. Se llama volumen del concepto el conjunto (clase) de los objetos generalizados en él.

En esencia, se puede decir, que el concepto es la abstracción de los indicios insustanciales de los objetos o clases de objetos y el reflejo de aquellas características que lo hacen ser el objeto propiamente dicho o de las propiedades que lo hacen pertenecer a la clase dada.

Vigotski (1981, p.70-71) señala que "... un concepto surge y se forma en el curso de una operación compleja dirigida hacia la solución de algún problema" y que el "memorizar las palabras y conectarlas con objetos, no conduce en sí mismo a la formación del concepto; para que el proceso se ponga en marcha debe surgir un problema que no pueda solucionarse más que a través de la formación de nuevos conceptos."

Entre las acciones que deben formarse en el proceso de formación de los conceptos, Talízina (1988) resalta tres que se destacan: elección del sistema de características necesarias y suficientes para reconocer al objeto, la inclusión en el concepto y la deducción de las consecuencias. Esta psicóloga reconoce que en la formación de los conceptos la habilidad rectora es la de inclusión.

Desde esta perspectiva, el punto de partida para la formación de nuevos conceptos en el desarrollo psíquico de las personas, es la necesidad de resolver un problema y de comunicarse con otros en el transcurso del proceso de su resolución o después de finalizado el mismo.

Todo concepto debe estar relacionado con un determinado sistema de acciones, al margen de las acciones el concepto no puede ser asimilado ni aplicado posteriormente a la resolución de problemas. (Talízina ,1988).

Sobre la importancia de los conceptos en la actividad cognoscitiva de las personas y en la comunicación, no existe objeción en ninguna de las ciencias que estudian los problemas relacionados con el conocimiento o el aprendizaje. En este sentido Vigotski (1989, p.66), ha señalado que “toda formación de un concepto es el acto más específico, más completo, más indudable del pensamiento”.

El significado de las palabras ha sido objeto de estudio de la psicología, constituye el concepto central, a tal punto de que ha sido utilizado como unidad indivisible para el estudio del pensamiento y el lenguaje (Vigotski, 1981, p. 20).

En la obra psicológica de Vigotski, se esbozó una nueva concepción para el estudio de los significados, en este contexto, Vigotski (1989a, p. 166) ha planteado que “el significado es el rasgo indispensable, constituyente de la palabra. Es la propia palabra, examinada en el aspecto interno… Pero el significado de la palabra en el aspecto psicológico (…) no es otra cosa que la generalización o el concepto. La generalización y el significado de la palabra son sinónimos”.

El nombre del concepto, como palabra articulada, además de designar una generalización, que es una forma del pensamiento, también constituye un sonido donde este pensamiento se realiza (Vigotski, 1989, p.170). Generalmente la relación de una palabra con su significado en el lenguaje externo se establece mediante un verbo copulativo en oraciones como “un reloj es una máquina que señala la hora”, las cuales son muy comunes en los diccionarios y en cuyo predicado gramatical se utilizan los rasgos del sistema esencial surgido en la formación del concepto que designa la palabra.

Según esta concepción, cuando se le asigna un nombre a un concepto, se establece un significado para la palabra utilizada, el cual coincide con la generalización que se construye en el proceso de formación del concepto. Pero si la palabra empleada, existía antes de formado el concepto, se le atribuye a la misma un nuevo significado que, de hecho, se conecta con el proceso de resolución del problema que condujo a la formación del concepto.

Lo anteriormente señalado, indica que el significado de una palabra no es único y estático, sino que cambia a medida que las personas se desarrollan y se forman nuevos conceptos. Por eso, más que el estudio de un significado fijo para una palabra, interesa el análisis de la dinámica de sus significados a la par de la ocurrencia del desarrollo cultural.

Las Matemáticas están compuestas por una serie de conceptos abstractos a los que han contribuido sucesivas generaciones de Matemáticos con nuevos conceptos obtenidos a partir de los anteriores, por lo que nuestros alumnos deben procesar todos los conceptos de las matemáticas ya existentes, lo que hace dependiente de otros profesores, por lo que para poder comunicar adecuadamente los conceptos hemos de tener en cuenta:

a) Los conceptos de orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos.

b) Puesto que para la adquisición de nuevos conceptos se necesita apoyarse en otros anteriores en necesario asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende.

Un concepto sólo puede ser asimilado, si los objetos o fenómenos que lo representan son “manipulados” por el alumno en el proceso de formación del concepto. Por tanto, para la organización del proceso de formación y desarrollo de los conceptos, se deben considerar, como premisas fundamentales, las acciones que deben realizar los alumnos con el objeto de asimilación.

Desde el punto de vista de la psicología, según Vigotski(1989) la evolución de los procesos de los cuales resulta eventualmente la formación de conceptos, comienza en la primera infancia, pero las funciones intelectuales que en una combinación específica forman la base psicológica del proceso de formación de concepto maduran, toma forma y se desarrolla solo en la pubertad. Él considera que el ascenso hasta la formación del concepto se efectúa a través de tres fases básicas:

La primera fase es cuando colocan juntos un número de objetos en cúmulos inorganizados o en un"montón" para poder resolver un problema.

La segunda fase se denomina pensamiento en complejo, esta es la fase fundamental en el camino hacia la formación de concepto. En un complejo, los objetos individuales se unen en la mente infantil a través de vínculos que existen realmente entre esos objetos.

La tercera fase es la de abstraer, separar los elementos y considerarlos aparte de la totalidad de la experiencia concreta en la cual están encajados.

En todo proceso de aprendizaje juega el lenguaje un papel importante, la redacción entre el concepto, su nombre y su definición, puede presentarse desigualmente en situaciones diferentes.

La asignatura Matemática, en cualquier grado de enseñanza escolar, debido a su innegable complejidad, desarrollo, y elevado nivel de abstracción que exige de quienes la estudian, ha constituido una de las materias más fuertes a la hora de comprenderla.

A partir de esta certidumbre, se considera loable cualquier intención creativa que pudiera ayudar a la comprensión de algunos de los disímiles conceptos que con mayor asiduidad aparecen en ella.

Mederos (2000, p.2) considera que un **concepto se ha formado** cuando, al menos, se ha determinado un conjunto de rasgos esenciales que caracterizan en ese sentido a los objetos analizados y a otros posibles, y se agrupan en otra clase los modelos de los objetos analizados, así como los modelos de otros posibles objetos.

En conexión con los procesos de comparación, de análisis y abstracción; en la formación de los conceptos, actúa un proceso de síntesis que contribuye a la constitución de una clase de rasgos esenciales que sirve de criterio para modelar los objetos particulares que se comparan y analizan, en una clase de objetos abstractos; y para determinar si nuevos objetos pueden modelarse atendiendo a esa clase de rasgos esenciales en la referida clase de objeto abstractos (Mederos, 2000, p. 2). A esta clase de rasgos esenciales, muchos autores la llaman **contenido del concepto.**

El proceso que consiste en agrupar los objetos particulares mediante sus modelos abstractos en una clase particular, que se caracteriza por satisfacer los rasgos esenciales sintetizados en una clase de rasgos, es lo que se denomina proceso de generalización (Mederos, 2000, p.2).

La clase de rasgos esenciales actúa con cualidad de sistema al no poderse considerar los elementos que la componen desconectados entre sí, sino relacionados con una conjunción. De manera que los objetos de la clase inicial los satisfacen simultáneamente y para que nuevos objetos pertenezcan a la generalización de la clase inicial (**extensión del concepto**), deben poseer cada uno los rasgos esenciales.

Es importante señalar que los procesos que conducen a la formación de un concepto, se activan en la “contemplación viva y directa” de los objetos particulares que forman una clase inicial o de sus representaciones. Tales procesos propician, finalmente, una generalización de ésta, en el sentido de que se construye una clase de rasgos esenciales, que determinan una nueva clase de objetos, llamada extensión o volumen del concepto, la cual contiene a los objetos iniciales, pero que es generalmente más amplia que la clase de partida.

La clase que se obtiene como resultado del proceso de formación de un concepto, se designa con una palabra- el nombre del concepto- la cual se introduce por primera vez o se elige a partir de las palabras que existían en el lenguaje antes de que el concepto se formara. De esta manera entre el concepto formado y su nombre se establece una relación que se puede explicar utilizando las teorías del significado.

Villegas (2004, p.212) reconoce tres fases o procesos parciales en la formación de conceptos, en las diferentes asignaturas de las ciencias:

- Trabajo propedéutico.
- Formación de concepto.
- Fijación del concepto.

Ballester (1992, p. 291) considera tres fases para el proceso total de elaboración de conceptos:

- La primera fase está caracterizada por consideraciones y ejercicios preparatorios.
- La segunda fase consiste en la formación del concepto.
- La tercera fase consiste en la asimilación del concepto.

En la tesis se trabajará con la segunda etapa, la cual se entiende por la parte del proceso que conduce desde la creación del nivel de partida, la motivación y la orientación hacia el objetivo, y que pasa por la separación de las características comunes y no comunes, hasta llegar a la definición o a la explicación del concepto.

El punto esencial de la formación de conceptos desde el punto de vista metodológico, está en reconocer y buscar un sistema de características necesarias y suficientes, del reconocimiento de las características depende la asimilación correcta del concepto.

Ballester considera dos vías principales por los cuales se puede conducir a los alumnos a nuevos conceptos:

Vía inductiva: Conduce de lo particular a lo general.

Vía deductiva: conduce de lo general a lo particular. (Ballester, 1992, p. 292).

1.2 La modelación en la formación de conceptos matemáticos

Los enfoques metodológicos que durante los últimos años se han ido perfilando en la enseñanza–aprendizaje de la asignatura Matemática ha llevado a realizar cambios profundos en la forma en que se desarrolla el proceso docente –educativo en todos los tipos de enseñanza.

La presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y solución de problemas del medio natural y social en que se desenvuelve el alumno, del que conoce cierta información y descubre interrogantes no resueltas, que necesita explicar o responder, debe conducir a la utilización de modelos matemáticos para resolverlos.

La construcción de modelos se inicia desde los primeros grados de la enseñanza, comenzando por los modelos lineales, ya que son los que están asociados a las relaciones de orden y al significado de las operaciones que se van introduciendo desde el primer grado. Al principio no se enseñan asociados a los problemas, sino a las operaciones de cálculo.

De primer a cuarto grado son de gran utilidad el uso de distintos tipos de modelos. Los modelos lineales se emplean frecuentemente para el trabajo con los ejercicios básicos y los ramificados se usan para el estudio de la multiplicación. Los tabulares se desarrollan con el uso de tablas de doble entrada para la organización de la información, principalmente en la ejercitación de las operaciones básicas.

En quinto y sexto grado se continúan utilizando los modelos lineales, ramificados y tabulares y se comienzan a emplear los modelos conjuntista al estudiar las reglas de divisibilidad. En sexto grado los alumnos se enfrentan por vez primera a problemas donde para resolverlos deben utilizar como modelo matemático una ecuación de primer grado.

En el programa para las Secundaria Básica se plantea que constituyen transformaciones en el enfoque metodológico:

> *“La presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos de carácter político-*

ideológico, económico-laboral y científico-ambiental, y no solo desde la propia lógica de la asignatura" (MINED, 2000, p.8).

Para cumplir estas orientaciones los alumnos deben:

- Modelar fenómenos y relaciones del mundo; bien con números que representan datos simples (cantidades de personas, de objetos contables, etc.) o con números que representan relaciones (partes de un todo, tanto por ciento, etc.)
- Utilizar modelos, donde el modelo matemático para resolver los problemas se circunscribe al procesamiento aritmético con números racionales, las ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de dos ecuaciones con dos variables y modelos geométricos que emplean las relaciones de posición y magnitudes en figuras planas y cuerpos geométricos.

En la Adecuación de los Programas de la Asignatura Matemática para el preuniversitario MINED (2001) se hace referencia a que el tratamiento de los contenidos se debe realizar a partir del planteamiento y resolución de problemas.

En el preuniversitario *s*e estudian problemas que se modelan mediante las operaciones con números naturales, fraccionarios y racionales, las ecuaciones lineales y cuadráticas, los sistemas lineales y cuadráticos, la proporcionalidad directa e inversa, etc.

En este nivel se resuelven ejercicios y problemas donde se emplean modelos geométricos al estudiar las relaciones de igualdad y semejanza entre figuras geométricas, la trigonometría y la Geometría Analítica.

También se emplean modelos geométricos para la resolución de problemas de cálculo y problemas de demostración, y en el esbozo de figuras y cuerpos geométricos.

La resolución de problemas es un tema que se encuentra en el centro del debate en el campo de la Educación Matemática. Podría decirse que todos los currículos que hoy se modifican en el mundo tienen como objetivo incorporar centralmente este aspecto en el aprendizaje de las matemáticas.

Al estudiar matemática es necesario, no solamente, que el alumno aprenda contenidos matemáticos, reglas y fórmulas; si no que también desarrolle habilidades y estrategias que le permitan aplicar y encontrarle sentido en su vida a las ideas matemáticas. Es importante que los alumnos propongan y analicen conjeturas, modelen matemáticamente diferentes situaciones prácticas y planteen, ajusten y resuelvan diversos tipos de problemas

La modelación matemática y la resolución de problemas están ligados al surgimiento de la matemática; sin embargo, la modelación matemática puede considerarse un elemento importante de los métodos modernos de aprendizaje, tan modernos que todavía no han terminado de crearse todos los procedimientos para el buen desarrollo de habilidades de modelación en los alumnos.

Asumiremos el concepto de modelo matemático dado por Mederos (2005, p.2), por la importancia que les conferimos a ella.

Modelo: Un modelo es un sistema (colección de objetos y relaciones) que se ha logrado mediante, entre otras, una de las variantes siguientes:

- **Se ha obtenido mentalmente.**
- **Se ha realizado en forma material.**
- **Se ha expresado verbalmente, visualmente o simbólicamente.**
- **Se ha descrito mediante las leyes y principios de una ciencia.**

Es importante tener en cuenta que en el modelo matemático; las magnitudes del sistema o medio que se estudia se modelan mediante variables matemáticas. Muchas de las relaciones entre esas magnitudes tienen un carácter funcional, por tanto, se modelan mediante funciones.

La esencia de cualquier modelo como concepto es su función de representar en un determinado grado a un objeto, de manera que el estudio del modelo permite la construcción de conocimientos sobre el objeto.

En esta investigación se asume el criterio de Mederos, que considera la modelación como un medio para la formación de conceptos matemáticos, utilizando la representación analítica en la forma y = m x + n, donde m y n son símbolos para parámetros, que en cada caso particular tomarán valores fijos, y los signos x, y, representan, respectivamente, las variables independiente y dependiente, definidas sobre un conjunto de números reales.

A través de la modelación matemática se resuelven problemas reales, entendibles, de manera que el alumno se motive por su solución, despertando el interés por el estudio de esta ciencia.

