UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS

CAPITÁN "SILVERIO BLANCO NÚÑEZ"

SANCTI SPÍRITUS

EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES DE PREUNIVERSITARIO ANTE LOS ERRORES COGNITIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES FRACCIONARIAS

TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MASTER EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MENCIÓN EN EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

Luidder Valdés Antúnez

2012

UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS

CAPITÁN "SILVERIO BLANCO NÚÑEZ"

SANCTI SPÍRITUS

EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES DE PREUNIVERSITARIO ANTE LOS ERRORES COGNITIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES FRACCIONARIAS

TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MASTER EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MENCIÓN EN EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

AUTOR: Luidder Valdés Antúnez

TUTORES: DrC Leonardo Ramón Marín Llavert

MsC Osvaldo Tardío Ruedas

2012

Considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros estudiantes.

Roland Charnay

DEDICATORIA

A mis padres, hermanas, amigos, colegas por su ayuda y comprensión, a Lianet, mi esposa por darme el apoyo necesario en este momento.

El autor

AGRADECIMIENTOS

A los MsC. Osvaldo Tardío Ruedas y Bernardo Zedeño Calzada por su maravilloso tiempo dedicado a la conformación de este trabajo.

A mi tutor, DrC Leonardo Marín LLavert por sus valiosas enseñanzas y su consagración al trabajo.

A mis compañeros de trabajo y amigos que me alentaron y me brindaron su ayuda material y espiritual.

El autor

SINTESIS

El tema seleccionado tiene pertinencia y actualidad, se trata del tratamiento a los errores cognitivos para la resolución de ecuaciones fraccionarias en el preuniversitario. Es propósito de esta investigación proponer un sistema de ejercicios dirigidos a favorecer el desempeño de los estudiantes de décimo grado del Instituto Preuniversitario “Eduardo García Delgado” ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias. La propuesta fue aplicada en la institución anteriormente citada en una muestra de treinta y cinco estudiantes seleccionados intencionalmente. Durante el proceso investigativo se emplearon métodos del nivel teórico, empírico y procedimientos de la estadística descriptiva, que favorecieron la búsqueda, procesamiento y análisis de la información. Por los resultados alcanzados se recomienda su aplicación en otros grupos de décimo grado de esta propia institución educativa.

INDICE GENERAL

CONTENIDOS **PÁGINAS**

INTRODUCCIÓN

La escuela en Cuba, es depositaria de un encargo social fundamental y complejo, se encuentra inmersa en la batalla de ideas con las imprescindibles transformaciones desde el punto de vista político-ideológico, metodológico y tecnológico en todos los campos, ocupan un papel predominante la educación.

La formación de nuevas generaciones, para hacerlos capaces de defender y desarrollar las conquistas del socialismo, de participar activa y creadoramente en la construcción de la nueva sociedad. Tal encargo supone desarrollar una personalidad multifacética, armónica y esta función social corresponde en gran medida a la escuela, quien dirige el aprendizaje de los estudiantes y debe coordinar todas las influencias educativas que sobre el actúan.

En este trabajo se asume el punto de vista del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, según el cual “hablamos de error [cognitivo] cuando el estudiante realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.” (Godino, Batanero y Font, 2003: 69). Desde esta perspectiva se considera que un error cognitivo de un estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, es un resultado parcial o final que se desvía del resultado correcto esperado por otros, especialmente por el docente, producto de una actuación de buena fe al resolver una tarea de aprendizaje o en la comunicación a propósito del contenido de enseñanza y aprendizaje.

Al asumir una concepción del aprendizaje que compulse el desarrollo mediante la resolución de tareas por parte del estudiante, dependiente de la ayuda del profesor, de un compañero más capaz o de un medio didáctico, la dificultad, y el error como su manifestación (Gómez y Rico, 2002), son inherentes al buen aprendizaje.

En consonancia con lo expresado anteriormente, Pochulu, señala: los errores forman parte de las producciones de la mayoría de los estudiantes y constituyen, generalmente, un elemento estable en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo y teniendo en cuenta que el correcto aprendizaje de la Matemática es un objetivo común en los procesos de enseñanza de la misma, es claro que las respuestas incorrectas a las cuestiones que se les plantean a los estudiantes serán consideradas – por parte de quienes están a cargo de su instrucción – como señales de serias deficiencias, e incluso fracaso en el logro de los objetivos propuestos. Pochulu (1994: 1).

Relacionados con el concepto de error, están los conceptos de comisión, identificación, valoración y corrección de un error por parte del alumno. El primero ha sido definido por Brousseau, Davis y Werner (citados por Rodríguez, 1989) en el contexto de situaciones en que la actuación del alumno no se corresponde con lo esperado por el docente:

Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera.

Desde este enfoque, un estudiante comete un error cuando ejecuta una acción que lo conduce a un resultado que se desvía del correcto, de manera que la comisión del error es el proceso que conduce a un resultado incorrecto: el error.

En tanto la comisión de un error no es una acción de cuyos efectos negativos el comisor tenga conciencia (Mulhern, citado por Engler, 2004), la identificación se define como el proceso de internalización de que se ha ejecutado una acción conducente a un resultado incorrecto.

La valoración de un error por un estudiante, es el proceso en el que este elabora juicios de valor acerca de la desviación del resultado de una acción respecto al resultado correcto y los emite por medio del lenguaje. Dada la relación funcional entre pensamiento y lenguaje (Vigotski, 1981) estos juicios valorativos deben poderse expresar mediante el lenguaje externo.

La corrección de un error por un estudiante es el proceso mediante el cual este con la ayuda de otros, especialmente del docente, ejecuta acciones encaminadas a la obtención del resultado correcto a partir de que ha identificado y valorado el error cometido.

La identificación, valoración y corrección de un error como procesos de internalización, no sólo son propios de la actuación de quien comete el error, sino también de otros estudiantes y del docente; sin embargo, la identificación y valoración de un error por otros y la información de su existencia al comisor, en muchos casos no son suficientes para que este lo identifique, valore y corrija, pues la internalización no puede reducirse a la emisión de mensajes por los otros, sino que, como señala Vigotski (1979, citado por Rebollo, 1999: 36), es un proceso de "reconstrucción interna de una operación externa", en el cual es imprescindible la actuación de quien comete el error.

Las tres nociones definidas se integran en el concepto de desempeño del estudiante ante los errores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, concebido por el autor de esta tesis, como el proceso en el cual el estudiante identifica, valora y corrige errores cometidos por él o por otros.

En tanto los errores son resultados que acompañan la actividad y la comunicación del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Villavicencio, 2004), el desempeño ante los errores no está exento de errores.

Varios investigadores han incursionado en esta temática fundamentando la necesidad del análisis de las causas de los errores y la importancia de que los estudiantes los identifiquen, valoren y corrijan. Entre otros son significativos: Godino, Batanero y Font, 2003; Pochulu, 1994; Radatz, 1980; Thorndike, 1917; Mulhern, 1989; Rico, 1995; Booth, 1984; Chamorro, 1945; Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992; Martínez, 2002; Socas, 1997; Matz, 1980, Álvarez, 2005.

Según consta en la bibliografía consultada, la investigación sobre los errores de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática ha sido un tema de interés en el extranjero desde la segunda mitad del pasado siglo. En los trabajos consultados de los investigadores citados anteriormente, abunda la tipificación de los errores y su tratamiento curricular, pero no se identifican propuestas que traten específicamente los errores en la resolución de ecuaciones fraccionarias.

En el ámbito cubano se aprecia un interés creciente por el estudio de los errores de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, sobre todo a partir del momento en que este tema se incluye en los lineamentos generales de la asignatura por la Comisión Nacional de Matemática del MINED.

La investigadora cubana Álvarez ha tipificado los errores cometidos y elaborando recomendaciones para el perfeccionamiento del desempeño de los estudiantes ante estos errores; sin embargo, en ninguno de los trabajos consultados se realiza una tipificación de los errores en la resolución de ecuaciones fraccionarias ni se ofrecen recomendaciones para mejorar el desempeño de los estudiantes ante tales errores.