La modelación es el proceso de construcción de modelos de objetos, en áreas del conocimiento humano, con el objetivo de aplicar las leyes y resultados de estas áreas a la determinación de información de modelos para transferirla a los objetos que se estudian y comprobar si es valedera. (Mederos, 2005, p. 3)

Para Mederos (2005, p. 10-13) la modelación matemática transita por cuatro etapas:

- Investigación de objetos.
- Construcción del modelo conceptual.
- Estudio del modelo conceptual.
- Transferencia de resultados abstractos.

1.3 Consideraciones sobre el estudio del concepto función

El concepto de función está implícito en las matemáticas desde las primeras civilizaciones y ello puede inferirse del estudio de las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que datan del año 1900 a.n.e. Se tiene la certeza de su origen práctico y su vinculación a las necesidades del hombre; pues tal como la numeración surge ante las necesidades creadas por el intercambio, los descubrimientos geométricos son impulsados por las construcciones y las divisiones de los terrenos, las funciones surgen a partir de la relación entre cantidades que varían, una en dependencia de otras.

Se puede encontrar una noción vaga de este concepto bajo la forma de tablas de correspondencias que provienen de la observación de fenómenos naturales, ya que la idea de función está ligada históricamente a la percepción de correlaciones entre los fenómenos de la naturaleza, así la primera noción de función se encuentra en las tablillas astronómicas del período seleucida. Sobre estas tablillas, existen relaciones aritméticas que provienen de la observación de fenómenos análogos, por ejemplo los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular del mismo al Sol.

En el concepto función se distinguen dos aspectos: la función como correspondencia y como expresión analítica. La dependencia funcional fue apreciada por el hombre de forma intuitiva, desde épocas remotas, en la relación causal de los fenómenos. Muchos matemáticos trataron de expresar esta dependencia.

La aceptación intuitiva de la dependencia funcional como manifestación de una relación de causa y efecto en un fenómeno, en diferentes situaciones, ha sido natural desde los tiempos remotos. Una larga historia poseen los intentos de expresar esta dependencia funcional entre cantidades variables a través de la matemática.

Cuando se estudia la evolución histórica del concepto función Ribnikov (1987), se pueden determinar los principales problemas por los cuales atravesó el concepto función a lo largo del desarrollo de la Matemática y conocer los orígenes de las creencias que se pusieron de manifiesto y que por su carácter son ontológicas (Aguilar ,2001).

Los principales problemas se pueden resumir de esta manera:

- Se prestó mayor atención al aspecto de la función como expresión analítica que al de función como correspondencia de forma más general.
- La idea de función como expresión analítica era dominante.
- Se consideraba que todas las funciones eran expresables analíticamente.

Estos problemas, sin lugar a dudas, han influido notablemente en el tratamiento metodológico que se ha dado en la escuela a la formación de este concepto, provocando que los alumnos manifiesten la creencia de identificar el concepto con alguna expresión analítica.

Aunque el concepto función se trata de forma explícita en la Secundaria Básica, la enseñanza primaria juega un importante papel en el proceso de elaboración de este concepto, ya que en ella se establece de forma intuitiva las primeras ideas sobre conjuntos y correspondencias, conceptos necesarios para definir el primero. Por ello, se considera que el currículo de Matemática de la enseñanza primaria cubana se adapta al pensamiento natural del hombre desde su infancia, cosa que favorece la asimilación del concepto función.

El alumno se enfrenta por primera vez a la definición del concepto función en la Secundaria Básica. No obstante, la atención prestada al proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto función en esta enseñanza no ha sido la misma con el paso de los diferentes planes de estudio.

Aspectos didácticos a tener en cuenta en el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto función, son las exigencias didácticas para dirigir un proceso de enseñanza–aprendizaje desarrollador y educativo, a las cuales se hace referencia en el documento del Seminario Nacional para el Personal Docente, editado por el (MINED ,2001,p. 2). Estas exigencias son:

1. **Diagnóstico integral de la preparación del alumno para las exigencias del proceso de enseñanza–aprendizaje, nivel de logros y potencialidades en el contenido de aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo.**
2. **Concebir un sistema de actividades para la búsqueda y exploración del conocimiento por el alumno desde posiciones reflexivas y con independencia en el escolar.**
3. **Diseñar las formas de participación activa del alumno, en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad.**
4. **Concebir un sistema de actividades que desarrollen en las alumnas y alumnos procesos de análisis, síntesis, comparación, abstracción y generalización, que posibiliten la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento.**
5. **Desarrollar formas de actividad y de comunicación colectivas, que favorezcan la interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de aprendizaje.**
6. **Vincular el contenido de aprendizaje con la práctica social y estimular la valoración por el alumno en el plano educativo.**

Sin dudas, la vinculación de la enseñanza con el entorno escolar, familiar y social del alumno posibilita una motivación eficiente. “El profesor debe convertir su aula en una micro–sociedad, donde se analice todo el acontecer social y aplicar la matemática para resolver esos problemas" (Palacio, 2001, p.23).

1.4 Estudio del concepto función lineal en la escuela cubana

Tomando los criterios Cala(2002), en la década del 60 se hacían grandes esfuerzos en Cuba por brindarle al maestro orientaciones metodológicas para el desarrollo del Programa de Matemática de la Secundaria Básica, e incluso, con recomendaciones generales que dejaban clara la intención de poner al alumno en el centro del proceso de enseñanza–aprendizaje. También se dan las orientaciones metodológicas correspondientes por unidades. Sin embargo, a pesar de que las funciones estaban incluidas en la unidad "Ecuaciones Literales. Fórmulas. Funciones y sus gráficos", correspondiente al Álgebra de tercer año, no aparecían para esta unidad, las recomendaciones correspondientes. Se desconoce, por no haberlo encontrado, si existe algún otro documento donde se recogen estas orientaciones.

El estudio investigativo realizado hasta el momento permitió determinar que en la Matemática de la Secundaria Básica, hasta aproximadamente finales de la década del 60, no se trataba con rigurosidad el concepto de función dentro del proceso de enseñanza–aprendizaje de esta asignatura.

A partir de este momento se produce una transformación en el enfoque de la Matemática en el país, y ello constituyó un factor decisivo a favor de un mejor tratamiento del concepto de función en el nivel de Secundaria Básica. Esto fue comprobado en la revisión de algunos textos de esta etapa, donde aparecían los contenidos correspondientes a funciones de manera más explícita y con un grado de profundidad mayor. La definición de función, aunque mantenía su esencia, variaba de unos autores a otros. Por ejemplo, encontramos algunas como las siguientes:

- **Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que a cada valor de una de ellas corresponde uno o más valores de la otra, se**

dice que la segunda variable depende o que es función de la primera (González ,1967).

- **Una función de A en B es una relación binaria "R" en AxB tal que:**
    1. **el dominio de R es A,**
    2. **cada elemento de A es primera coordenada de sólo un par ordenado en R" (Mc Fadden ,1969).**
- **Si con cada elemento de un conjunto A está de algún modo asociado exactamente otro elemento de un conjunto B, entonces esta asociación es una función de A en B" (Mc Fadden, 1969).**
- **"Una función es un conjunto de pares ordenados en los que no se repite nunca la misma primera coordenada" (Mc Fadden ,1969).**

En la Separata 1 de noveno grado, editada por el MINED en 1970, aparece que:

- **"Una relación binaria de X en Y es una función si y sólo si, a todo elemento x Є X, corresponde un sólo o ningún elemento y Є Y" (MINED, 1970c).**

Esta última definición no tiene en cuenta el concepto de correspondencia, además, en la forma que está redactada, pueden quedar elementos en el conjunto de partida "X" sin asociar, e incluso, la alternativa que aparece en la definición da la posibilidad que ningún elemento del conjunto "X" esté asociado con elemento alguno del conjunto "Y".

Se diferenció el concepto de "función" del concepto de "aplicación". Se consideraba el concepto de aplicación subordinado al de función, o sea la aplicación como una función con dominio pleno. En esta Separata aparece que "Una relación binaria del conjunto X en el conjunto Y es una aplicación sí y sólo sí a todo elemento x $\in$ X corresponde un elemento único y $\in$ Y" (MINED, 1970c).

Los conceptos de función y de aplicación estaban subordinados al concepto de “relación binaria”, el cual se definía a través de pares ordenados.

En muchas ocasiones se hacía referencia a funciones representadas a través de una relación escrita en forma tabular, en otras se utilizaban indistintamente los términos de aplicación y de función para designar una misma forma de representación, lo cual el autor considera que resultaba muy engorroso para ser comprendido por los alumnos. Téngase en cuenta que estos tres conceptos son comparables, compatibles y que están en la relación de subordinantes y subordinados. Además, el lenguaje y la simbología utilizada se complican mucho más.

Otro libro editado en esa etapa es “Conjuntos, relaciones y funciones” de Myra Mc Fadden (1969), en el cual se trataban tópicos de Matemática Moderna mediante el uso de una tecnología educativa que en esta época alcanzó un rápido desarrollo, la Enseñanza Programada, la cual encontraba su principal sustento teórico en las tendencias conductistas y neoconductistas (Gil y Guzmán,1993).

El material presentado en el libro está en forma de un programa que podía ser enfrentado de forma autodidacta. El contenido del texto se presenta a través de “cuadros”, comenzando por los conjuntos, pasando por las relaciones hasta llegar a las funciones. Esta estructura brindaba al lector la posibilidad de aprender, siempre que fuera capaz de estudiar y responder, generalmente, de forma repetitiva, cada uno de los cuadros.

En el libro de Mc Fadden, aunque una definición de función se da a partir del concepto de relación binaria, también se dan otras definiciones (ver definiciones citadas anteriormente), lo que sin lugar a dudas, favorece la mejor comprensión del concepto. Además, a diferencia de la Separata antes analizada, no se hace distinción entre el concepto de aplicación y el de función, pues se consideran a las funciones con dominio pleno.

No obstante, la terminología y el lenguaje utilizados, aunque en mucho menor grado, todavía resultaban engorrosos para los alumnos del nivel medio.

A pesar de las críticas que se han realizado, se reconoce la atención brindada en este primer intento de profundizar en el trabajo con las funciones, pues se trabajó con la confección de tablas, diagramas, diferentes formas de representación, se analizaron algunas propiedades de las funciones como la inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, la monotonía, los ceros, la composición de funciones, el cálculo de valores funcionales, etc.

El perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación (1975–1980), devino en momento propicio para la introducción de nuevos Programas de Matemática (MINED ,1979 a, b, c, d, e, f, g, h, i), los cuales se caracterizaban por:

- **ser una adaptación de la enseñanza media alemana (RDA).**
- **una mejor estructuración del sistema de conocimiento.**
- **una elevación significativa del contenido.**
- **estar sustentado sobre la base de sólidos fundamentos científicos–didácticos.**

Con este nuevo Plan de estudio, se daban al profesor, además de las recomendaciones por unidades, aclaraciones generales sobre la enseñanza de la Matemática en cada uno de los grados, específicamente, algunos problemas del contenido de la formación matemática que se debían proporcionar en cada uno de ellos y sobre algunos problemas de la Didáctica y de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

Los contenidos sobre las funciones se atendían en la Unidad Nro. 5. “Funciones Afines”.

En el libro de texto de Matemática de octavo grado, aparece la siguiente definición: “Un conjunto de pares ordenados (x;y), con x$\in$ X e y $\in$ Y se

llama función o aplicación de X en Y si a cada elemento x $\in$ X le corresponde exactamente un elemento y $\in$ Y" (MINED, 1979 b).

Como se puede observar, aquí los conceptos de aplicación y de función son idénticos. Además, no se habla tampoco de relación binaria, lo que hace al lenguaje y a la simbología, más asequible para los alumnos.

En las Indicaciones Metodológicas Complementarias para la simplificación de los Programas, al referirse al conocido "Plan Alemán", se señala que en las prácticas escolares se presentaron dificultades y la eficiencia del aprendizaje ha sido baja como revelan las visitas de inspección y los resultados de las investigaciones realizadas(MINED ,1987).

En estas Indicaciones, el concepto función y el análisis de funciones fueron aspectos centrales en todo el curso de Matemática. Los alumnos debían dominar las propiedades de las funciones y las formas de representar una función. En particular, debían ser capaces de relacionar las propiedades de la función con su representación gráfica y obtener aquellas a partir de una representación mental clara de la segunda.

Con las nuevas Indicaciones se da un paso de avance en el tratamiento de los contenidos sobre funciones, ya que anteriormente el concepto de número real se introducía después de las funciones y con estas indicaciones se introduce primero, lo que significa una ventaja enorme para el análisis de algunas propiedades y para la representación gráfica de las funciones. Otro aspecto positivo fue el de proponer un conjunto de ejercicios, además de los que aparecían en el libro de texto, como sugerencias para la ejercitación. Además, aparece por primera vez el concepto función lineal como funciones definidas por una ecuación de la forma y=mx, introducida a partir de la proporcionalidad directa. La función afín, definida por la ecuación y=mx+n, no se consideraba como una función lineal.

Como parte del perfeccionamiento continuo del Sistema Nacional de Educación, fue elaborado por un colectivo de autores del MINED en 1990

un nuevo Plan de estudio de Matemática para la Secundaria Básica, teniendo en cuenta los logros y deficiencias del Plan anterior. En 1992, se le hicieron adecuaciones al Programa de Matemática de este Plan MINED (1992). Como resultado de ello, se obtuvo un Plan de estudio caracterizado por responder de forma más objetiva a las condiciones de la educación cubana.

Desde el curso escolar 1999-2000, se están aplicando nuevas transformaciones del Programa de Matemática de la Secundaria Básica y los preuniversitarios en las escuelas del país. La primera de estas transformaciones se refiere a la presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos de carácter político–ideológico, económico–social y científico–ambiental (MINED, 1999, p. 11).

Esto significa que la actividad docente que inicia un sistema de clases determinado se debe desarrollar a partir de un problema que es extraído de situaciones prácticas, y que en el contexto cubano no puede ser de otro tipo que los referidos.

Ahora bien, el cumplimiento de los objetivos formativos generales a los que se subordina el tratamiento de la asignatura exige que dicho problema no constituya un ejercicio artificialmente elaborado por el profesor. Al menos los datos, a partir de los cuales será construido el mismo, deben ser aportados por los alumnos.

Una vez que se identifica la nueva situación matemática que se necesita estudiar, se debe trabajar en correspondencia con la segunda transformación metodológica fundamental: sistematizando los contenidos de la unidad e integrando las diferentes áreas matemáticas.

Se considera que este nuevo enfoque del Programa de Matemática es muy adecuado para estimular la actividad cognoscitiva y papel protagónico de los alumnos ya que un trabajo de este tipo requiere la incorporación y desarrollo de nuevas habilidades matemáticas que constituyen condición necesaria para concretar las dos transformaciones metodológicas fundamentales: la habilidad de procesar datos, la de estimar y la de esbozar geométricamente.

En esta nueva concepción, el proceso de enseñanza–aprendizaje el concepto función comienza en el noveno grado. Los profesores disponen para trabajar de los mismos textos del plan anterior, de nuevas orientaciones metodológicas y de un conjunto de video, grabados bajo la dirección del Ministerio de Educación y consideradas como el modelo a seguir por los docentes.

En los conocimientos contenidos en los videos, se observan las características siguientes:

- Se conservan los rasgos del enfoque de los textos analizados, en cuanto a que la formación del concepto de función antecede a la de función lineal.
- Se continúa con la idea del texto de los autores cubanos de no designar con el nombre de afín a las funciones que este trabajo se han denominado lineales.
- Los elementos de la clase inicial se obtienen a partir de dos problemas, cuyas respectivas soluciones son funciones lineales de dominio discreto.
- En el proceso de resolución de cada problema se obtiene una ecuación que modela la relación entre las magnitudes que intervienen, pero no se presta atención al dominio ni a la imagen de la función que la ecuación representa.
- Las ecuaciones funcionales que se obtienen como solución de los problemas tienen, respectivamente, la forma $y = m x$ ($m \neq 0$) e $y = m x + n$ ($m \neq 0$, $n \neq 0$).
- Para definir el concepto de función lineal se utiliza el sistema esencial de propiedades que aparece en el libro de texto Muñoz (1990), según el cual las funciones lineales tienen por dominio al conjunto de los números reales.
- El hecho de que en la resolución de los problemas no se presta atención a la modelación de las magnitudes que intervienen y sólo se modela su relación, puede conducir a dos errores:
  1. Identificación de la función con la ecuación.
  2. Identificación de las magnitudes con los conjuntos numéricos que les sirven de modelo.

El estudio de la función lineal se retoma en décimo grado, el Programa de Matemática para este grado, es uno de los documentos que debe tener el profesor del preuniversitario, en el cual se recoge una caracterización del alumno del nivel medio superior, se caracteriza la asignatura, se dan los objetivos del grado, se orienta el plan temático a seguir y se reflejan los objetivos y los contenidos para cada unidad de estudio.

El contenido referente a la función lineal, en el décimo grado, se trata en la Unidad 2 Funciones lineales y cuadráticas. Inecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Al estudio de la función lineal se dedican 3 horas clases, con el uso de la video clase, en las cuales se trabajan con situaciones donde el modelo son funciones lineales a pedazos, pero al alumno solo se le hace referencia a la función lineal, que es un caso particular de las funciones lineales a pedazos, con las mismas características expuestas anteriormente en los contenidos de las video clases de noveno grado.

Al concluir la unidad los alumnos deben ser capaces de describir mediante gráficos o ecuaciones funcionales el comportamiento de situaciones de la realidad que se modelen mediante funciones lineales. (MINED, 2006, p.17)

1.5 La resolución de problemas en la formación de conceptos

Las transformaciones realizadas en la enseñanza media, han estado dirigidas en lo esencial al cambio en los métodos y estilos de trabajo**.** Uno de estos cambios es el estudio de los nuevos contenidos matemáticos en función de resolver nuevas clases de problemas y no considerar la resolución de problemas exclusivamente como un medio para fijar contenidos.

Las tendencias más importantes que existen en el llamado aprendizaje por problemas según (Campistrous, 2002, p. 5) son:

- Enseñanza problémica.
- La enseñanza por problemas.
- La enseñanza basada en problemas.
- La enseñanza de la resolución de problemas.

La idea fundamental del trabajo que se utiliza en la tesis se sustenta en la enseñanza basada en problemas que desde el punto de vista de Campistrous consiste en el planteamiento de problemas en cuya solución se produce el aprendizaje. Esto no significa problematizar el objeto de enseñanza ni plantear problemas complejos que requieran de nuevos conocimientos matemáticos, se trata en si de resolver problemas matemáticos relacionados con el objeto de aprendizaje, sin confundirse con él, y que van conformando hitos en el nuevo aprendizaje.

En Palacio (2002, p.34) se expone que una clase concebida a partir del planteamiento y resolución de problemas ofrece las siguientes ventajas:

- Aumenta el interés de los alumnos al ver la inmediata aplicación práctica de lo que estudia.
- El alumno deja de ser un receptor de las ideas exclusivas del profesor y se convierte en un protagonista de la actividad, con una activa participación.
- Los contenidos no se olvidan con facilidad pues la mayoría de los problemas, principalmente los que tienen texto, permiten asociar el contenido matemático con los intereses de la comunidad y del alumno en particular.
- Pueden formularse nuevas preguntas sobre la situación resuelta, aspecto tan importante como la propia resolución del problema.
- Ayuda a desarrollar la expresión oral y, por tanto, facilita el poder de comunicación desarrollando y enriqueciendo el idioma.
- Contribuyen a dar respuestas a intereses e inquietudes de los alumnos, si se plantean en correspondencia con éstas.
- Contribuyen a eliminar creencias negativas respecto a la capacidad del alumno hacia la matemática.

Hay un acuerdo generalizado de que los problemas ayudan a reforzar y clarificar los principios que se enseñan y es mediante esta actividad que se alcanza un pleno dominio del aparato conceptual de la Matemática, de los elementos de carácter metodológico para la aplicación creadora de estos conocimientos y de los recursos matemáticos necesarios para ellos. También es importante considerar, entre otros factores, que la resolución de problemas es una de las vías claves para lograr una actitud positiva de los alumnos hacia la Matemática y en particular hacia el propio proceso de resolución de problemas, el cual contribuye además a desarrollar las actitudes y capacidades que conducen al desarrollo de un pensamiento científico y en general a la formación de una sólida base cultural.

¿Qué debemos entender por problemas?

Desde el punto de vista de la Psicología, según Kilpatrick (1985), un problema es una situación en la cual una meta quiere ser lograda y una vía directa a ella está bloqueada. Usualmente la Psicología requiere de sujetos que "tienen" el problema. De este modo para la mayoría de los psicólogos, ya no se puede ver el concepto de problema aislado del sujeto y así, el objeto de estudio debe ser la resolución de problemas como actividad de un sujeto.

Por otra parte, según Mayer (1983, p. 19) la mayoría de los psicólogos concuerdan en que un problema tiene ciertas características y que cualquier definición de problema debería contener tres ideas:

1. El problema está dado actualmente en un estado, pero
2. Se desea que esté en otro estado, y
3. No hay una vía directa y obvia para realizar el cambio.

Luego, para Mayer la resolución de problemas se refiere al proceso de transformar el estado inicial dado del problema a otro final, donde dicha transformación es realizada por el pensamiento.

Respecto a los psicólogos de Gestalt, Mayer señala que de acuerdo con ellos el proceso de resolución de un problema es un intento de relacionar y organizar los elementos de la situación problemática, de forma que se adquiere una comprensión estructural de la situación que conlleva a estos a la resolución y solución del problema.

Para los psicólogos de la Gestalt, los términos solución y resolución se identifican plenamente y adoptan por resolución al proceso cognitivo de adquirir una comprensión estructural y la reorganización de la situación problemática que conduce a la meta.

Con respecto a los criterios de los especialistas en Matemática, existe un acuerdo generalizado al definir los problemas como toda situación en la que hay un planteamiento inicial que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida, cuando es conocida deja de ser problema (Campistrous y Rizo, 1996).

Según esta definición, en cualquier situación siempre estarán presentes dos elementos invariantes:

Primero: una situación desconocida que necesita ser transformada.

Segundo: la vía para la transformación de la situación es desconocida.

Estas consideraciones revelan también la necesidad de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre la base de la resolución de problemas. El diseño integral de este enfoque requiere precisar también los rasgos distintivos de este tipo de actividad durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido se deben distinguir los problemas que se utilizarán durante las etapas que tienen como objetivo central:

- El estudio de un nuevo material, es decir, durante el proceso de formación inicial de un determinado sistema de conceptos, leyes y teorías.
- Desarrollar habilidades y aplicar los conocimientos.
- Sistematizar, generalizar y profundizar en los contenidos.
- Controlar lo aprendido.

Entre los distintos conceptos de problema que se han manejado en el campo de la Didáctica de la Matemática, el que más se ajusta a los fines de la formación de conceptos es el de situación-problema que ha caracterizado Douady (1998, p.43):

(i) El alumno debe poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una solución posible.

(ii) Los conocimientos del alumno tienen que ser, en principio, insuficientes para resolver el problema.

(iii) La “situación problema” debe permitir al alumno decidir si una solución determinada es correcta o no.

(iv) El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ("construya") tiene que ser la herramienta más adecuada- para resolver el problema propuesto, al nivel de los conocimientos del alumno.

(v) El problema puede ser formulado en al menos dos contextos de trabajo diferentes.

Un problema matemático es "una situación matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias" (Alonso, 2001, p. 49).

Según la definición citada, las componentes fundamentales de un problema matemático son las condiciones y las exigencias, las cuales también están presentes en las situaciones-problemas.

Para la solución de las situaciones problemas nos acogeremos a la estrategia seguida por Polya.

Para motivar a los alumnos a que se interesen por las situaciones-problemas, debemos relacionarlas con otras de las asignaturas que éstos han estudiado o estudian en la escuela o con fenómenos del entorno en que desarrollan su vida, pueden extraerse del contenido de otras materias, de la vida cotidiana de los alumnos y alumnas, de la vida en la escuela, en el trabajo y los deportes, de la vida en la comunidad local y la sociedad, y de la actividad científica.

Para la formación de un concepto en el proceso de resolución de un problema por personas adultas, debe surgir una necesidad que lleve a la persona o grupo enfrascado en la tarea, a la ejecución de varias acciones actuativas o comunicativas que permitan obtener una generalización de una clase de objetos reales o ideales que han emergido en algunas de las fases de este proceso.

1.6 Estado actual del problema

Para fundamentar el problema planteado para la investigación se aplicaron diferentes métodos, para ello conformaron la población 168 alumnos del IPUEC: Serafín Sánchez Valdivia del municipio Taguasco, se tomaron como muestra mediante un muestreo intencional un total de 29 que representan el 17,26% de la población. Se aplicó una encuesta (anexo 1) y una entrevista (anexo 2) a 8 profesores del mismo centro educacional.

De los resultados de la encuesta y la entrevista se puede concluir que:

- El 100% de los profesores encuestados consideran que en el programa de la asignatura vigente para la enseñanza media no existen sugerencias metodológicas para la formación y desarrollo del concepto función lineal a pedazos.
- Todos consideran que no tienen a su alcance bibliografía para el estudio y profundización de las funciones lineales a pedazos.
- El 87,5 % considera que puede lograrse una enseñanza de las funciones lineales a pedazos.
- El 75% de los profesores consideran que tienen un pobre dominio sobre el conocimiento de las funciones lineales a pedazos.
- El 100% de los profesores expresaron que en su departamento no se realizan orientaciones metodológicas para el trabajo con la formación de conceptos.
- El 75 % plantea que sus alumnos resuelven problemas donde el modelo matemático para su solución son funciones lineales a pedazos pero no son capaces de identificarlas.

También se aplicó un diagnóstico inicial (anexo 3) para alumnos de décimo grado del IPUEC: Serafín Sánchez Valdivia del municipio Taguasco, para constatar cómo se comportaba la formación del concepto función lineal y se obtuvieron los siguientes resultados:

Identificaron correctamente el concepto y argumentaron, 13 alumnos, que representa el 44,8% de la muestra.

Identificaron correctamente el concepto y no argumentaron, 2 alumnos, que representa el 6,9% de la muestra.

No identificaron correctamente el concepto, 14alumnos, que representa el 48,3% de la muestra.

Ejemplificaron correctamente el concepto y argumentaron, 9 alumnos, que representa el 31% de la muestra.

Ejemplificaron correctamente el concepto y no argumentaron, 4 alumnos, que representa el 13,8% de la muestra.

No ejemplificaron correctamente el concepto, 16 alumnos, que representa el 55,2% de la muestra.

Plantearon correctamente problemas relacionados con el concepto, 8 alumnos, que representa el 27,6% de la muestra.

Plantearon problemas con incoherencias u omisión de datos, 2 alumnos, que representa el 6,9% de la muestra.

No plantearon problemas relacionados con el concepto, 19 alumnos que representa el 65,5% de la muestra.

Capítulo II La formación del concepto función lineal a pedazos en la enseñanza media

En este capítulo se expone una propuesta de solución al problema científico planteado en la introducción del trabajo. Se presenta un procedimiento didáctico para la formación de conceptos, mediante el uso de la modelación matemática. Se ilustra el procedimiento con la formación del concepto función lineal a pedazos que se estudia en la unidad 2 "Funciones lineales y cuadráticas. Inecuaciones y sistemas de ecuaciones" del programa de décimo grado, además se analizan los resultados a través de la implementación en la práctica pedagógica.

A continuación señalamos lo que se entiende por procedimiento.

Procedimiento: forma canónica en que debe realizarse algo. (Diccionario Enciclopédico Grijalbo, 1998, p.1506)

Se asume que un procedimiento didáctico es "un conjunto de acciones dirigidas a la consecución de una meta" (Del Carmen, 1999, p.111)

La autora considera la meta la formación del concepto función lineal a pedazos.

La Didáctica tiene por objeto de estudio el proceso docente – educativo, o sea, el proceso educativo escolar que del modo más sistémico se dirige a la formación social de las nuevas generaciones y en él, el alumno se instruye capacita y educa", es decir, forma sus conocimientos, su pensamiento y sus sentimientos (Álvarez de Sayas, 1998, p. 8).

2.1 Acciones dirigidas a la formación de conceptos

El procedimiento que se expone a continuación ha sido elaborado a partir del expuesto por Abreu (2005) para la formación del concepto serie numérica utilizando la modelación matemática.

El procedimiento didáctico que se presenta en este epígrafe, y se ejemplificará en el siguiente lo conforman seis acciones:

- **El profesor asigna situaciones- problemas.**
- **El alumno resuelve los problemas.**

- **Reconocimiento o determinación de propiedades de los objetos.**
- **Nombrar el concepto.**
- **El profesor asigna tareas.**
- **El alumno resuelve las tareas.**

Cada una de los acciones del procedimiento didáctico está fundamentado a continuación.

Acción número 1

El profesor asigna a los alumnos varios problemas cuya solución es un elemento de la extensión del concepto que se quiere formar (situaciones-problemas), los cuales debe seleccionar o elaborar cuidadosamente.