A partir de la experiencia profesional del autor de esta investigación unido a la aplicación de instrumentos tales como: observación de la práctica pedagógica cotidiana, encuestas, entrevistas, pruebas pedagógicas ha determinado la siguiente **situación problemática:**

- Falta de conocimiento al resolver ecuaciones fraccionarias,
- Débil proceso para identificar, valorar y corregir sus propios errores y en mayor medida identificar, valorar y corregir los errores cometidos por los demás.
- Pasividad al cometer errores.
- los ejercicios que aparecen en las orientaciones metodológicas, libros de textos y el software educativo “eureka” de la colección futuro, no están encaminados a favorecer el desempeño de los estudiantes ante los errores. una situación similar se observa en las teleclases para el preuniversitario que se dedican a este contenido.

Las consideraciones referidas anteriormente propiciaron el planteamiento del siguiente **problema científico:** ¿Cómo favorecer el desempeño de los estudiantes de preuniversitario ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias?

Partiendo del problema planteado se identifica como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y como **campo de acción** el desempeño de los estudiantes del preuniversitario ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias.

Se propone el **objetivo** siguiente: proponer un sistema de ejercicios dirigidos a favorecer el desempeño de los estudiantes de décimo grado del Instituto Preuniversitario "Eduardo García Delgado" ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias.

Las **preguntas científicas** que guiaron la investigación fueron las siguientes:

1. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática para el desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias?
2. ¿Cuál es la situación real que presentan los estudiantes del preuniversitario "Eduardo García Delgado" ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias?
3. ¿Cuál debe ser el sistema de ejercicios a elaborar para favorecer el desempeño de los estudiantes de décimo grado del preuniversitario "Eduardo García Delgado" ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias?
4. ¿Qué efectos tiene el sistema de ejercicios elaborado para favorecer el desempeño de los estudiantes de décimo grado del preuniversitario "Eduardo García Delgado" ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias?

Las **tareas científicas** ejecutadas fueron las siguientes:

1. Determinación de los fundamentos teóricos sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática para el desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias.
2. Identificación de la situación real que presentan los estudiantes del preuniversitario "Eduardo García Delgado" ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias.
3. Elaboración del sistema de ejercicios para favorecer el desempeño de los estudiantes de décimo grado del preuniversitario "Eduardo García Delgado" ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias.

4. Evaluación de la efectividad del sistema de ejercicios elaborado para favorecer el desempeño de los estudiantes de décimo grado del preuniversitario “Eduardo García Delgado” ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias.

Sobre la base del método materialista-dialéctico durante la investigación se utilizaron los métodos siguientes:

Métodos del nivel teórico:

- Analítico-sintético: Permitió a partir de la revisión bibliográfica y de la elaboración de instrumentos, profundizar en los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al resolver ecuaciones fraccionarias.
- Histórico-lógico: Permitió conocer los antecedentes del problema, su evolución y desarrollo.
- Sistémico estructural: Para determinar las relaciones entre los diferentes ejercicios que conforman la propuesta de solución, dándole carácter sistémico a llos ejercicios que se presentan en esta obra.

Métodos del nivel empírico:

- Observación pedagógica: Permitió medir la comunicación y la actitud de los estudiantes en su actuación ante los errores cometidos por ellos o sus compañeros.
- Prueba pedagógica: Permitió diagnosticar el estado real del desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones fraccionarias.
- Entrevista: Permitió constatar opiniones sobre el nivel de dominio que tienen los docentes de los preuniversitarios acerca de los errores y su tratamiento en la resolución de ecuaciones fraccionarias.

Procedimientos de la estadística descriptiva:

Tablas de frecuencia: Estas se utilizaron para la presentación de los resultados (tablas), la sistematización y comparación de la información obtenida que permitió hacer conclusiones válidas para la exposición de los resultados obtenidos.

En la investigación se utilizó como **población** a todos los estudiantes de décimo grado del preuniversitario "Eduardo García Delgado" del municipio de Trinidad y como **muestra**, de carácter intencional, los 35 estudiantes del grupo 10.5 de este grado, los cuales atendía el autor de la tesis.

Durante la investigación se determinaron las siguientes **variables:**

- **Variable independiente:** sistema de ejercicios, entendida como la ejecución del proceso de enseñanza-aprendizaje correspondiente a la resolución de los ejercicios que lo componen por los estudiantes de un grupo de décimo grado del preuniversitario "Eduardo García Delagado" de Trinidad.
- **Variable dependiente:** nivel de desempeño del estudiantes ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias entendido como el estado de este desempeño en un momento determinado.

Operacionalizaciòn de la variable dependiente:

Dimensiones	**Indicadores**
1. Cognitivo-instrumental	1.1 Identificar la ecuación. 1.2 Descomponer en factores los denominadores. 1.3 Se halla mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores y se excluyen los valores que anulan el (m.c.m). 1.4 Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el (m.c.m) para elimiminarlo del denominador. 1.5 Se resuelve la ecuación resultante. 1.6 Se realiza la comprobación en la ecuación original. 1.7 Se escribe el conjunto solución.

2. Comunicacional	2.1 Crítica ante sus propios errores. 2.2 Crítica ante los errores de los demás.
3. Actitudinal	3.1 Aceptación del error. 3.2 Interés por la corrección de los errores. 3.3 Disposición para ayudar a corregir errores de los otros.

La novedad científica consiste en que no se conoce en la enseñanza preuniversitaria, según la bibliografía consultada, de trabajos dirigidos a favorecer el desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones fraccionarias; a pesar de que este tema se incluye en los lineamentos generales de la asignatura Matemática a nivel nacional.

La **significación práctica** consiste en la elaboración de un sistema de ejercicios para la solución de un problema que subsiste en las aulas de la enseñanza preuniversitaria.

La presente tesis tiene la siguiente estructura: introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. Está conformada por dos capítulos; el primero contiene los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática para favorecer el desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias. En el segundo capítulo se da a conocer el sistema de ejercicios concebido, así como la evaluación de su efectividad a partir de su implementación en la práctica pedagógica mediante un pre-experimento.

CAPÍTULO I. FUNDAMENTOS TEÓRICOS QUE SUSTENTAN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA PARA FAVORECER EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES ANTE LOS ERRORES COGNITIVOS AL RESOLVER ECUACIONES FRACCIONARIAS.

1.1 El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario.

El proceso de enseñanza-aprendizaje ha sido históricamente caracterizado de formas diferentes que van desde su identificación como proceso de enseñanza con un marcado acento en el papel central del maestro como transmisor de conocimientos, hasta las concepciones más actuales, en las que se concibe este proceso como un todo integrado en el que se pone de relieve el papel protagónico del estudiante. En este último enfoque se revela como característica determinante la integración de lo cognitivo y lo afectivo, de lo instructivo y lo educativo, como requisitos psicológicos y pedagógicos esenciales." (Rico y Silvestre, 1997: 69).

Las autoras citadas también se refieren a que [...] este proceso tiene lugar en el transcurso de las asignaturas escolares y tiene como propósito esencial contribuir a la formación integral de la personalidad del estudiante, constituyendo la vía mediatizadora fundamental para la adquisición de los conocimientos, procedimiento, normas de comportamiento y valores legados por la humanidad. Así en el desarrollo del proceso el escolar aprenderá diferentes elementos del conocimiento – nociones, conceptos, teorías y leyes- que forman parte del contenido de las asignaturas que a la vez se apropiará de los procedimientos que el hombre ha adquirido para la utilización del conocimiento"

Las líneas directrices son: "[...] lineamientos que penetran todo el curso escolar con respecto a los objetivos particulares a lograr, los contenidos que deben ser objeto de apropiación y a los métodos a elegir" (Ballester y otros, 1992: 157).