Para el planteo de las situaciones problemas, es muy importante la selección de la palabra (para la exigencia) que guiará el comportamiento de los alumnos en la resolución de las mismas. Sobre la importancia de esta acción se ha señalado que la existencia de un problema es una condición necesaria, pero no suficiente para la formación de un concepto en personas adultas. En este sentido ha explicitado que “la cuestión fundamental sobre el proceso de formación del concepto… es la cuestión de los medios a través de los cuales se lleva a cabo una operación… Todas las funciones psíquicas superiores son procesos mediatizados, y los signos, los medios básicos utilizados para dominarlos y dirigirlos… En la formación de conceptos, ese signo es la palabra, la que juega primero el papel de medio, y más tarde, se convierte en su símbolo” (Vigotski, 1981, p. 72).

La representación seleccionada para los objetos de la clase inicial en el caso de la formación del concepto de función lineal a pedazos, lleva a que la palabra “fórmula” se utilice como medio; de manera que en cada caso los alumnos deben encontrar una fórmula.

La elección de una “buena” situación es importante, pero el rol del profesor, y sus interacciones con los alumnos, parecen esenciales, no sólo con respecto a la evolución de la situación (esto puede ser, en alguna medida, dominado por la elección de una situación que no sea muy sensible a pequeñas digresiones), sino también con respecto a las relaciones de los alumnos con el conocimiento a fijar. Desde este punto de vista, la buena administración de las interacciones con y entre los alumnos es importante, y finalmente afecta la cuestión de la reproducibilidad de las situaciones didácticas (Douady, 1998, p.15).

Según este autor se requieren algunas condiciones para proponer un problema a los alumnos, en particular:

- el conocimiento pretendido debe ser "una buena herramienta" para que los alumnos resuelvan el problema;
- los alumnos pueden empezar con una solución del problema partiendo de su propio conocimiento existente (tanto académico como no académico) (Douady, 1998, p.8).

Douady considera el punto clave en la relación maestro-matemáticas-alumno es el trabajo de los alumnos sobre los problemas que han sido elegidos por el profesor con una intención definida de enseñanza, para lo cual considera los siguientes requerimientos:

Requerimientos para los problemas (Douady, 1998, p.16-18)

- La situación matemática debiera depender al menos de un parámetro.
- Las proposiciones tienen un significado para los alumnos.
- Los alumnos están en posición de atacar el problema con sus conocimientos y sus hábitos, pero las herramientas apropiadas para resolverla completamente no están disponibles para ellos: la situación está abierta para ellos.
- El problema puede ser formulado en al menos dos contextos de trabajo diferentes.

Para Douady un contexto de trabajo es un dominio matemático generado por conceptos con un doble status de herramienta y objeto, por relaciones entre estos conceptos, por sus propiedades y teoremas conocidos que los implican, con sus diferentes formas de expresión simbólica y representaciones. El modelado de un campo matemático en varios contextos de trabajo puede ser más o menos refinado según sean los problemas a tratar (p.18).

Para Douady hay preguntas importantes para el profesor, preliminares a la elección específica de los problemas.

- ¿Cuál es el propósito de la situación para los alumnos: un nuevo conocimiento, un nuevo método, implementar algo que ya ha sido aprendido, articular en una situación más compleja cosas que han sido aprendidas en forma separada?
- ¿Qué procedimientos querrá el profesor que usen ellos? ¿Qué actitudes quiere que ellos adopten: iniciativa, comprobación, búsqueda de consistencia? ¿Con qué métodos de acción proveerá él a sus alumnos?
- . ¿ Qué significados tiene él para: registrar las acciones de los alumnos que son efectivas; proveer una explicación para la brecha entre lo que él espera y lo que ellos hacen; evaluar su entendimiento desde el punto de vista de los objetos matemáticos y desde el punto de vista de las herramientas matemáticas disponibles? (p.19)

La necesidad del proceso de enseñanza-aprendizaje que debe satisfacerse, consiste en disponer de un conjunto de situaciones-problemas que se diferencien en el contexto y cuyas respectivas soluciones, expresadas en el mismo sistema de representación, pertenezcan a distintas subclases de la extensión del concepto que se pretende formar. El objetivo consiste en elaborar tales situaciones.

En el caso de las funciones lineales a pedazos, la necesidad anterior se concreta en disponer de un conjunto de situaciones-problemas que se diferencien en el contexto y cuyas respectivas soluciones sean funciones lineales a pedazos, representadas analíticamente.

Una buena forma de orientarse en la búsqueda de pautas para la formulación que difieran en el dominio, la imagen o la ecuación de un problema cuya solución sea un elemento de la extensión de un concepto que se quiere formar, consiste en el que utilizaremos en el trabajo para formar el concepto función lineal a pedazos, la modelación como proceso.

Acción número 2

El proceso de resolución de las situaciones-problemas está sujeto a las fases que han identificado varios investigadores (Polya, 1982, p5):

- La comprensión del problema.
- La elaboración de un plan.
- La ejecución del plan.
- Análisis de las soluciones y de la vía.

La comprensión del problema está dirigida a identificar lo que se da y lo que se pide.

La elaboración de un plan de solución.

La búsqueda de un modelo matemático funcional para resolver una situación-problema elaborada con ese fin, pasa por una etapa intermedia en que se debe encontrar un modelo de la relación esencial entre las magnitudes que intervienen en ésta, pero en el dominio al que la situación pertenece. En el plan de solución debe estar contemplada, en primer lugar, la acción de la obtención de ese modelo.

Después de la acción anterior, el proceso de modelación conduce a la elaboración de tres modelos: dos para las magnitudes variables que intervienen en la situación y uno para la relación esencial entre estas magnitudes. Estos tres modelos, de conjunto, constituyen un modelo matemático de la situación.

Por tanto el plan de solución debe incluir, como segunda acción importante, la elaboración de estos tres modelos.

La ejecución del plan.

En esta fase se incluye la realización de un plan de solución, el alumno debe llegar a encontrar la fórmula mediante inducción analizando casos particulares y otros aplicando la deducción.

En esta fase se sintetizan tres acciones muy importantes:

- Se modelan las magnitudes mediante dos variables.
- Se modelan los dominios respectivos de estas variables.
- Se modela la fórmula entre las magnitudes.

El modelo de cada magnitud está compuesto por una variable y un conjunto numérico que constituye el dominio de la variable, mientras que el modelo de la relación entre estas magnitudes es una fórmula.

El análisis de la solución y de la vía.

En esta etapa se realiza la comprobación de la situación problema, la cual debe realizarse de acuerdo con las relaciones que se establecen en el enunciado. No solo se evalúa la solución sino también la vía de solución. Aquí se hacen consideraciones retrospectivas, donde se retoman los procedimientos y métodos utilizados para el plan de solución. Se reflexiona sobre la existencia de otra vía de solución o de utilizar esta vía de solución en otras situaciones similares.

Acción número 3

Bajo la dirección del profesor, se someten a la comparación y al análisis los objetos encontrados como soluciones de los problemas propuestos, con el objetivo de seleccionar características esenciales que sean satisfechas por cada uno de estos objetos y que permitan identificarlos y diferenciarlos de otros objetos (formación del contenido del concepto) y mediante un proceso de abstracción expresarlas en forma de propiedades matemáticas.

Acción número 4

En este paso, mediante un proceso de síntesis se agrupan en una clase todos los objetos que satisfacen el sistema de propiedades determinado en la acción anterior, a través del proceso de generalización se consideran en una clase todos los objetos que fueron comparados, y que cumplan todas las propiedades que como resultado del proceso de síntesis se agruparon en una clase y se da a conocer el nombre del concepto cuya extensión está formada por todos esos objetos.

Acción número 5

El profesor propone a los alumnos varias tareas, las cuales éstos deben resolver, de forma independiente o con la ayuda del docente o de algún compañero más capaz, las cuales pueden ser de uno de los tipos siguientes:

- Identificar el concepto y argumentar.
- Citar ejemplos y argumentar.
- Citar contraejemplos y argumentar.
- Resolver problemas en cuya modelación esté involucrado el concepto.
- Plantear problemas cuya solución sea un elemento de la extensión del concepto.

Acción número 6

El alumno resuelve las tareas con la ayuda del profesor o de un compañero más capaz, el profesor controla el trabajo de los alumnos y brinda ayuda a los que lo necesiten.

2.2 Aplicación del procedimiento didáctico a la formación del concepto función lineal a pedazos

Acción uno del procedimiento

Asignación de situaciones problemas

Situación 1

Un móvil parte con movimiento rectilíneo uniforme de un punto A hacia un punto B que se encuentra a 180m de distancia de A. Se ha medido para distintos instantes de tiempo las distancias del móvil con respecto al punto A, obteniéndose:

Tiempo en segundos	Distancia en metros
1	30
2	60
3	90
4	120
5	150
6	180

a) ¿Qué valores puede tomar el tiempo recorrido del punto A hasta el punto B?

b) ¿Qué valores puede tomar la distancia recorrida por el móvil?

c) Encuentre una fórmula que te permita calcular la distancia recorrida por el móvil, conociendo el tiempo transcurrido.

Situación 2

Se conoce que el costo en pesos del envío de un bulto postal está determinado por la cantidad de kilogramos que pesa de acuerdo a la ley siguiente:

Peso del bulto postal en kilogramos	Costo en pesos
Por el primer kilogramo o fracción de este	\$2,05
Más de un kilogramo o fracción de este	\$1,05 (por cada uno)

Nota: El peso máximo de cada bulto postal es de 5kg.

a) Determine los valores que puede tomar el peso del bulto postal en kilogramos.

b) Determine los valores que puede tomar el costo en peso de cada bulto postal.

c) Encuentre una fórmula para calcular el costo del bulto postal, conociendo el peso del mismo.

Situación 3

El servicio de telefonía residencial de llamadas locales, tiene un costo de $6, 25 hasta 300 minutos de consumo, cuando las llamadas exceden esta cifra se cobra a razón de 3 centavos el minuto, en el horario del día (entre las 6:00am-6:00pm).

a) ¿Qué valores puede tomar la cantidad de minutos consumidos por el cliente?

b) ¿Qué valores puede tomar el costo en peso del servicio telefónico?

c) Encuentre una fórmula para calcular el costo de las llamadas de un cliente durante un tiempo determinado, conociendo la cantidad de minutos consumidos durante ese tiempo, si se sabe que desde este teléfono solo se efectúan llamadas locales en el horario del día. Analiza si en todos los casos te es posible utilizar la misma fórmula.

Situación 4

A una cierta masa de agua destilada contenida en un recipiente se le suministra una cantidad de calor constante por minuto (durante tres horas), la temperatura aumenta linealmente. Durante los primeros 20 minutos el agua alcanza una temperatura de 100^{0}C y después se estabiliza, dado que en este momento empieza a ocurrir un cambio de estado.

La temperatura inicial del agua es de $20^{0}C$

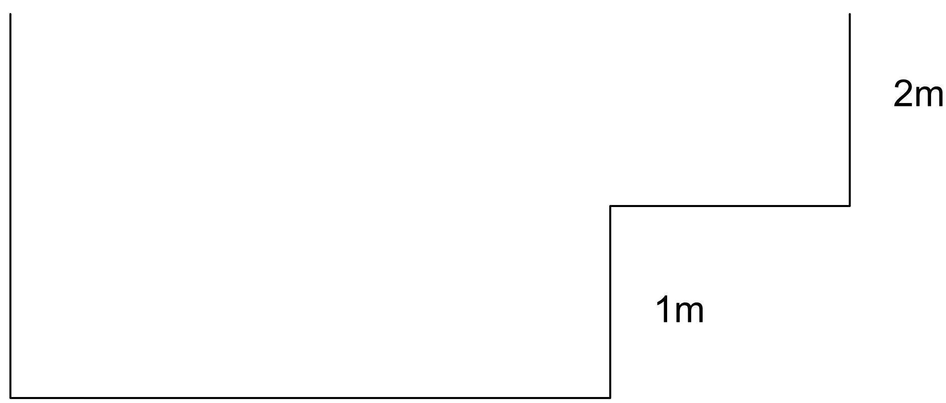
a) Encuentre los valores que admite el tiempo que se le suministra la cantidad de calor según la situación planteada.

b) Encuentre los valores que admite la temperatura según la situación planteada.

c) Determina una fórmula que te permita calcular la temperatura que alcanza el agua, conociendo el tiempo que se le suministra la cantidad de calor. Analiza si en todos los casos puedes utilizar la misma fórmula.

Situación 5

El diagrama siguiente muestra la sección transversal de una piscina vista desde un lado, la piscina se llena a una razón constante, con profundidad máxima de 2 m.



a) Determine los valores que puede tomar la altura que alcanza el agua en la piscina.

b) Determine los valores que puede tomar el tiempo que demora la piscina en llenarse.

c)Expresa mediante una fórmula cómo calcular la altura que alcanza el agua en la piscina conociendo el tiempo que demora en llenarse la misma, sabiendo que el primer metro de la piscina demora una hora en llenarse y transcurridas 3 horas está totalmente llena la piscina. Analiza si es posible utilizar la misma fórmula en todos los casos.

Situación 6

Se conoce que el costo en pesos del consumo de electricidad, está determinado por la cantidad de Kw. que se consume durante un tiempo determinado en una vivienda, de acuerdo con la ley siguiente:

Consumo de electricidad en Kw.	Costo en pesos por cada Kw.
0- 100	9¢
101- 150	30¢
151- 200	40¢
201- 250	60¢
251- 300	80¢
+ 300	$1. 30

a) ¿Qué valores puede tomar el costo en pesos del consumo de electricidad por cada Kw?

b) ¿Qué valores puede tomar el consumo de electricidad en Kw?

c) Encuentre una fórmula que te permita calcular el costo en pesos del consumo de electricidad en una vivienda durante un tiempo determinado, conociendo el consumo de electricidad en kw. Analiza si es posible utilizar la misma fórmula en todos los casos.

Situación 7

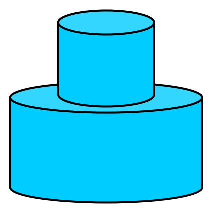
Un recipiente adopta la forma que se muestra en la figura (dos cilindros de distintos diámetros conectados).El recipiente se llena con agua a una razón constante, durante los primeros 20 minutos se colma la capacidad total del primer cilindro, que tiene como altura 4m. Transcurrido 12 minutos, se completa el llenado del recipiente, con altura total de 8m.

a) Encuentre los valores que puede tomar la altura que alcanza el agua en el tanque.

b) Encuentre los valores que puede tomar el tiempo que demora en llenarse el tanque.

c) Determina una fórmula para calcular la altura que alcanza el agua en el tanque, conociendo el tiempo que demora en llenarse el mismo.

.