El tratamiento de las ecuaciones constituye un punto básico en la formación de los estudiantes, de ahí que esté presente como objetivo en casi todos los grados escolares, formando parte de la línea directriz "Trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas". Esta se pone de manifiesto en el tratamiento de las ecuaciones fraccionarias en el décimo grado del preuniversitario cuando los estudiantes son capaces de describir e interpretar situaciones representadas a través de ecuaciones algebraicas, lo cual forma parte de los objetivos de grado, según consta en el programa de la asignatura (MINED, 2007: 2):

- Sistematizar y profundizar los contenidos referentes a trabajo con variables que conocen los estudiantes de grados anteriores.
- Plantear ecuaciones que satisfagan determinadas condiciones sobre la base del dominio de los conceptos de ecuación, dominio básico de una ecuación, ecuación equivalente, solución y conjunto solución de una ecuación.
- Resolver problemas de la vida práctica de carácter político-ideológico, económico-social y científico-ambiental, que se modelen con los recursos de la aritmética o con las ecuaciones fraccionarias.

Entre las competencias matemáticas de los estudiantes concebidas por la Comisión Nacional de Matemática del MINED se encuentra: “Autorregular y dirigir su aprendizaje”, la que se pone de manifiesto cuando se desarrollan sentimientos, actitudes y cualidades de la personalidad que se traduzcan en formas de conducta, convicciones y puntos de vista acorde con los valores que defendemos.

Otra competencia que se pone de manifiesto en el tratamiento de las ecuaciones fraccionarias es: “actuar e interactuar con otros de acuerdo con los principios de nuestra Revolución Socialista”, cuando se emplean estrategias de orientación, planificación, supervisión y control, incluyendo la identificación y valoración de los errores cometidos.

1.2 Las ecuaciones fraccionarias como contenido de enseñanza y aprendizaje en el preuniversitario.

Según Ballester y otros (2000: 191), las componentes del contenido matemático están dadas por los conceptos, proposiciones, procedimientos y razonamientos. En los contenidos referidos a la resolución de ecuaciones fraccionarias se estudian los conceptos de variable, ecuación; solución, conjunto solución y resolución de una ecuación y ecuación fraccionaria.

Una variable es un símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto y una ecuación, una igualdad en la que intervienen una o más variables, es decir, es una igualdad entre expresiones algebraicas.

Después de que el alumno se apropia del concepto de ecuación de una variable, conoce que un elemento del dominio básico de la variable que convierte la ecuación en una proposición verdadera mediante sustitución por este elemento, se llama solución de la ecuación.

El conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación se llama conjunto solución. El proceso de determinación de este conjunto recibe el nombre de resolución de la ecuación.

Una ecuación fraccionaria es aquella en la variable (incógnita) aparece en los denominadores de las fracciones (al menos en uno de ellos). (Muñoz y otros,2005:119).

Toda ecuación fraccionaria se puede representar en la forma $\frac{P_{(x)}}{Q(x)} = 0$, $(Q(x)) \neq 0$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Ejemplos de ecuaciones fraccionarias, las igualdades siguientes:

a) $\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}=4$

b) $\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$

c) $\frac{3}{x-5}+\frac{x^2+7}{x^2-2x-15}=-\frac{2}{x+3}$

Como parte de los contenidos que se estudian en el décimo grado del preuniversitario se encuentran las proposiciones siguientes:

1. El conjunto solución de una ecuación siempre existe si pertenece al dominio de definición de la ecuación y al conjunto solución. Cuando la ecuación no tiene solución este es el conjunto vacío ó nulo se denota por los símbolos {}, Ø.

2. Toda ecuación fraccionaria de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, $Q(x)\neq 0$ puede tener en $\Re$ una única solución si la ecuación entera obtenida es una ecuación lineal de la forma $ax+b=c$ $(a\neq 0)$, $x=-\frac{b}{a}$ solución real $S=\{-\frac{a}{b}\}$, si es cuadrática o de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$, una solución real sí $D=0$ solución

$S=\{-\frac{b}{2a}\}$ dos soluciones sí D>0 $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ solución $S=\{x_1,x_2\}$, D<0 no tiene solución $S=\{\}$ ó $S=$Ø , ¨D¨ (**discriminante)**.Si es un polinomio de la forma $P(x)=0$ de grado (n>2) ,puede tener una, dos, tres o más de tres soluciones.

En el preuniversitario se demuestra la segunda proposición y se estudian procedimientos de resolución de ecuaciones fraccionarias. Entre estos se encuentran las reflexiones lógicas y la utilización de transformaciones equivalentes, los cuales tienen carácter algorítmico.

Para comenzar el análisis de los procedimientos es preciso aclarar que por "[…] reflexiones lógicas se entiende a los procedimientos de solución para los cuales no se emplean fórmulas o reglas de transformación, si no la solución se logra a través de la aplicación de conocimientos sobre el significado de las operaciones de cálculo y sus operaciones inversas, la relación de orden, en el dominio que se trabaje, la aplicación de definiciones, de pruebas sistemáticas y a través de la aplicación de leyes de cálculo." (Ballester y otros, 2000: 224).

El autor de este trabajo considera que esta vía de resolución es aplicable a todos los tipos de ecuaciones que se estudian en la escuela, dada la posibilidad de fijar conocimientos sobre conceptos, teoremas y procedimientos, a partir de contenidos ya estudiados. Para ello se requiere que el alumno esté consciente de su accionar, de los elementos y recursos matemáticos a aplicar, sin necesidad de una estructuración metodológica detallada.

Si bien es cierto lo que se plantea con anterioridad, resolver ecuaciones por reflexiones lógicas exige un gran trabajo mental por parte de los estudiantes. Por tales motivos resulta interesante mostrar o hacer el tratamiento metodológico a partir de *procedimientos de resolución de carácter algorítmico,* los que se caracterizan por ser aplicados a todas las ecuaciones de un tipo determinado, asegura la determinación de todas las soluciones y garantiza un trabajo racional y un uso correcto de la terminología y simbología matemáticas.

Se considera que en el uso de procedimientos algorítmicos, es primordial el proceso de identificación del tipo de ecuación a resolver, para posteriormente determinar el algoritmo de resolución a emplear y llevar a cabo las acciones de transformación correspondientes, aplicando las propiedades o identidades según sea el caso. Esto permite desarrollar en lo estudiantes habilidades de identificación y transformación, las cuales son importantes para el desarrollo de las formas de pensamiento lógico-matemático.

En sentido general, se evidencian las ventajas que ofrece cada uno en sí, pero si bien se plantea que “no deben ser tratados a la vez” (Ballester y otros, 2000: 224), tampoco deben excluirse, porque el tratamiento mediante *reflexiones lógicas* influye de forma notable en el saber y poder de los estudiantes al permitirle comprender y aplicar razonablemente los *procedimientos de resolución de carácter algorítmico.*

Entre los procedimientos que como condiciones previas del nivel de partida deben dominar los estudiantes del preuniversitario para resolver ecuaciones, se encuentran los siguientes:

- Los procedimientos de cálculo en los diferentes dominios numéricos.
- Los procedimientos de cálculo algebraico.
- Las reglas de transformaciones equivalentes.
- El procedimiento para realizar la comprobación de la solución de una ecuación mediante sustitución.
- Los procedimientos por reflexiones lógicas.

Dentro de los procedimientos que se sistematizan en este nivel se encuentra el de determinar la solución de una ecuación fraccionaria que consiste en:

1. Determinar el dominio de definición de la ecuación ó conjunto de valores admisibles de la variable (c.v.a).

2. Se multiplica por el mínimo común entre los denominadores (m.c.m) ambos miembros de la ecuación.

3. Se procede a efectuar las operaciones de cálculo indicadas.

4. Se reducen términos semejantes hasta obtener la ecuación entera correspondiente.

5. Se resuelve la ecuación obtenida.

6. Se despeja la(s) variable(s).

Ejemplo:

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $x+\frac{1}{x-3}=\frac{3x-8}{x-3}$ se procede como sigue:

$x-3=0 \rightarrow x=3$ Dominio de definición de la ecuación Dom $=\{x\in\Re; x\neq 3\}$ ó Dom = $\Re/\{3\}$

$x+\frac{1}{x-3}=\frac{3x-8}{x-3}$ */ $(x-3)$ Se múltiplica ambos miembros de la ecuación por el (m.cm) de los denominadores de la ecuación para eliminar dichos denominadores.

$x(x-3)+1=3x-8$ Se procede a realizar las operaciones de cálculo indicadas.

$x^2-3x+1-3x+8=0$ Se reducen términos semejantes y se resuelve la ecuación obtenida por el procedimiento de resolución de la misma.

$x^2-6x+9=0$ Se factoriza (si es posible) el trinomio obtenido x^2+px+q

$(x-3)^2=0 \rightarrow x-3=0 \rightarrow x=3\notin$ Dom Se despeja ¨ x ¨.

S= { } ó S= Ø

También se aplica el procedimiento para comprobar la solución de una ecuación que consiste en:

1. Sustituir la solución en la ecuación original.
2. Calcular en ambos miembros.
3. Si se obtiene una proposición verdadera, sin haber cometido errores en el proceso, la solución de la ecuación es correcta y se escribe el conjunto solución.

En este sentido se debe tener en cuenta que la aplicación de los procedimientos citados anteriormente no garantiza que se cometa o no error, por lo que los errores, su identificación, valoración y corrección son también componentes de estos procedimientos que acompañan a su aprendizaje.

1.3 Los métodos, medios, formas de organización y tiempo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones fraccionarias en el preuniversitario.

Existe una relación dialéctica entre métodos y procedimientos, en función del objetivo de la clase y de las condiciones para realizarlo, de las características de los estudiantes entre otras, lo que hace que en un momento dado un procedimiento pueda convertirse en método y viceversa (Zilberstein y Silvestre, 2002: 82).

Para el tratamiento de las ecuaciones se sugieren varias formas de presentar el contenido (Ballester, 2000: 224), las cuales conducen a que el alumno se apropie del procedimiento de resolución acorde al tipo de ecuación. Las formas mencionadas pueden ser:

- Mediante una exposición del procedimiento haciendo uso de algún medio de enseñanza que lo apoye.
- Se busca el procedimiento en una elaboración conjunta sobre la base de la experiencia de los estudiantes.
- El alumno busca la vía de resolución de forma independiente.

En el preuniversitario las ecuaciones fraccionarias se enseñan partiendo de los conocimientos precedentes que poseen los estudiantes de cálculo aritmético, de cálculo algebraico, así como los procedimientos para resolver las mismas. A este contenido se dedican 60 horas-clases según el programa de la asignatura.

Entre los medios de enseñanza que se utilizan en el preuniversitario se encuentra la televisión para la visualización de video clases para calzar ó resaltar algo, también se utiliza el libro de texto de la asignatura en el que los contenidos aparecen desarrollados de forma sintética con su respuesta, pero estos no son suficientes. De igual forma se utilizan los software educativos de la Colección "Futuro" con énfasis en "Eureka", el cual se maneja tanto en las clases como en las actividades de trabajo independiente que se les orientan a los estudiantes para realizarlas en el tiempo de máquina. Las láminas y otros medios son utilizados por los profesores según se considere necesario.

El proceso de enseñanza-aprendizaje en el preuniversitario consta de dos momentos fundamentales, el primero es la clase donde el alumno recibe los contenidos impartidos por el profesor. La clase tiene una duración de 45 minutos.

El segundo momento se dedica atender a los estudiantes con alguna dificultad en dicho contenido, con una duración de 45 minutos cada uno, de forma continua. Cada turno comprende tres momentos fundamentales, el primero se dedica a la aclaración de las dudas que pudieron quedar de la clase y a conformar aquellas notas de clase que puedan haber quedado inconclusas, un segundo momento se dedica a la ejercitación del contenido y al trabajo independiente de los estudiantes, el cual es evaluado tanto de forma oral como escrita y un tercer momento en el que se realizan las conclusiones de la clase, se orientan las tareas para el trabajo independiente fuera de la clase, así como la bibliografía a utilizar para profundizar en el estudio de los contenidos.

Las actividades de trabajo independiente que se dejan orientadas en los turnos de clases son realizadas por los estudiantes en las casas de estudio creados al efecto donde los más aventajados brindan atención especial a aquellos que presentan mayores dificultades. También se realiza el apadrinamiento directo de un alumno aventajado a aquellos con más carencias en el aprendizaje. Mediante este sistema los profesores logran resolver en gran medida los problemas de aprendizaje de sus estudiantes, así como desarrollar sentimientos, actitudes y cualidades de la personalidad que se pueden apreciar en la forma de conducta y puntos de vista a medida que van avanzando en el curso escolar.

De gran importancia resulta el control que realiza el profesor de las tareas desarrolladas por los estudiantes en las casas de estudio, lo que los compromete y presiona para un mejor aprovechamiento de la actividad.

1.4 La dinámica del PEA de las ecuaciones fraccionarias. Principios y funciones didácticas

> Existe un conjunto de principios didácticos dirigidos a un proceso de enseñanza-aprendizaje que instruya, eduque y desarrolle" (Zilberstein y Silvestre, 2002: 22).

Estos principios son los siguientes:

- Diagnóstico integral de la preparación del alumno para las exigencias del PEA, nivel de logros y potencialidades en el contenido del aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo.
- Estructurar el PEA hacia la búsqueda activa del conocimiento por el alumno, teniendo en cuenta las acciones a realizar en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad y el uso de medios de enseñanza que favorezcan la actividad independiente y la búsqueda de información.
- Concebir un sistema de actividades para la búsqueda y exploración del conocimiento por el alumno, desde posiciones reflexivas, que estimule y propicie el desarrollo del pensamiento y la independencia en el escolar.
- Orientar la motivación hacia el objeto de la actividad de estudio y mantener su constancia. Desarrollar la necesidad de aprender y de entrenarse en cómo hacerlo.
- Estimular la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos de pensamiento y el alcance del nivel teórico en la medida que se produce la apropiación de los conocimientos y se eleva la capacidad de resolver problemas.
- Desarrollar formas de actividad y de comunicación colectivas, que favorezcan el desarrollo intelectual, logrando la adecuada interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de aprendizaje, así como la adquisición de estrategias de aprendizaje por el alumno.
- Atender las diferencias individuales en el desarrollo de los escolares en el tránsito del nivel logrado hacia el que se espera.
- Vincular el contenido de aprendizaje con la práctica social y estimular la valoración por el alumno en el plano educativo y los procesos de su formación cultural en general.

A criterio del autor estos principios son aplicables al PEA de las ecuaciones en el preuniversitario ya que a través de ese contenido se puede lograr en los estudiantes tanto su instrucción, como su educación y desarrollo, y teniendo en cuenta estos principios de la didáctica se ayuda en gran medida a eliminar el desnivel que existe en los estudiantes de esta eseñanza, además permiten estructurar el PEA hacia la búsqueda activa del conocimiento por el alumno, teniendo en cuenta las acciones a realizar por este para que tenga una posición activa en los diferentes momentos.

La estructuración del contenido de enseñanza no puede realizarse independientemente de la planificación didáctica y metodológico-organizativa. Por eso cada una de las partes de la clase se determina tanto desde los puntos de vista del contenido, como también desde el punto de vista didáctico-metodológico.

Para esta planificación del PEA es necesario tener en cuenta y reflexionar sobre las funciones didácticas: aseguramiento del nivel de partida, motivación y orientación hacia el objetivo, elaboración del nuevo contenido, fijación y evaluación (Ballester y otros, 2000: 98).

En el **aseguramiento del nivel de partida** el profesor debe tener presente las condiciones previas que posee el alumno que sirven de base al contenido objeto de estudio, las cuales no solo se aprecian en determinados conocimientos, habilidades y capacidades de los estudiantes, sino también en las actitudes, los hábitos y las convicciones, así como en las cualidades características de la personalidad del alumno (Ballester y otros, 2000: 120).