Acción dos del procedimiento

Solución de las situaciones problemas

Respuesta de la situación número 1

Sean:

t$\Rightarrow$ la magnitud que modela el tiempo que demora el móvil en recorrer la distancia desde A hasta B.

d$\Rightarrow$ la magnitud que modela la distancia recorrida por el móvil.

a) La magnitud t toma los valores: t$\in [0;6]$

b) La magnitud d toma los valores: d$\in [0;180]$

c) De acuerdo con la relación establecida se puede utilizar la siguiente fórmula para calcular la distancia recorrida por el móvil, conociendo el tiempo que demora el mismo:

$$d=30t \qquad 0 \leq t \leq 6$$

Respuesta de la situación número 2

Sean:

p$\Rightarrow$ la magnitud que modela el peso del bulto postal en kilogramos

c$\Rightarrow$la magnitud que modela el costo del bulto postal según el peso del mismo.

a) La magnitud p toma los valores: p$\in (0;5]$

b) La magnitud c toma los valores: $c \in [2{,}05; 6{,}25]$

c) De acuerdo con la ley establecida se pueden utilizar las siguientes fórmulas para calcular el costo de un bulto postal conociendo su peso

c=2,05 $0<p\leq 1$

c=3,10 $1<p\leq 2$

c=4,15 $2<p\leq 3$

c=5,20 $3<p\leq 4$

c=6,25 $4<p\leq 5$

Respuesta de la situación número 3

Sean:

$t \Rightarrow$ la magnitud que modela la cantidad de minutos consumidos durante un tiempo determinado.

$p \Rightarrow$ la magnitud que modela el costo en peso de cada llamada por un tiempo determinado.

a) La magnitud t toma los valores: $t \in [0; \infty)$

b) La magnitud p toma los valores: $p \in [0; \infty)$

c) De acuerdo con la ley establecida se pueden utilizar las siguientes fórmulas para el cálculo del costo del servicio telefónico de una vivienda durante un tiempo determinado, conociendo el tiempo consumido durante ese tiempo.

p=6,25 $0 \leq t \leq 300$

p=6,25 +0,03(t-300) $t>300$

Respuesta de la situación número 4

Sean:

$c \Rightarrow$ la magnitud que modela el tiempo que se le suministra calor al agua.

$t \Rightarrow$ la magnitud que modela la temperatura que alcanza el agua.

a) La magnitud c toma los siguientes valores: c $\in [o;180]$

b) La magnitud t toma los siguientes valores: t $\in [20;100]$

c) De acuerdo con la relación establecida se pueden utilizar las fórmulas siguientes para calcular la temperatura que alcanza el agua, conociendo el tiempo que se le suministra calor.

t=20+4c $0 \leq c \leq 20$

t=100 c>20

Respuesta de la situación número 5

Sean:

t $\Rightarrow$ la magnitud que modela el tiempo que demora en suministrarle agua a la piscina.

h $\Rightarrow$ La magnitud que modela la altura que alcanza el agua en la piscina.

a) La magnitud t toma los valores siguientes: t $\in [0;3]$

b) La magnitud h toma los valores siguientes: h $\in [0;2]$

c) De acuerdo con la relación establecida para calcular la altura que alcanza el agua en la piscina, conociendo el tiempo que demora en suministrarle agua a la misma, se pueden utilizar las siguientes fórmulas:

h=t $0 \leq t \leq 1$

h= $\frac{1}{2}$ (t-1)+1 $1 < t \leq 3$

Respuesta de la situación número 6

Sean:

c $\Rightarrow$ la magnitud que modela el consumo de corriente eléctrica en Kw.

p $\Rightarrow$ la variable que modela y el costo en peso por cada Kw.

a) La magnitud c toma los valores siguientes: c $\in [0;\infty)$

b) La magnitud p toma los valores siguientes: p $\in [0;\infty)$

c) De acuerdo con la ley de costo establecida se pueden utilizar las siguientes fórmulas para calcular el costo en peso por cada kw conociendo el consumo de corriente eléctrica durante un tiempo determinado.

p=0,09c $0 \leq c \leq 100$

p=9+0, 30(c-100) $100 < c \leq 150$

p=24+0, 40(c-150) $150 < c \leq 200$

p=44+0, 60(c-200) $200 < c \leq 250$

p=74+0,80(c-250) $250 < c \leq 300$

p=144+1,30(c-300) c>300

Respuesta de la situación número 7

Sean:

t $\Rightarrow$ la magnitud que modela el tiempo de llenado del recipiente.

h $\Rightarrow$ la magnitud que modela la altura que alcanza el agua en el recipiente.

a) La magnitud t toma los valores siguientes: $t \in [0;32]$

b) La magnitud h toma los valores siguientes: $h \in [0;8]$

c) Para calcular la altura que alcanza el agua en el recipiente, conociendo el tiempo que demora en suministrarle agua al mismo, se pueden utilizar las siguientes fórmulas:

$$h=\frac{1}{5}t \qquad 0 \leq t \leq 20$$

$$h=\frac{5}{3}\left[\frac{1}{5}(t-20)\right]+4 \qquad 20 < t \leq 32$$

Acción tres del procedimiento:

Determinación de un sistema de propiedades de los objetos encontrados en la solución de las situaciones problemas propuestas.

Después que los alumnos resuelvan cada situación problema el profesor puede orientar llenar una tabla como la siguiente:

Sit.	Mag.1	Mag. 2	Modelo mag. 1	Modelo mag. 2	Modelo de la relación entre las magnitudes
1	t	d	$t \in [0;6]$	$d \in [0;180]$	$d=30t \quad 0 \leq t \leq 6$
2	p	c	$p \in (0;5]$	$c \in [2,05;6,25]$	c=2,05 $0<p\leq 1$ c=3,10 $1<p\leq 2$ c=4,15 $2<p\leq 3$ c=5,20 $3<p\leq 4$ c=6,25 $4<p\leq 5$
3	t	p	$t \in [0;\infty)$	$p \in [0;\infty)$	p=6,25 $0 \leq t \leq 300$ p=6,25+0,03(t-300) t>300
4	c	t	$c \in [o;180]$	$t \in [20;100]$	t=20+4c $0\leq c\leq 20$ t=100 c>20

5	t	h	$t \in [0;3]$	$h \in [0;2]$	h=t $0 \leq t \leq 1$ $h=\frac{1}{2}(t-1)+1$ $1<t \leq 3$
6	c	p	$c \in [0;\infty)$	$p \in [0;\infty)$	p=0,09c $0 \leq c \leq 100$ p=9+0,30(c-100) $100<c \leq 150$ p=24+0,40(c-150) $150<c \leq 200$ p=44+0,60(c-200) $200<c \leq 250$ p=74+0,80(c-250) $250<c \leq 300$ p=144+1,30(c-300) c>300
7	t	h	$t \in [0;32]$	$h \in [0;8]$	$h=\frac{1}{5}t$ $\quad 0 \leq t \leq 20$ $h=\frac{5}{3}\left[\frac{1}{5}(t-20)\right]+4$

					$20<t\leq 32$

La comparación de cada magnitud nos permite determinar las siguientes características:

- Los modelos de las magnitudes 1 y 2 permiten identificar como rasgo común que en todos ellos existe una variable cuyo dominio es un conjunto de números.
- La comparación de los modelos de la relación entre las dos magnitudes permite identificar como rasgos comunes:
  - Para cada valor de una de las variables existe un único valor de la otra variable.
  - La variable dependiente tiene exponente 1 y coeficiente 1
  - La variable independiente tiene exponente 1
  - Por intervalos del dominio de la variable independiente, los valores de la variable dependiente se obtienen de los valores de la variable independiente multiplicándola por un número y adicionándole otro número.

La primera de estas dos propiedades indica que en cada caso existe una función cuyo dominio es el primer conjunto y cuya imagen es parte del segundo.

La segunda propiedad indica una característica de cada una de las funciones representadas en la tabla.

Acción cuatro del procedimiento: Nombrar el concepto

Aquí el profesor debe agrupar en una clase todos los objetos que satisfacen el sistema de propiedades determinado en el paso anterior y nombrar el concepto a cuya extensión pertenecen esos objetos.

La representación analítica de las fórmulas encontradas para relacionar las magnitudes 1 y 2, tienen la forma de la función y = m x + n, donde m y n son símbolos para parámetros, que en cada caso particular tomarán valores fijos, y los signos x, y, representan, respectivamente, las variables independiente y dependiente, definidas sobre un conjunto de números reales.

Según los valores que pueden tomar m y n hemos dividido estas funciones en cuatro clases:

Situaciones problemas	Valores de los parámetros m y n	Ecuaciones funcionales
1	$m \in R$ $n \in R$	Para todos los elementos del dominio de la variable independiente se obtiene una única ecuación de la forma y=mx+n
2	m=0 $n \in R$	Para los diferentes subintervalos del dominio de la variable independiente se obtienen ecuaciones de la forma: y=n
5, 6 y 7	$m \neq 0$ $n \in R$	Para los diferentes subintervalos del dominio de la variable independiente se obtienen ecuaciones de la forma: y=mx+n
3 y 4	m=0 o $m \neq 0$ $n \in R$	Para los diferentes subintervalos del dominio de la variable independiente se obtienen ecuaciones de la forma: y=mx+n o y=n

La colección de todos las ternas (X, Y, f) donde X es el dominio, Y es el codominio y f las ecuaciones funcionales que relacionan las magnitudes 1 y 2, se les llaman **funciones lineales a pedazos.**

Acción cinco del procedimiento:

En este paso el profesor asigna tareas para fijar el concepto.

Tarea 1

Dadas las siguientes funciones identifica cuáles son funciones lineales a pedazos y argumenta.

a) b=5a+3 $a \in R$

b) f(x)= $\begin{cases} x^2+2 & 0 \le x \le 3 \\ 2 & x \le 0 \end{cases}$

c) g(x)= $\begin{cases} 1 & x\rangle 0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x\langle 0 \end{cases}$

d) h(c)= $\begin{cases} c & c \ge 0 \\ -c & c\langle 0 \end{cases}$

Tarea 2

Ponga ejemplos de funciones que sean lineales a pedazos y otras que no lo sean.

Tarea 3

Se conoce que el costo en peso del envío de una carta está determinado por la cantidad de onzas que pesa la carta de acuerdo a la ley siguiente: el peso máximo admisible de cada carta es de 5 onzas y por cada onza o fracción de ésta se paga 5 pesos de modo que si una carta pesa dos onzas o fracción de ésta el costo de su envío es de 15 pesos. Escriba la expresión analítica que describe la función lineal a pedazos que representa la situación planteada.

Tarea 4

Elabora un problema cuya solución requiera la búsqueda de una función lineal a pedazos.

Acción seis del procedimiento:

En este paso los alumnos resuelven las tareas propuestas por el profesor para fijar el concepto.

2.3 Evaluación del procedimiento didáctico mediante la aplicación en la práctica pedagógica

En este epígrafe se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación del procedimiento didáctico, a partir del pre-experimento realizado, con medida pretest y postest.

Para la realización del pre-experimento se seleccionó intencionalmente como muestra, un grupo de décimo grado del preuniversitario Serafín Sánchez Valdivia del municipio Taguasco, es un grupo promedio, consta con alumnos transitando por los tres niveles de desempeño, su profesora es Licenciada en Educación, especialidad Matemática, con 18 años de experiencia en su labor, ha impartido clases en los tres gados del nivel preuniversitario y mostró disposición para la aplicación del procedimiento didáctico.

En el trabajo se identifica como variable independiente el procedimiento didáctico y como variable dependiente el nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto función lineal a pedazos.

Para la evaluación del nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto función lineal a pedazos, se aplicó el procedimiento siguiente:

1) Determinación de dimensiones e indicadores.
2) Modelación matemática de los indicadores mediante variables.
3) Medición de los indicadores.
4) Procesamiento estadístico de los datos.
5) Elaboración de juicios de valor sobre el objeto de evaluación.

Determinación de dimensiones e indicadores:

En el análisis del nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto función lineal a pedazos, se identificaron dos dimensiones, para tener en cuenta en su evaluación: la dimensión cognitiva y la dimensión motivacional.

Para determinar los indicadores de la dimensión cognitiva (D_1) se tuvieron en cuenta las operaciones a ejecutar por el alumno en la formación del concepto, se consideraron los siguientes indicadores:

1. Identificar el concepto y argumentar.
2. Ejemplificar el concepto y argumentar.
3. Plantear problemas relacionados con el concepto.

Los indicadores de la dimensión motivacional (D_2) son:

1. Interés por conocer el concepto.
2. Estado de ánimo mientras se estudia el concepto.
3. Interés por resolver ejercicios relacionados con el concepto.

Modelación matemática de los indicadores mediante variables

La modelación matemática de los indicadores requiere de la ejecución de las acciones siguientes:

1. Representar cada indicador mediante una variable.
2. Determinar el dominio de la variable.
3. Determinar los criterios para asignar a la variable cada uno de los elementos del dominio.

En la tabla 1 aparecen los resultados de la aplicación de las acciones 1 y 2 a los indicadores.

Tabla 1

Modelo estadístico de los indicadores			
Dimensión	Indicador	Variable estadística	Dominio
D_1	1	m_{11}	{B, R, M}
	2	m_{12}	
	3	m_{13}	
D_2	1	m_{21}	
	2	m_{22}	
	3	m_{23}	

En la tabla 2 se muestra la matriz de valoración de los indicadores en una escala de bien (B), regular (R) y mal (M).

Tabla 2

Matriz de valoración de los indicadores.

Dimensión cognitiva	Escala		
	B	R	M
Indicador 1	Si identifica el concepto y argumenta.	Si identifica el concepto y no argumenta.	Si no identifica el concepto.
Indicador 2	Si ejemplifica el concepto y argumenta.	Si ejemplifica el concepto y no argumenta.	Si no ejemplifica el concepto.
Indicador 3	Si plantea problemas relacionados con el concepto.	Si plantea problemas relacionados con el concepto con incoherencias y/u omisión de datos.	Si no plantea problemas relacionados con el concepto.
Dimensión motivacional	B	R	M
Indicador 1	Si muestra está motivación por conocer el concepto	Si en ocasiones muestra motivación por conocer el concepto.	Si no muestra motivación por conocer el concepto.
Indicador 2	Si muestra buen estado de ánimo mientras estudia el concepto.	Si en ocasiones muestra buen estado de ánimo mientras estudia el concepto.	Si no muestra buen estado de ánimo mientras estudia el concepto.

Indicador 3	Si muestra interés en resolver ejercicios relacionados con el concepto.	Si en ocasiones muestra interés en resolver ejercicios relacionados con el concepto.	Si no muestra interés en resolver ejercicios relacionados con el concepto.

Medición de los indicadores

Para la medición de los indicadores de cada dimensión, se utilizaron distintos instrumentos que se especifican en la tabla 3.