En el caso del tratamiento a la resolución de ecuaciones se deben tener en cuenta los conocimientos que posee el alumno sobre cálculo numérico y algebraico, transposición de términos, y sustitución de variables, entre otros que constituyen la base de este contenido.

La **orientación hacia el objetivo y la motivación** como actividades del maestro y los estudiantes, están estrechamente relacionadas entre sí, pues en general, en la motivación de la clase el profesor indica o elabora una motivación conjuntamente con el objetivo y para ese objetivo. Por orientación hacia el objetivo se debe entender la información anticipada a los estudiantes del resultado de su actividad, esta debe producirse cuando el problema de la unidad, clase, etc. ha sido motivado, cuando el alumno comprende que hay algo que no sabe y esto que desconoce está bien caracterizado mediante la vía con la que debe alcanzarse (Ballester y otros, 2000: 99).

En este sentido a la hora de dirigir el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales se debe orientar a los estudiantes la importancia y la aplicación que tienen las mismas en la vida práctica y ejemplificarlo para que tomen conciencia de su alcance.

Para la **elaboración del nuevo contenido** es necesario analizar la vía metodológica más adecuada, se precisa la explicación del maestro, se medita sobre el tipo de demostración, conceptos y otros contenidos que serán tratados, se determina el momento donde se utilizarán los distintos medios de enseñanza preparados por el profesor, entre ellos, los software de la Colección “Futuro” (Ballester y otros, 2000: 232).

En el caso de las ecuaciones fraccionarias esta función didáctica transcurre durante la apropiación por el alumno de los contenidos correspondientes al tema, incluidos los conceptos, las proposiciones, los razonamientos y los procedimientos de resolución analizados en el epígrafe 1.1.3, así como la identificación, valoración y corrección de los errores que le están asociados a su aprendizaje. En este proceso es importante el papel activo de cada alumno y la ayuda de sus compañeros, del profesor y de medios como el software “Eureka” de la Colección “Futuro”.

La **fijación de conocimientos**, habilidades y capacidades tiene gran importancia en la asignatura Matemática. Primero por el carácter sistemático de la materia y segundo por la estructura de toda la formación matemática en la escuela, donde cada nuevo contenido se apoya en contenidos anteriores. Por fijación se entiende el concepto superior de las formas especiales: ejercitación, repaso, sistematización y profundización (Ballester y otros, 2000: 128).

Esta función didáctica en el preuniversitario transcurre mediante la ejercitación, repaso, sistematización y profundización que se realiza en los turnos presenciales, así como en el tiempo de máquina donde se puede trabajar con la ejercitación variada que existe en el software “Eureka” sobre resolución de ecuaciones fraccinaria.

La **evaluación** consiste en la elaboración de juicios de valor sobre el aprendizaje de los estudiantes a partir del análisis ─ mediante un método de interpretación ─ de la resolución de determinadas tareas. Entre las formas fundamentales de evaluación se encuentran: evaluación sistemática, oral, trabajo control parcial, trabajo extraclases y las pruebas finales (Ballester y otros, 2000: 155).

Para la evaluación de la resolución de ecuaciones fraccionarias se orienta aplicar evaluaciones orales y escritas de este contenido. En las orientaciones no se tienen en cuenta el desempeño entre los errores al resolver ecuaciones fraccionarias por lo que se propone que esta se haga mediante ejercicios como los que aparecen en el sistema de ejercicios presentado.

1.5 Los errores en la resolución de ecuaciones fraccionarias mediante la aplicación de transformaciones equivalentes

Según el Diccionario de la *Real Academia Española* (RAE) el error es:

- Concepto equivocado o juicio falso.
- Acción desacertada o equivocada.
- Cosa hecha erradamente.
- Vicio del consentimiento causado por equivocación de buena fe, que anula el acto jurídico si afecta a lo esencial de él o de su objeto.
- Diferencia entre el valor medido o calculado y el real.

A criterio del autor y como se puede apreciar en los significados antes descritos de la palabra error, este puede ser causado por una equivocación, lo que sí debe estar bien claro es que el mismo es el resultado de una actuación de buena fe, es decir, no se puede concebir un error como algo premeditado o intencional, si esto ocurriera dejaría de ser error.

También Rosental y Ludin (1984: 144) definen los errores lógicos como:

Errores debidos a un equivocado curso del pensar en el razonamiento. Los errores se pueden derivar de una interpretación incorrecta o de un uso desacertado; pueden cometerse por infracción de las leyes de la lógica en el curso del razonamiento (por ejemplo cuando las premisas se entrelazan gracias a la presencia de términos que se toman por comunes, si bien, en realidad tras ellos se ocultan conceptos diferentes); por tomar equivocadamente como inferencia de la aseveración una que, en realidad no es la conclusión del razonamiento dado (por ejemplo en las demostraciones la subplantación de la tesis); etc.

Para estos autores los errores se dividen en “inintencionados (paralogismos) y conscientes (sofismas).

Un paralogismo es un “razonamiento incorrecto. Infracción inconsciente de las leyes y reglas de la lógica, priva al razonamiento de fuerza demostrativa y, por lo común lleva a conclusiones falsas”, mientras que “un sofisma es una Infracción consciente de las leyes de la lógica” (p. 352).

Sócrates (citado por Puerto, 2004: 2) afirmaba que todos podemos errar en el camino de la búsqueda de la verdad, y que es a través de la crítica racional y la autocrítica como podemos examinar y corregir esos errores, para recuperar el rumbo hacia el conocimiento genuino.

En la actualidad se concibe que el error también está vinculado a los procesos de enseñanza y aprendizaje, en tanto el entendimiento humano, de alguna manera, es causa directa de él.

En investigaciones recientes se ha afirmado que en las concepciones actuales, el error ha dejado de ser algo a penalizar para convertirse en una fuente valiosa de información, en una señal de hacia dónde se debe reorientar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es también un recurso de motivación, una oportunidad para que el alumno argumente, discuta y revea sus conocimientos, para lograr una mejor comprensión y una mayor familiaridad con el razonamiento lógico y matemático (Puerto, 2004: 7).

El concepto de error tiene una gran relación con otras categorías, entre ellas se encuentran la **dificultad** y el **obstáculo**.

Bachelard (citado por Puerto, 2004: 3) introdujo el concepto de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de los errores en la conformación del conocimiento. Señala que […] los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de obstáculo: se conoce en contra de un conocimiento anterior (insuficiente o adquirido deficientemente) que ofrece resistencia, la mayoría de las veces porque se ha fijado en razón de haber resultado eficaz hasta el momento; cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuados, se produce el error.

Gómez (2006: 72) señala que “decimos que el escolar tiene una dificultad, cuando incurre en un error al abordar la tarea”.

La revisión bibliográfica llevada a cabo por el autor de este trabajo ha mostrado que gran parte de los errores que cometen los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se remontan a obstáculos epistemológicos que los propios matemáticos enfrentaron y superaron a través de siglos de historia. Esta situación nos advierte sobre las dificultades que pueden acarrearle al alumno la mayoría de los contenidos que se abordan en el Nivel Medio Superior, los que de ninguna manera son triviales, y requieren, por otra parte, de mucho tiempo para su apropiación y consolidación.

Diversos investigadores (Booth, 1984; Chamorro, 1995; Di Blasi y otros, 2003; Godino, Batanero y Font, 2003; Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992; Martínez, 2002) han señalado que parte de las dificultades que presentan los estudiantes son debidas a estrategias de enseñanza inadecuadas llevadas a cabo por los profesores. En este sentido, con la apreciación y el análisis llevado a cabo de los errores registrados en las producciones de los estudiantes, inferimos que gran parte de las equivocaciones cometidas tienen su origen en procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con características como:

- Uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos.
- Utilización de reglas poco trascendentes como requisitos indispensables en la ejecución de cálculos aritméticos o resolución de ecuaciones.
- Desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas.
- Abordaje de contenidos completamente descontextualizados y poco articulados con los restantes.