Tabla 3

Instrumentos utilizados en la medición de los indicadores		
Dimensión	Indicador	Ítem
D_1	1	Anexo 3 ítem 1, anexo 4 ítem 1
	2	Anexo 3 ítem 2, anexo 4 ítem 2
	3	Anexo 3 ítem 3, anexo 4 ítem 3
D_2	4	Anexo 5 ítem 1
	5	Anexo 5 ítem 2
	6	Anexo 5 ítem 3

Procesamiento estadístico de los datos

Estado inicial (pretest)

Para la valoración del estado inicial del nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto función lineal a pedazos, al comienzo del pre-experimento, se aplicó una prueba de entrada a los alumnos seleccionados de la muestra, así como la observación a clases.

En la tabla 4, se muestran las frecuencias absolutas y relativas de categorías por indicador.

Tabla 4

Cat.	1		2		3		4		5		6	
	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%
B	13	44,8	9	31,0	8	27,6	14	48,3	12	41,4	13	44,8
R	2	6,9	4	13,8	2	6,9	5	17,2	4	13,8	3	10,3
M	14	48,3	16	55,2	19	65,5	10	34,5	13	44,8	13	44,8

Juicios de valor sobre el nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto función lineal.

Dimensión cognitiva:

Indicador 1: Identificar el concepto y argumentar

Este indicador incluyó el diagnóstico de los alumnos sobre el dominio que tienen del concepto función lineal y si son capaces de argumentar por qué es una función de este tipo.

Los datos recopilados demostraron que de los 29 alumnos que se les aplicó el diagnóstico inicial, 13 (44,8 %) identifican el concepto función lineal y argumentan, 2(6,9%) identifican dicho concepto pero no son capaces de argumentar y 14 (48,3%) no identifican el concepto función lineal.

Indicador 2: Ejemplificar el concepto y argumentar

Este indicador incluyó si el alumno es capaz de ejemplificar el concepto función lineal y argumenta por qué es una función lineal.

En este indicador se constató que solo 9 (31,0%) alumnos ejemplifican el concepto y argumentan, 4(13,8%) ejemplifican el concepto pero no argumentan y 16 (55,2%) no ejemplifican el concepto.

Indicador 3: Plantear problemas relacionados con el concepto

Este indicador incluyó si el alumno elabora problemas relacionados con el concepto función lineal.

La valoración de este indicador nos permitió determinar que de los 29 alumnos 8 (27,6%) plantean problemas relacionados con el concepto, 2 (6,9%) plantean problemas con incoherencias u omisión de datos y 19 (65,5) no plantean problemas relacionados con el concepto.

Dimensión motivacional:

Indicador 1: Interés por conocer el concepto

Este indicador incluyó, el interés que muestra el alumno durante el desarrollo de las clases por conocer el concepto.

De la observación a clases se pudo constatar, que 14 (48,3%) alumnos mostraron interés en conocer el concepto, 5 (17,2%) en ocasiones mostraron interés en conocer el concepto y 10 (34,5%) no mostraron interés por conocer el concepto.

Indicador 2: Estado de ánimo mientras estudia el concepto

Este indicador evaluó, el estado de ánimo que muestra el alumno mientras se estudia el concepto.

De los alumnos muestreados 12 (41,4%) mostraron buen estado de ánimo mientras se estudia el concepto, 4 (13,8%) en ocasiones mostraban buen estado de ánimo mientras se estudiaba el concepto y 13 (44,8%) no mostraron interés mientras se estudiaba el concepto.

Indicador 3: Interés en resolver ejercicios relacionados con el concepto

Este indicador tuvo en cuenta, el interés que mostraron los alumnos en resolver ejercicios relacionados con el concepto.

El análisis de los resultados evidenció que sólo 13 (44,8%) mostraron interés en resolver otros ejercicios relacionados con el concepto, 3 (10,3%) en ocasiones mostraron interés en resolver otros ejercicios relacionados con el concepto y 13 (44,8 %) no mostraron interés en resolver ejercicios relacionados con el concepto.

El análisis efectuado anteriormente a cada uno de los indicadores de la variable nivel alcanzado por los alumnos en la formación de conceptos y la valoración realizada a los datos mostrados, permitió concluir que:

- Los indicadores con mayores dificultades fueron:

  Ejemplificar el concepto y argumentar

  Plantear problemas relacionados con el concepto

Resultado final (postest)

Similar a lo realizado en el pretest, en la valoración del estado final del nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto, se aplicó una prueba pedagógica y la observación a clases. En el anexo 7 se muestran los resultados de la medición de los indicadores.

En la tabla 5, se muestran las frecuencias absolutas y relativas de categorías por indicador.

Tabla 5

Frecuencias absolutas y relativas de categorías por indicador.

	Indicadores											
Cat.	1		2		3		4		5		6	
	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%	FA	%
B	26	89,7	24	82,8	21	72,4	24	82,8	24	82,8	23	79,3
R	2	6,9	2	6,9	4	13,8	4	13,8	4	13,8	4	13,8
M	1	3,4	3	10,3	4	13,8	1	3,4	1	3,4	2	6,9

Juicios de valor sobre el nivel alcanzado por los alumnos en la formación del concepto función lineal, después de introducir el procedimiento didáctico:

Dimensión cognitiva:

Indicador 1

Los datos recopilados evidenciaron que los 29 alumnos que se les aplicó el diagnóstico final, 26 (89,7 %) identifican el concepto función lineal a pedazos y argumentan, 2 (6,9%) identifican dicho concepto pero no son capaces de argumentar y sólo 1 (3,4%) no identifica el concepto función lineal a pedazos.

Indicador 2

En este indicador se constató que 24 (82,8%) alumnos ejemplifican el concepto función lineal a pedazos y argumentan, 2(6,9%) ejemplifican el concepto pero no argumentan y 3 (10,3%) no ejemplifican el concepto.

Indicador 3

Los resultados obtenidos del control de este indicador revelan que de los 29 alumnos 21 (72,4%) plantean problemas relacionados con el concepto, 4 (13,8%) plantean problemas con incoherencias u omisión de datos y 4 (13,8%) no plantean problemas relacionados con el concepto.

Dimensión motivacional:

Indicador 1

El análisis realizado de los resultados obtenidos de este indicador se pudo constatar, que 24 (82,8%) alumnos mostraron interés en conocer el concepto, 4 (13,8%) en ocasiones mostraron interés en conocer el concepto y 1 (3,4%) no mostró interés por conocer el concepto.

Indicador 2

Los resultados obtenidos del control de este indicador revelan que sólo 24 (82,8%) mostraron buen estado de ánimo mientras se estudia el concepto, 4 (13,8%) en ocasiones mostraban buen estado de ánimo mientras se estudiaba el concepto y 1 (3,4%) no mostró interés mientras se estudiaba el concepto.

Indicador 3

La valoración de este indicador nos permitió determinar que 23 (79,2%) mostraron interés en resolver otros ejercicios relacionados con el concepto, 4 (13,8%) en ocasiones mostraron interés en resolver otros ejercicios relacionados con el concepto y 2 (6,9 %) no mostraron interés en resolver ejercicios relacionados con el concepto.

El análisis efectuado anteriormente a cada uno de los indicadores de la variable nivel alcanzado por los alumnos en la formación de conceptos y la valoración realizada a los datos mostrados, permitió concluir que:

- Los indicadores donde se alcanzan menos resultados fueron:

  Ejemplificar el concepto y argumentar

  Plantear problemas relacionados con el concepto

Comparación entre los resultados del pretest y postest.

A continuación, en las tablas de la 6 a la 11, se presentan de forma comparativa antes y después de introducido el procedimiento didáctico, cómo se comportaron cada una de los indicadores utilizados en el pre- experimento, a través de las tablas de frecuencias, así como sus respectivos gráficos de barras, que describen los porcentajes por categorías de la escala, de los indicadores de cada dimensión.

Tabla 6

Dimensión cognitiva según el indicador "identificar el concepto y argumentar"(D_{11})				
	Etapa inicial		Etapa final	
Categorías	FA	%	FA	%
B	13	44,8	26	89,7
R	2	6,9	2	6,9
M	14	48,3	1	3,4

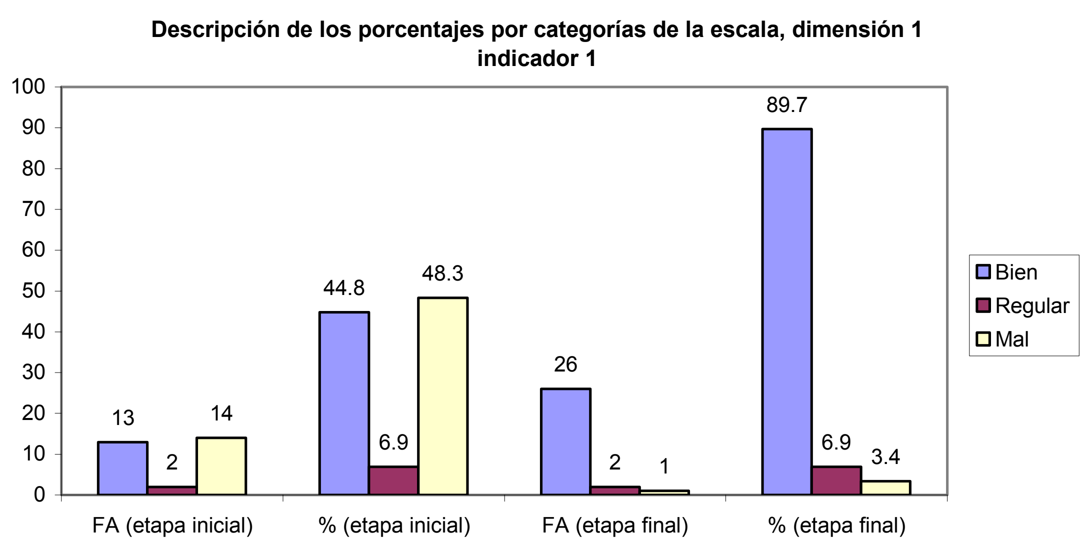


Tabla 7

Dimensión cognitiva según el indicador ”ejemplificar el concepto y argumentar”(D_{12})				
	Etapa inicial		Etapa final	
Categorías	FA	%	FA	%
B	9	31,0	24	82,8
R	4	13,8	2	6,9
M	16	55,2	3	10,3

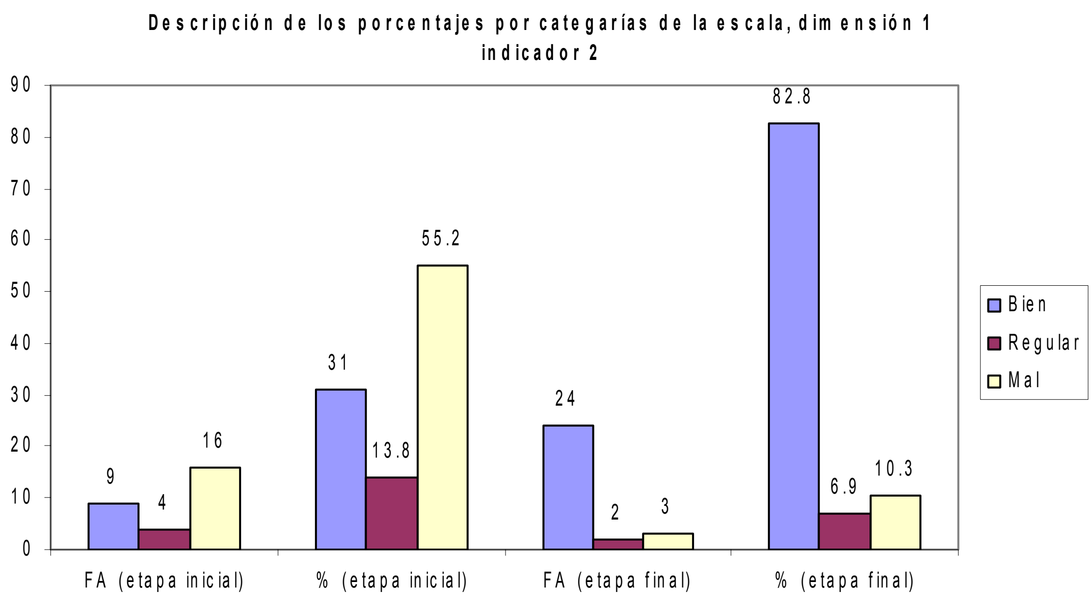


Tabla 8

Dimensión cognitiva según el indicador "plantear problemas relacionados con el concepto" (D_{13})				
	Etapa inicial		Etapa final	
Categorías	FA	%	FA	%
B	8	27,6	23	79,3
R	2	6,9	2	6,9
M	19	65,5	4	13,8

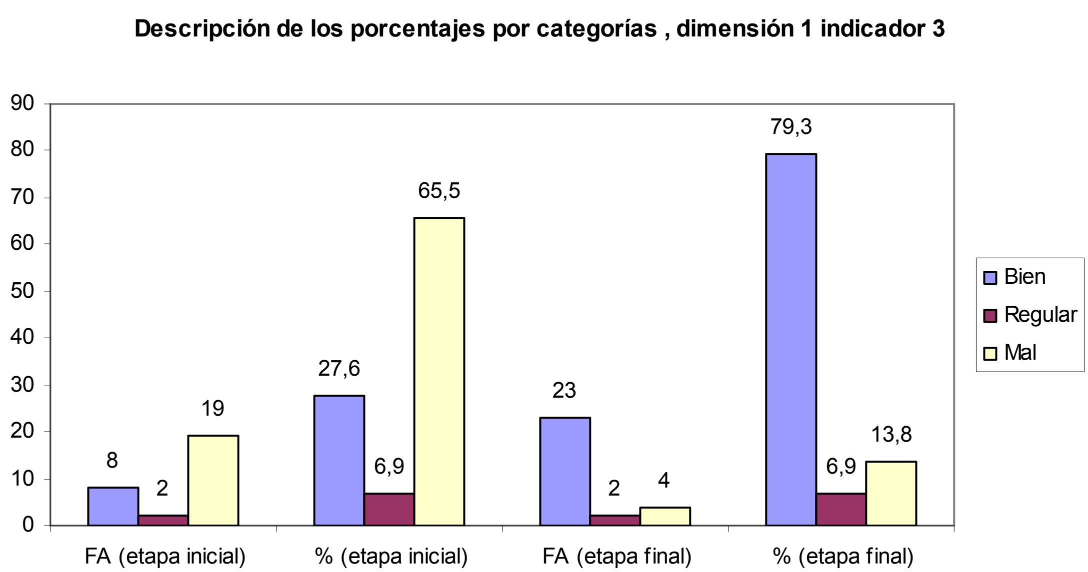


Tabla 9

Dimensión motivacional según el indicador "Interés por conocer el concepto"(D 21)					
	Etapa inicial		Etapa final		
Categorías	FA	%	Categorías	FA	%
B	14	48,3	B	14	82,8
R	5	17,2	R	5	13,8
M	10	34,5	M	10	3,4

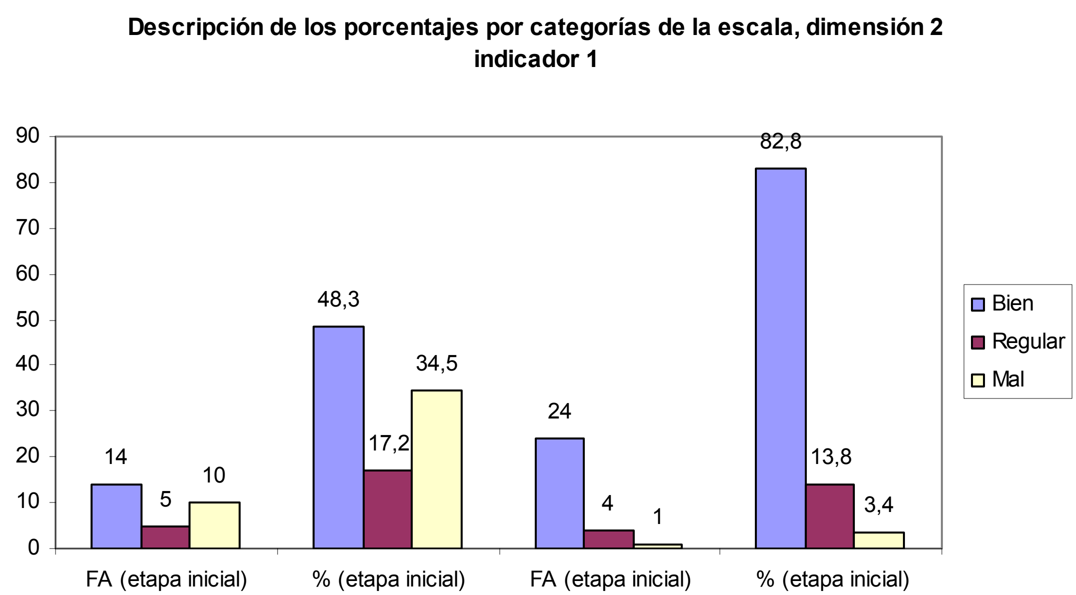


Tabla 10

Dimensión motivacional según el indicador ”estado de ánimo mientras se estudia el concepto”(D_{22})				
	Etapa inicial		Etapa final	
Categorías	FA	%	FA	%
B	12	41,4	24	82,8
R	14	48,3	4	13,8
M	13	44,8	1	3,4

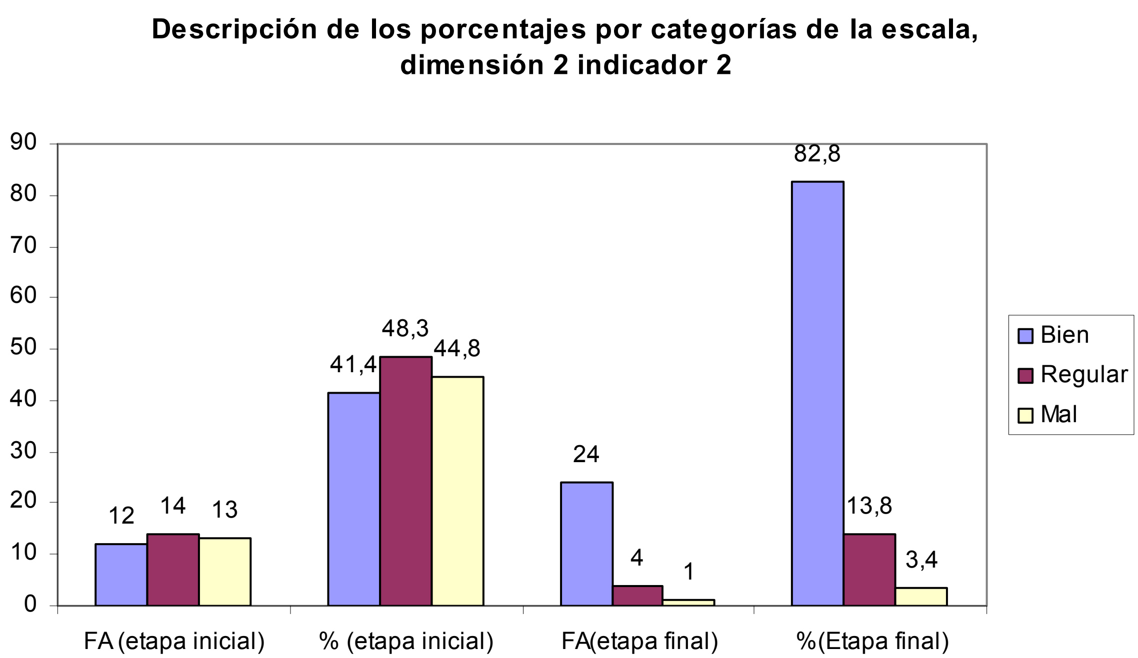
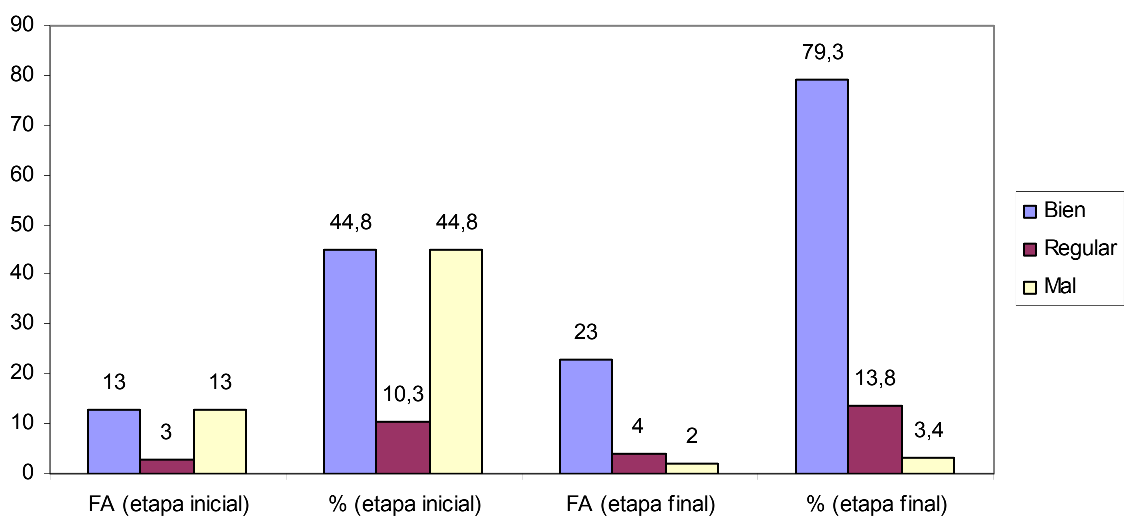


Tabla 11

Dimensión motivacional según el indicador “interés por resolver ejercicios relacionados con el concepto”(D $_{23}$)				
	Etapa inicial		Etapa final	
Categorías	FA	%	FA	%
B	13	44,8	23	79,3
R	3	10,3	4	13,8
M	13	44,8	2	3,4

Descripción de los porcentajes por categorías de la escala, dimensión 2 indicador 3



Después de analizar los datos que contienen las tablas de frecuencias, las gráficas de barras, y las valoraciones anteriormente realizadas se pudo constatar que:

El número de alumnos que identifican y argumentan el concepto función lineal a pedazos aumentó de un 44,8% a un 89,7%.

En la etapa inicial había dos alumnos que identificaron el concepto función lineal a pedazos, pero no argumentaron y esta cifra se mantuvo en la etapa final (6,9%).

El número de alumnos que no identificaron el concepto función lineal a pedazos decreció de un 48,3% a un 3,4%.

El número de alumnos que ejemplifican el concepto función lineal a pedazos y argumentan aumentó de un 31,0% a un 82,8%.

El13, 8% de los alumnos ejemplificaron y no argumentaron el concepto, esta cifra se redujo a un 6,9%.

En la primera etapa del pre- experimento el 55,2% de los alumnos no ejemplificaban el concepto reduciéndose a un 10,3%.

Sólo planteaban problemas relacionados con el concepto el 27,6% de los alumnos y esta cifra aumentó a un 79,3%.

El 6,9 % de los alumnos planteaban problemas relacionados con el concepto con incoherencias u omisión de datos, este por ciento se mantuvo al concluir el pre-experimento.

El 65,5% de los alumnos no eran capaces de redactar problemas relacionados con el concepto y este se redujo a un 13,8%.

Por otra parte, es de significar, que en la etapa inicial no mostraban interés por conocer el concepto el 48,3% de los alumnos, aumentando a un 82,8 %; el 17,2% mostraba interés en ocasiones, bajando a un 13,8%, el 34,5 % de los alumnos no mostró interés en conocer el concepto y al concluir el pre-experimento sólo no mostró interés el 3,4%.

Al comenzar el estudio, los datos recopilados revelaron que el 41,4% de los alumnos mostraban buen estado de ánimo mientras se estudiaba el concepto, aumentando a un 82,8%; el 48,3% mostró buen estado de ánimo en ocasiones, bajando a un 13,8%; el 44,8% no mostró buen estado de ánimo mientras se estudia el concepto , bajando a un 3,4%.

El análisis realizado de los datos nos permitió constatar que al comienzo del estudio el 44,8% de los alumnos mostraban interés en realizar ejercicios relacionados con el concepto, aumentando a un 79,3%; el 10,3% de los alumnos mostró interés en ocasiones y este por ciento aumentó a 13,8; el 44,8 % de los alumnos no mostró interés por resolver ejercicios relacionados con e concepto, disminuyendo a un 3,4%.

Conclusiones

- La caracterización teórica realizada en el marco de este trabajo permitió a la autora sustentar teóricamente la elaboración del procedimiento didáctico pues existen vacíos en la didáctica de la matemática que necesitan continuar el estudio de la formación del concepto función lineal a pedazos.
- A partir del estudio bibliográfico realizado por la autora se ha podido constatar que:
  - Un concepto se ha formado cuando conoce su contenido y su extensión.
  - Se concede gran importancia al papel de la resolución de problemas en la formación de conceptos matemáticos.
  - La modelación matemática se considera un elemento importante en el proceso de formación de conceptos.
- Se pudo constatar, mediante los métodos e instrumentos aplicados para conocer el estado inicial del problema, que existen limitaciones en la formación del concepto función lineal a pedazos en el nivel medio.
- Para la formación del concepto función lineal a pedazos por medio de problemas, de acuerdo con el estudio realizado, se considera necesario proponer un procedimiento didáctico basado en el uso de la modelación matemática que consta de seis acciones.
- Con la realización del pre-experimento se pudo constatar que el procedimiento didáctico elaborado contribuye a la formación del concepto función lineal a pedazos en los alumnos de décimo grado, donde se hace uso de la modelación matemática.

Por consiguiente, se puede afirmar que el objetivo de la investigación ha sido cumplido.

Recomendaciones

- Sugerir a los maestros de Matemática de la enseñanza preuniversitaria, que apliquen el procedimiento didáctico en la formación del concepto función lineal a pedazos de décimo grado de manera que les permita comprobar su eficacia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
- Poner a disposición de la Comisión Provincial de Matemática de la provincia de Sancti Spíritus el informe final de esta investigación.

Bibliografía

Abreu, L. (2005).*La formación de conceptos del Análisis Matemático utilizando la resolución de problemas en la clase tipo encuentro. El caso del concepto de serie numérica* .Clase metodológica instructiva. ISP “Capitán Silverio Blanco Núñez”, Sanct-Spíritus.

Aguilar, A. (2001). *Un Modelo Didáctico para el Estudio y Transformación de las Creencias Limitativas acerca de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Formación de Profesores. Tesis de Maestría. ISP “José de la Luz y Caballero*”, Holguín.

Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba.

Álvarez de Sayas, C. (1998). *Pedagogía Como Ciencia*. (Epistemología de la Educación). Versión en soporte magnético.

__________________ *La escuela en la vida. (*1999): Edititorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, Cuba.

Álvarez Pérez, M. (2004). *Interdisciplinariedad: Una aproximación desde la enseñanza –aprendizaje de las ciencias*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Álvarez, C. (1992). *La Escuela en la Vida.* La Habana: Editorial Félix Varela.

Álvarez, C. (1995). *Metodología de la Investigación Científica.* Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran", Universidad de Oriente, Santiago de Cuba.

Álvarez, C. (1996). *Hacia una escuela de excelencia.* Ciudad de La Habana: Editorial Academia.

Álvarez, C M. (1999). *La escuela en la vida. Didáctica*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ballester, S. y otros. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática Tomo II*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

_________________ (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática Tomo I.* Habana: Editorial Pueblo y Educación

_________________ (2002). *El Transcurso de las Líneas Directrices en los Programas de Matemática y la Planificación de la Enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

_________________ (1995). *La sistematización de los conocimientos matemáticos.* Ciudad de La Habana: Editorial Academia.

Branca, N. A. (1980). *Problem solving as a goal, process and basic skill.* In S. Krulik and R. Reyes (Eds.), Problem Solving in School Mathematics. Yearbook (pp. 3-8). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cala, E. (2002). *"El sistema de tareas como una alternativa metodológica dirigida a la formación y desarrollo del concepto función en los escolares del noveno grado de la secundaria básica.".* Tesis de Maestría*. ISP* "José de la Luz y Caballero".Holguín

Campistrous, L. (1993). *Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje*. La Habana: Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

Campistrous, L. (2002). *Didáctica y Solución de Problemas*. Soporte OREALC – UNESCO. La Habana.

Campistrous, L. y otros. (1989). Matemática 10. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprender a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Concepción, M. R. (1989). *El Sistema de Tareas como medio para la formación y desarrollo de los conceptos relacionados con las disoluciones en la*

Enseñanza General Media. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Holguín.

Contreras, I. (1995). *¿Qué aporte ofrece la investigación más reciente sobre aprendizaje para fundamentar nuevas estrategias didácticas?* Revista Educación No.1, p. 7-16, Costa Rica.

Cruz, M. (2002). *Estrategia Metacognitiva en la Formulación de Problemas para la Enseñanza de la Matemática.* Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Holguín.

Davidov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Davidov, V. y A. Radzikovsky (1984). *La obra científica de L.S Vygotsky y la Psicología moderna.* Revista de Educación Superior contemporánea No.3 Habana.

Davinson, Luis J. (1964). *Guía para el Maestro*. *Enseñanza Secundaria Básica*. Ministerio de Educación. Ciudad Libertad, Cuba.

Del Carmen, L. (1999). *El análisis y secuenciación de los contenidos educativos*. Barcelona: Editorial HORSORI.

Delgado, J. R. (1999). *La enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: La estructuración del conocimiento y el desarrollo de habilidades Generales matemáticas.* Tesis presentada en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana.

__________ (1995). *"Un sistema de habilidades generales para la enseñanza de la Matemática". Memorias de la 9na. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Docentes e Investigación en Educación Matemática"*. Ciudad de la Habana, Cuba.