El autor considera que las causas resumidas por los autores anteriormente mencionados son en gran medida las que influyen en los errores que cometen los estudiantes y mucho más específico en los errores algebraicos en la resolución de ecuaciones fraccionarias que son los que ocupan esta investigación.

Radatz (citado por Engler, 2004: 2) afirma que hay una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la Matemática. Señala varias razones por las que el estudio de errores y la necesidad de un marco teórico de explicación son importantes. Entre ellas: las reformas sucesivas del currículo de Matemática probablemente no han conducido a nuevos errores, pero con seguridad han surgido nuevos, debido a los contenidos específicos, la individualización y diferenciación de la instrucción matemática requiere de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas. Los profesores necesitan modelos de actuación para diagnosticar y corregir aprendizajes erróneos.

Es de destacar que los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente (Pochulu, 1994: 1).

Mulhern (citado por Engler, 2004: 2) hace una caracterización general de los errores cometidos por los estudiantes:

- Los errores surgen en la clase generalmente de manera espontánea y sorprenden al profesor.
- Son persistentes, particulares de cada individuo y difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Predominan los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada, en general, son resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el profesor) con respecto a los errores por azar u ocasionales.
- Los estudiantes en el momento no toman conciencia del error.
- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que ofrece el profesor. Los estudiantes recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

Acerca de las causas de los errores Socas (citado por Puerto, 2004:1) señala que “el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción.”

En la actualidad el error es considerado parte inseparable del aprendizaje. Los investigadores en Educación Matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los estudiantes, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas.

El análisis de errores en el aprendizaje se transformó en una cuestión de permanente interés en las investigaciones en Educación Matemática (Engler, 2004). Los estudios se fueron orientando según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes y por el currículo matemático en los diferentes sistemas educativos.

Según Radatz (citado por Engler, 2004: 1) está claro que, la aritmética y el conocimiento numérico constituyen el área que predomina en la mayoría de los estudios sobre errores en matemáticas escolares. Afirma además que, en Estados Unidos se logró un desarrollo teórico continuo desde principios del siglo veinte para realizar este análisis mientras que, en los países europeos este desarrollo se abordó en forma esporádica.

Se realiza a continuación una referencia de lo acontecido en los principales países tomados como referentes.

En Estados Unidos, desde 1917 y a través de Thorndike comienza la difusión y el conocimiento de trabajos sobre la determinación de errores. A partir de ese momento los aportes más importantes sobre el tema los realizaron Buswell, Judd y Brueckner hasta la década del 30 donde se priorizó el análisis de las dificultades especiales, la persistencia de técnicas erróneas individuales y la agrupación y clasificación de errores. Muchos de ellos han tenido influencia en investigaciones realizadas en años recientes en España. A partir de los años setenta surgieron nuevas corrientes que intentaron diseñar actividades, metodologías y organización del currículo escolar con el objeto de disminuir los errores.

En Alemania, el interés por estudiar los errores toma fuerza cuando crece la importancia de la pedagogía empírica entre las dos guerras mundiales. En los trabajos realizados se nota la influencia de las escuelas predominantes en psicología: la psicoanalítica, la Gestalt y la psicología del pensamiento. Entre los años 1922 y 1928 investigadores como Weiner, Seseman, Kiesling y Rose trataron de establecer patrones de errores en todas las materias y para las distintas edades, proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para la enseñanza de la Matemática considerando a los errores surgidos de una combinación incorrecta de tendencias, estudiar la predisposición especial de las personas para equivocarse y la manera de tratar el error y establecer una clasificación de las causas de error en la educación matemática.

Este estudio después se vio interrumpido y a partir de la década del 60 comienza de nuevo con Schlaak, Glück y Pipping. Algunos de los aportes más destacados fueron: la determinación y descripción de causas de error, interpretación de los errores y dificultades desde una perspectiva psicológica y la tipificación y clasificación de los errores que están relacionados con el cálculo.

En la extinta Unión Soviética el análisis de los errores y las dificultades individuales del aprendizaje tomó fuerza a principios de los años sesenta del siglo XX cuando se consolidó la investigación sobre Educación Matemática. Los principales referentes son los investigadores Kuzmitskaya y Menchinskaya, quienes lograron determinar y describir causas de los errores.

En España, Villarejo, Fernández Huerta, Centeno, Rico, Castro, González, Coriat y Molina entre otros, se movilizaron a partir de la década del 50, en torno a este tema. Los más destacados refieren a tratar de determinar los errores más frecuentes, a presentar bases para la enseñanza correctiva y a la necesidad de interpretar los mismos para orientar el proceso de enseñanza.

Rico (1995) argumenta que la mayor parte de los estudios sobre errores, realizados con anterioridad a 1960, han consistido en recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas y un análisis de los tipos de errores detectados, para proceder luego, a una clasificación que permita determinar cómo surgen los errores a partir de la solución correcta, en la que se hacen inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

De los estudios a nivel internacional se han derivado diferentes tipologías de errores (Franchi y Hernández, 2003), las cuales tienen un carácter general que no se ajusta al caso específico de la resolución de ecuaciones fraccinarias.

De los estudios realizados en Cuba sobre los errores, en la bibliografía consultada se encontraron los trabajos realizados por Álvarez, Bernabeu, Jiménez, León y Matos (2005; 2006), pero en ninguno de los casos se tratan específicamente los errores en la resolución de ecuaciones fraccionarias. El trabajo que más se acerca al tema es el de Álvarez, quien propone una tipología de errores que se cometen en el trabajo con variables.

Tipología propuesta por Álvarez (2005: 7):

- Errores que provienen del trabajo con la Aritmética.
- Errores motivados por las ideas preconcebidas que tienen los estudiantes sobre las variables.
- Errores en la unilateralidad de la comprensión del signo de igualdad.
- Errores por la no identificación de la estructura de las expresiones dadas.
- Errores por la no comprensión de las transformaciones equivalentes.
- Errores por la no comprensión de los enunciados en la traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa.

Como se puede apreciar, esta tipología resulta de gran utilidad para el estudio de los errores en la resolución de ecuaciones fraccionarias porque a pesar de que el trabajo con variables es un tema muy abarcador, tiene puntos comunes con la resolución de ecuaciones fraccionarias.

A continuación se exponen ejemplos de errores debidos a la no comprensión de transformaciones equivalentes al resolver ecuaciones fraccionarias. (Álvarez, 2005: 8-9)

Dos ecuaciones son equivalentes si y sólo si tienen el mismo dominio de definición y el mismo conjunto solución. Consecuentemente las transformaciones equivalentes son aquellas que transforman una ecuación en otra equivalente. Muchas veces los estudiantes saben que hay que multiplicar por el mínimo común múltiplo (m.c.m) por ambos miembros de la ecuación para eliminar él o los denominadores, pero con frecuencia ocurre que multiplican el (m.c.m) por un solo miembro de la ecuación, pero no saben por qué, o elaboran sus propias reglas:

Por eso es muy importante que el alumno domine el concepto de transformación equivalente. Este concepto se introduce en sexto grado, pero en muchos casos el alumno se apropia formalmente sólo de reglas y no de su significado.

Para el autor de esta tesis , un error cognitivo en la resolución de una ecuación es un error en cualquiera de las etapas de este proceso, ya sea en la identificación de la ecuación y decisión del procedimiento a utilizar, en la determinación del conjunto solución o en la comprobación de las soluciones.

Tipos de errores en la determinación del conjunto solución de una ecuación fraccionaria.

1. Aplicación de un procedimiento no pertinente.
    - Aplicación de la fórmula de resolución de ecuaciones lineales o cuadráticas.
2. Errores de cálculo numérico.
3. Errores de cálculo algebraico.
    - Errores en el cálculo con monomios no numéricos.
    - Errores en cálculos algebraicos donde interviene al menos un polinomio de dos o más monomios.
4. Transposición incorrecta de términos de un miembro a otro.