Diccionario Enciclopédico Grijalbo. (1998). Barcelona, España.

Douady,R. y Parzysz ,B. (1998). *La Geometría en el Salón de Clases*. ICMI Study: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century. Capítulo 5. pp 159-192. (Edit). Mammana, C. y Villani, V., Kluwer Academic Publishers. Traducción de V. Hernández y otros.

Galperin, P. Y. (1986). *Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales.* En Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

García, G. (2002). *Compendio de Pedagogía.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Gill, D. Y Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencia e innovaciones*. Madrid: Ediciones Populares SA.

González, B. E. (2001*). La preparación del profesor para la utilización de la modelación matemática en el proceso de enseñanza – aprendizaje.* Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. UCLV. Santa Clara.

González, M. (1973) .*Matemática. Quinto Curso*. Complementos de Aritmética y Álgebra. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. (Versión 1954).

González, M.O. (1967b). *Matemática. Quinto curso. Complementos de Geometría y nociones de Cálculo Diferencial e Integral*: Editorial. Pueblo y Educación

González, P. y Valdés, H. (1992). *Psicología Humanista actualidad y desarrollo.* La Habana: Editorial Ciencias Sociales

Guétmanova, A. (1989). *Lógica*. Moscú: Editorial. Mir

Hernández, H. (1989). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior Cubana, experiencias en el Álgebra Lineal*. Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana.

Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Primera parte.* Ciudad Habana: Editorial Libros para la Educación.

Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Segunda parte*. Ciudad Habana: Editorial Libros para la Educación

Kilpatrick, J. (1998). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (pp. 1-15). Hillsdale NJ.

Klingberg, L. (1972). *Introducción a la Didáctica general*. Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Lenin, V. I. (1979). *Cuadernos Filosóficos.* La Habana: Editorial Progreso.

Lorentz, G. y otros. (1977). *Orientaciones metodológicas. Matemática. 10. grado. La Habana: Editorial* Pueblo y Educación.

Martínez, M. y Paradis, J. (1982*). El aprendizaje de las matemáticas. Revista Cuadernos de Pedagogía*. No. 88. Abril.

Mc Fadden, M. (1969). *Conjuntos, Relaciones y Funciones. Curso Programado de Matemática Moderna.* La Habana: Editorial Ciencia y Técnica.

Mederos, O .Y Ruiz, A. (2000). Aplicación de la Operación Clasificación de Conceptos al Estudio de los Cuadriláteros. Memorias del evento internacional RELME 2000.

Mederos, O. y González, B. E. (2005). *La modelación en la Educación Matemática. México: Editorial Facultad de ciencias Físico Matemáticas.*

MINED (1970a). *Matemática.* Separata dos. Octavo Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

_____________ (1970b). *Matemática*. Separata tres. Noveno Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

______________ (1970c). *Matemática*. Separata uno. Noveno Grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

______________ (1979a). *Matemática. Séptimo grado.* Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________ (1979b). *Matemática. Octavo grado*, Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________ (1979c). *Matemática. Noveno grado*. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1979d). *Orientaciones Metodológicas séptimo grado*. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1979e). *Orientaciones Metodológicas octavo grado*. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

_____________ (1979f). *Orientaciones Metodológicas noveno grado*. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1979g). Programa séptimo grado. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1979h). *Programa octavo grado*. Ciudad Habana. Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1979i). *Programa octavo grado*. Ciudad Habana. Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1985). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 3.* Ciudad Habana. Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1987). *Indicaciones Metodológicas Complementarias para la Simplificación de los programas.* Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1989). *Programa. Matemática. Décimo Grado*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1990a). *Libro de texto octavo grado*. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

____________ (1990b). *Orientaciones Metodológicas octavo grado.* Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________ (1990c). *Programa octavo grado.* Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________ (1992). *Adecuaciones a los programas.* Ciudad Habana. Editorial Pueblo y Educación.

__________ (1999). *Precisiones para el desarrollo del programa de matemática.* Ministerio de Educación. Ciudad Habana.

__________ (2000). *Selección de Temas Psicopedagógicos.* Ciudad Habana. Editorial Pueblo y Educación.

___________ (2001a). *Reunión Preparatoria Nacional del curso escolar 2001–2002. Tema: Dirección del aprendizaje.* Ciudad Habana Editorial Pueblo y Educación.

____________ (2001b). *Seminario Nacional para el Personal Docente*. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

___________ (2006). *Programa. Matemática. Décimo Grado*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Muñoz, F. (1990). *Matemática 8.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Omelianovsky, M. E. (1985). *La dialéctica y los métodos científicos generales de investigación*. (Tomo 1). La Habana: Editorial de Ciencias Sociales.

Ontoria, A. (1993*). Mapas conceptuales*. *Una teoría para aprender.* NARCEA. SA: Ediciones Madrid.

Ortiz, E. y Meriño, M. (1995). *Los Principios para la dirección del proceso pedagógico,* Material docente*,* I.S.P. José de la Luz y Caballero, Holguín.

Ortiz, E. y Meriño, M. (1996).*Lo didáctico o lo personológico en el proceso de enseñanza aprendizaje.,* Revista PFE, Vol.II No.1 Abril, I.S.P, Holguín.

Palacio, J. (2001). *Contextualización de Problemas Matemáticos.* Conferencia de Pedagogía 2001, Ciudad Habana.

Palacio, J. (2002). *Contextualización de problemas matemáticos.* Holguín.

PCC (1987). Programa del PCC. Ciudad Habana: Editorial Política.

Pérez, E. L. (2002). *La comunicación Matemática, una alternativa metodológica para potenciar su desarrollo mediante la geometría analítica.* Tesis de Maestría ISP “Silverio Blanco Núñez”, S.S.

Pérez, G. y Nocedo, I. (1983). *Metodología de la Investigación Pedagógica* y *Psicológica*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Polya, G. (1982*). Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas. Serie de Matemáticas. Décima reimpresión.

Ríbnikov, K. (1974). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Rodríguez, A. (1991). *Un esquema para la solución de problemas de matemática.* Revista Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Boletín No. 13. pp. 11 – 20.

Rubinstein (1977). *Principios de Psicología General*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ruiz Pérez, Aldo (2007). *La dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal.* Artículo en fase de publicación ISP” Silverio Blanco Núñez”, S.S.

Ruiz, A. (2002). *Procedimiento didáctico para el diseño de la integración de conocimientos matemáticos en décimo grado.* Tesis en opción al grado académico de Master en Didáctica de la Matemática. Holguín.

Santaló, L. A. (1967*). La Matemática moderna en la escuela primaria y la Secundaria Básica.* MINED, Ciudad Habana.

Shardakov, M. N. (1978). *El Desarrollo del Pensamiento del Escolar.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Silvestre, M. y Zilbersteín, J. (2002). *Hacia una Didáctica Desarrolladora*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Talízina, N. F. (1988*). Psicología de la Enseñanza.* Moscú: Editorial Progreso.

Tíjonov, A. y Kostomárov, D. (1987). *Conferencia de introducción a las matemáticas aplicadas.* Moscú: Editorial Mir.

Turner, L. Y otros (1988).*Se aprende a aprender*. Ciudad Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Vigotski, L. (1989 a). *Pensamiento y Lenguaje, en "El Proceso de Formación de la Psicología Marxista"*: Editorial Progreso.

Vigotsky, L. S. (1981). *Pensamiento y Lenguaje*. La Habana: Edición Revolucionaria.

Villegas,E. J.(2004). El tratamiento de conceptos y definiciones: Situación típica de la enseñanza de las ciencias*.* Álvarez, M. En, *Interdisciplinariedad: Una aproximación desde la enseñanza – aprendizaje de las ciencias. p*p (205-227). Ciudad de la Habana: Editorial pueblo y educación.

Anexo # 1.

Encuesta a profesores de matemática de preuniversitario.

Compañero profesor, necesitamos su cooperación para responder estas preguntas correspondientes a una investigación que estamos realizando sobre la formación y desarrollo del concepto función lineal a pedazos. Por favor, responda con la mayor sinceridad posible. No es necesario que escriba su nombre.

1. **¿Cómo considera el dominio que tiene sobre las funciones lineales a pedazos?**

Muy pobre ___pobre____ adecuado_____ bueno_____

2. **¿Cómo consideras las sugerencias metodológicas que se proponen en el Programa de Matemática para la formación y desarrollo del concepto función lineal a pedazos?**

Muy pobres____ pobres____ adecuadas_____ buenas_____

3. **Considera usted que la bibliografía sobre este tipo de función a su alcance es:**

Abundante ____ escasa ____ no hay ____

4. **¿En su departamento se realizan actividades metodológicas relacionadas con la formación y desarrollo de diferentes conceptos matemáticos?**

Siempre ___ a veces ____ nunca ____

5. **¿Los alumnos son capaces de identificar las funciones lineales a pedazos?**

Ninguno__ Muy pocos _____ Pocos _____ La mayoría____ Todos____

Anexo 2

Guía de entrevista a profesores de preuniversitario

Objetivo:

Acopiar opiniones sobre el nivel de preparación que tienen los profesores de Matemática del preuniversitario para usar la modelación en la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones lineales a `pedazos en el preuniversitario.

Preguntas a realizar.

1. **¿Cómo realiza usted el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones lineales a pedazos?**
2. **¿considera usted que puede lograrse una enseñanza de las funciones lineales a pedazos por medio de problemas?**
3. **¿Resuelven sus alumnos problemas donde el modelo matemático para su solución sean funciones lineales a pedazos?**
4. **¿Responden las orientaciones metodológicas, libros de texto y adecuaciones de los programas del preuniversitario a las exigencias actuales de una enseñanza a partir del planteamiento y resolución de problemas?**
5. **¿Qué factores lo limitan a usted para lograr que sus alumnos resuelvan problemas donde se apliquen las funciones lineales a pedazos?**
6. **¿Utilizas las herramientas computacionales que se tienen en estos momentos en las escuelas para optimizar el proceso de enseñanza – aprendizaje?**

Anexo 3

Diagnóstico inicial para alumnos de 10 grado

Estimado alumno:

En estos momentos en que te encuentras cursando el décimo grado de la enseñanza preuniversitaria, deseamos conocer cómo se ha realizado el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones lineales. Tenemos el propósito de perfeccionar el trabajo que en esta dirección, por lo que te agradecemos que colabores respondiendo con seriedad las preguntas siguientes.

1. Dadas las siguientes funciones identifica si son lineales. Argumenta

a) $y=9$

b) $f(x)=3x^2+2$

c) $g(a)=5a$

d) $p=2q+7$

e) $y=4x^3+3$

2. Ponga ejemplos de funciones lineales. Argumente por qué lo son.

3. Elabore un problema cuya solución requiera la búsqueda de una función lineal.

Anexo 4

Diagnóstico final para alumnos de décimo grado

Estimado alumno:

Deseamos conocer cómo se ha asimilado el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones lineales a pedazos. Tenemos el propósito de perfeccionar el trabajo que en esta dirección, por lo que te agradecemos que colabores respondiendo con seriedad las preguntas siguientes.

Dadas las siguientes funciones identifica cuáles son funciones lineales a pedazos y argumenta.

e) p=5q+3 q$\in$R

f) f(x)= $\begin{cases} x^2 - 3 & 0 \leq x \leq 3 \\ 5 & x \leq 0 \end{cases}$

g) g(x)= $\begin{cases} x + 2 & x \rangle 0 \\ 1 & x \langle 0 \end{cases}$

h) y=x^3+7 x$\in$R

2. Ponga ejemplos de funciones que sean lineales a pedazos y otras que no lo sean.

3. Elabora un problema cuya solución requiera la búsqueda de una función lineal a pedazos.

Anexo 5

Objetivo: Constatar el interés que sienten los alumnos por el aprendizaje de las funciones lineales a pedazos mediante las clases de Matemática de décimo grado.

Tiempo de observación:

Tema o asunto a tratar:

Aspectos a observar:

1. **En la clase observada cuando el alumno comienza el estudio del concepto función lineal a pedazos:**

___ muestra motivación por conocer el concepto.
___en ocasiones muestra motivación por conocer el concepto.
___no muestra motivación por conocer el concepto.

2. **Mientras el alumno estudia el concepto función lineal a pedazos:**

___ muestra buen estado de ánimo.
___ en ocasiones muestra buen estado de ánimo.
___ no muestra buen estado de ánimo.

3. **Después del alumno conocer el concepto:**

___ muestra interés por resolver ejercicios relacionados con el concepto.
___ en ocasiones muestra interés por resolver ejercicios relacionados con el concepto.
___ no muestra interés por resolver ejercicios relacionados con el concepto.

Anexo 6

Base de datos con los valores de los indicadores en la etapa inicial del pre-experimento.

Alumnos	Indicadores					
	1	2	3	4	5	6
1	B	B	B	B	B	B
2	M	M	M	M	M	M
3	M	M	M	M	M	M
4	B	B	B	B	B	B
5	M	M	M	R	M	R
6	B	B	B	B	B	B
7	B	B	B	B	B	B
8	R	R	M	R	R	R
9	B	R	M	B	M	B
10	R	M	M	R	M	M
11	B	B	R	B	B	B
12	B	B	B	B	B	B
13	M	M	M	M	M	M
14	M	M	M	B	M	M
15	B	M	M	B	B	B
16	M	M	M	M	M	M
17	B	R	M	B	B	B

18	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**
19	**M**	**M**	**M**	**M**	**R**	**M**
20	**M**	**M**	**M**	**R**	**R**	**M**
21	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
22	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
23	**B**	**R**	**R**	**B**	**B**	**B**
24	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**
25	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**
26	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
27	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**
28	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**
29	**M**	**M**	**M**	**R**	**R**	**R**

Anexo 7

Base de datos con los valores de los indicadores en la etapa final del pre-experimento.

Alumnos	Indicadores					
	1	2	3	4	5	6
1	B	B	B	B	B	B
2	B	B	B	B	B	B
3	B	B	B	B	B	B
4	B	B	B	B	B	B
5	B	B	B	B	B	B
6	B	B	B	B	B	B
7	B	B	B	B	B	B
8	B	B	B	B	B	B
9	B	B	B	B	B	B
10	B	B	B	B	B	B
11	B	B	B	B	B	B
12	B	B	B	B	B	B
13	B	B	B	R	R	R
14	R	R	M	B	B	B
15	B	B	B	B	B	B
16	B	B	B	B	B	B
17	B	B	B	B	B	B
18	B	B	B	B	R	R

19	**B**	**B**	**R**	**R**	**B**	**B**
20	**B**	**M**	**M**	**B**	**B**	**R**
21	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
22	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
23	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
24	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
25	**B**	**M**	**M**	**M**	**R**	**M**
26	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
27	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**
28	**M**	**M**	**M**	**R**	**M**	**M**
29	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**