Tipos de errores en la comprobación de una ecuación fraccionaria.

5. Errores de sustitución
    - Cuando la solución es negativa, se sustituye sin colocar paréntesis. Sustitución en una ecuación que no es la inicial.
    - No se tiene en cuenta el signo de la solución en la sustitución.
    - La eliminación de paréntesis.
    - Sustitución por un valor aproximado de la solución.

6. Errores de cálculo aritmético.
   - Al colocar paréntesis se resta en lugar de multiplicar.
   - No se tiene en cuenta el orden operacional.
   - No se tienen en cuenta reglas de los signos en las operaciones.
   - Aplicación incorrecta de propiedades de las operaciones, incluida la distributividad.

Al resolver una ecuación fraccionaria se pueden presentar varios casos de comisión de errores que pueden estar en la determinación de la solución o en su comprobación. En la **tabla 1** se pueden apreciar cada uno de los casos posibles.

Tabla 1: Casos posibles al resolver una ecuación fraccionaria y comprobar en la ecuación original.

Caso	Determinación de la solución	Tipo de solución	Tipo de comprobación	Resultado	Decisión adecuada	Tipo de proceso
1	Correcta	Correcta	Correcta	Proposición verdadera	Resolución correcta	Correcto
2	Correcta	Correcta	Con errores	Proposición verdadera	Resolución correcta	Con errores
3	Correcta	Correcta	Con errores	Proposición falsa	Resolución incorrecta	Con errores
4	Con errores	Correcta	Correcta	Proposición verdadera	Resolución correcta	Con errores
5	Con errores	Correcta	Con errores	Proposición verdadera	Resolución correcta	Con errores
6	Con errores	Correcta	Con errores	Proposición falsa	Resolución incorrecta	Con errores
7	Con errores	Incorrecta	Correcta	Proposición falsa	Resolución incorrecta	Con errores
8	Con errores	Incorrecta	Con errores	Proposición verdadera	Resolución correcta	Con errores
9	Con errores	Incorrecta	Con errores	Proposición falsa	Resolución incorrecta	Con errores

Los casos 1 y 7 se pueden considerar como los típicos en la resolución de una ecuación lineal.

A continuación aparecen ejemplificados cada uno de los casos de la tabla anterior.

Ejemplo 1: caso 1 de la tabla 1

$$\frac{x(5x-27)}{5x+3}-\frac{1}{x}=x-6$$

- Descomponer en factores los denominadores, (si es posible).

$$(m.c.m)=x(5x+3)$$

Determinar el (m.c.m) entre los denominadores.

$$\frac{x(5x-27)}{5x+3}-\frac{1}{x}=x-6\bullet/\,x(5x+3)$$

Multiplicar ambos miembros de la ecuación por el (m.c.m) y simplifico

$$x^2(5x-27)-(5x+3)=x[(5x+3)(x-6)]$$

$$5x^3-27x^2-5x-3=x[5x^2-30x+3x-18]$$

Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes hasta obtener una ecuación lineal o cuadrática

$$5x^3-27x^2-5x-3=5x^3-30x^2+3x^2-18$$

$$18x-5x=3$$

Despejando la variable se obtiene la solución correcta.

$$13x=3$$

$$x=\frac{3}{13}$$

Comprobación: para $x=\frac{3}{13}$

$$\frac{\frac{3}{13}\left(5\left(\frac{3}{13}\right)-27\right)}{5\left(\frac{3}{13}\right)+3}-\frac{1}{\frac{3}{13}}=\frac{3}{13}-6$$

Sustituyendo en la ecuación inicial.

$$\frac{\frac{3}{13}\left(\frac{15}{13}-27\right)}{\frac{15}{13}+3}-\frac{13}{3}=-\frac{75}{13}$$

Calculando.

$$-\frac{75}{13}=-\frac{75}{13}$$

Calculando, se obtiene una proposición verdadera

$$s=\left\{\frac{3}{13}\right\}$$

Decisión adecuada. Resolución correcta.

Tipo de proceso: correcto.

Ejemplo 2: caso 2 de la tabla 1.

$$\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}=\frac{1}{12x-2}$$

Descomponer en factores los denominadores, (si es posible).

$$\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{12(x-1)}$$

Determinar el (m.c.m) entre los denominador

$$(m.c.m)=12(x+1)(x-1)$$

Multiplicar ambos miembros de la ecuación por el (m.c.m) y simplifico

$$\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{12(x-1)}\bullet /12(x-1)(x+1$$

Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes hasta obtener una ecuación lineal o cuadrática.

$$4(x+1)+3(x-1)=x+1$$

$$4x+4+3x-3=x+1$$

Despejando la variable se obtiene la solución correcta.

$$7x+1=x+1$$

$$7x-x=1-1$$

$$6x=0$$

$$x=\frac{0}{6}$$

$$x=0$$

Comprobación: para $x=0$

Sustituyendo en la ecuación inicial.

$$\frac{1}{3(0)-3}+\frac{1}{4(0)+4}=\frac{1}{12(0)-2}$$

Error en el caculo con la adición de números de diferentes signos.

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{-4+3}{12}=\frac{1}{12}$$

Calculando, se obtiene una proposición verdadera

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

$$S=\{0\}$$

Decisión adecuada. Resolución correcta.

Tipo de proceso: con errores.

Ejemplo 3: caso 3 de la tabla 1.

$$\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x+5}=\frac{24}{x^2+2x-15}$$

- Descomponer en factores los denominadores, (si es posible).

$$\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x+5}=\frac{24}{(x+5)(x-3)}$$

$$(m.c.m)=(x+5)(x-3)$$

Determinar el (m.c.m) entre los denominadores.

$$\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x+5}=\frac{24}{(x+5)(x-3)}\bullet/(x+5)(x-3)$$

Multiplicar ambos miembros de la ecuación por el (m.c.m) y simplifico

$$x(x+5)-3(x-3)=24$$

Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes hasta obtener una ecuación lineal o cuadrática

$$x^2+5x-3x+9=24$$

$$x^2+2x-15=0$$

$$(x+5)(x-3)=0$$

Igualando a cero cada factor, despejando la variable se obtiene la solución correcta.

$x=-5$ ó $x=3$

Comprobación: para $x=-5$

$$\frac{-5}{-5-3}-\frac{3}{-5+5}=\frac{24}{(-5)^2+2(-5)-15}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial por los valores de las variables hallados.

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{0}=\frac{24}{25-10-15}$$

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{0}=\frac{24}{0}$$

Calculando se comete un error (de la división entre cero se obtiene cero)

$$\frac{5}{8}-0=0$$

Calculando, se obtiene una proposición falsa.

$$\frac{5}{8}=0$$

Para $x=3$

$$\frac{3}{3-3}-\frac{3}{3+5}=\frac{24}{(3)^2+2(3)-15}$$

$$\frac{3}{0}-\frac{3}{8}=\frac{24}{9+6-15}$$

$$0-\frac{3}{8}=\frac{24}{0}$$

$$-\frac{3}{8}=0$$

$$S=\{\ \}$$

Decisión adecuada. Resolución incorrecta.

Tipo de proceso: con errores.

Ejemplo 4: caso 4 de la tabla 1.

$$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2x-2}=-\frac{3}{2x+2}$$

- Descomponer en factores los denominadores, (si es posible).

$$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2(x-1)}=-\frac{3}{2(x+1)}$$

Determinar el (m.c.m) entre los denominadores.

$$(m.c.m)=2(x-1)^2(x+1)$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2(x-1)}=\frac{24}{2(x+1)}\bullet/\,2(x-1)^2(x+1)$$

Multiplicar ambos miembros de la ecuación por el (m.c.m) y simplifico

$$2(x+1)-3(x-1)(x+1)=-3(x-1)^2$$

$$2x+2-3x^2+3=-3x^2-6x-3$$

$$2x+2+3=-6x-3$$

$$-4x=-5-3$$

Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes hasta obtener una ecuación lineal o cuadrática con errores.

$$x=\frac{-8}{-4}$$

$$x=2$$

Despejando la variable se obtiene la solución correcta.

Comprobación: para $x=2$

$$\frac{1}{(2-1)^2}-\frac{3}{2(2)-2}=-\frac{3}{2(2)+2}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial por el valor de la variable hallado.

$$1-\frac{3}{2}=-\frac{3}{6}$$

Calculando

Calculando se obtiene una proposición verdadera.

$$\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$S=\{2\}$$

Decisión adecuada. Resolución correcta.

Tipo de proceso: con errores.

Ejemplo 5: caso 5 de la tabla 1.

Calculando el mcm con errores.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{4}=\frac{7}{2n}$$

Multiplicar el mcm por ambos de la ecuación y simplifico.

$$(m.c.m)=4n^2$$

Reducir términos semejantes, hasta obtener una ecuación lineal o cuadrática

$$4n+n^2=14n$$

Igualando cada factor a cero, despejando la variable se obtiene una solución correcta.

$$n^2-10n=0$$

$$n(n-10)=0$$

$n=0$ ó $n=10$

Comprobación: para $n=0$

Sustituyendo en la ecuación original con los valores hallados con error en las soluciones obtenidas.

$$\frac{1}{0}+\frac{1}{4}=\frac{7}{2(0)}$$

$$0+\frac{1}{4}=\frac{7}{0}$$

$$\frac{1}{4}=0$$

-No es posible

Calculando.

Para $n = 10$

$\frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2(10)}$

Calculando se obtiene una proposición falsa.

$\frac{2+5}{20} = \frac{7}{20}$

$\frac{7}{20} = \frac{7}{20}$

$S = \{10\}$

Decisión adecuada. Resolución correcta.

Tipo de proceso: con errores.

Ejemplo 6: caso 6 de la tabla 1.

$x + 5 = \frac{11}{x-5}$

$(mcm) = (x-5)$

Determinar el mcm entre los denominadores

$x + 5 = \frac{11}{x-5} \bullet /(x-5)$

Multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mcm y simplifico

$(x+5)(x-5) = 11$

$x^2 - 25 = 11$

Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes con errores, hasta obtener una ecuación lineal o cuadrática

$x^2 - 25 - 11 = 0$

$x^2 + 36 = 0$

Descomponer en factores con errores.

$(x+6)(x-6) = 0$

$x = -6$ ó $x = 6$

Igualando cada factor a cero, despejando la variable se obtiene una solución correcta.

Comprobación: para $x = -6$

$-6 + 5 = \frac{11}{-6-5}$

Sustituyendo en la ecuación original

Calculando para unos de los valores de la variable con error en la suma de números con igual signo negativo

$-1=1$

Para $x=6$

Calculando, se obtiene una proposición falsa.

$6+5=\frac{11}{6-5}$

$11=\frac{11}{1}$

$11=11$

Decisión adecuada. Resolución incorrecta.

Tipo de proceso: con errores.

Ejemplo 7: caso 7 de la tabla 1

$\frac{x+4}{x+5}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{1}{24}$

Determinar el mcm entre los denominadores con errores.

$(mcm)=(x+5)(x+3)$

Multiplicar ambos miembros de la ecacución y simplifico.

$\frac{x+4}{x+5}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{1}{24}\bullet/(x+5)(x+3)$

Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes hasta obtener una ecuación lineal o cuadrática

$(x+4)(x+3)-(x+5)(x+2)=(x+5)(x+3)$

Descomponer en factores con errores.

$x^2+7x+12-(x^2+7x+10)=x^2+8x+15$

Igualando cada factor a cero, despejando la variable se obtiene una solución correcta.

$x^2+7x+12-x^2-7x-10=x^2+8x+15$

$2=x^2+8x+15$

$x^2+8x+15-2=0$

$x^2+8x+13=0$

$(x+10)(x+3)=0$

$x=-10$ ó $x=-3$

Comprobación: para $x=-10$

$\frac{-10+4}{-10+5}-\frac{-10+2}{-10+3}=\frac{1}{24}$

Sustituyendo en la ecuación original por los valores de la variable.

$$\frac{-6}{-5}-\frac{-8}{-7}=\frac{1}{24}$$

Calculando.

$$\frac{42+40}{35}=\frac{1}{24}$$

Calculando en ambos miembros se obtiene una proposición falsa.

$$\frac{42+40}{35}=\frac{1}{24}$$

$$\frac{82}{35}=\frac{1}{24}$$

Para $x=-3$

$$\frac{-3+4}{-3+5}-\frac{-3+2}{-3+3}=\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{0}=\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

$$S=\{\ \}$$

Decisión adecuada. Resolución incorrecta.

Tipo de proceso: con errores.

Ejemplo 8: caso 8 de la tabla 1.

$$\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x}=\frac{5}{2}$$

Hallando el mcm sin errores

$$(mcm)=2x(x-2)$$

Eliminando los denominadores sin errores

$$\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x}=\frac{5}{2}\bullet/\,2x(x-2)$$

Desarrollando el binomio con errores

$$2x^2-2(x-2)^2=5x(x-2)$$

$$2x^2-2(x^2-2x+2)^2=5x^2-10x$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes si obtiene la ecuación cuadrática

$$2x^2-2x^2+4x-4=5x^2-10x$$

Descomponiendo en factores se obtiene una solución incorrecta.

$$5x^2-10x-4x+4=0$$

$$5x^2 - 14x + 4 = 0$$

$$(3x-1)(2x-4) = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

Comprobación: para $x = \dfrac{1}{3}$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-2} - \frac{\frac{1}{3}-2}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Calculando en el miembro izquierdo con error para las dos posibles soluciones, se obtiene una proposición verdadera.

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Para $x = 2$

$$\frac{2}{2-2} - \frac{2-2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$$

Decisión adecuada. Resolución correcta.

Tipo de proceso: con errores.

Ejemplo 9: caso 9 de la tabla 1.

$$\frac{2(x+2)}{x-2} - \frac{3(x-2)}{2x+3} = \frac{x^2 - 52}{2x^2 - x - 6}$$

Eliminando Paréntesis en el miembro izquierdo con errores.

$$(mcm) = (2x+3)(x-2)$$

Hallando el mcm

Eliminando denominadores

$$\frac{2x+2}{x-2}-\frac{3x-2}{2x+3}=\frac{x^2-52}{(2x+3)(x-2)}\bullet/\ (2x+3)(x-2)$$

$$(2x+2)(2x+3)-(3x-2)(x-2)=x^2-52$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes se obtiene una ecuación

$$4x^2+6x+4x+6-\left(3x^2-6x-2x+4\right)=x^2-52$$

Despejando la variable

$$4x^2+6x+4x+6-3x^2+8x-4=x^2-52$$

Calculando se obtiene una solución incorrecta

$$18x+2=-52$$

$$18x=-52-2$$

$$18x=-54$$

$$x=\frac{-54}{18}$$

$$x=-3$$

Comprobación: para $x=3$

$$\frac{2(3+2)}{3-2}-\frac{3(3-2)}{2(3)+2}=\frac{(3)^2-52}{2(3)^2-(3)-6}$$

Sustituyendo en la ecuación original con error en el signo de la solución.

$$10-\frac{3}{8}=\frac{-43}{9}$$

Calculando.

$$\frac{80-3}{8}=\frac{-43}{9}$$

Calculando y simplificando en ambos miembros se obtiene una proposición falsa.

$$\frac{77}{8}=\frac{-43}{9}$$

Decisión adecuada. Resolución incorrecta.

Tipo de proceso: con errores.

Como se puede apreciar, los errores cometidos en los ejemplos anteriores pertenecen a los tipos señalados (**tabla 2**).

<table>
<tr><td colspan="4">Tabla 2: Errores cometidos en cada ejemplo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ejem plo</td><td rowspan="2">Caso</td><td colspan="2">Tipificación de los errores</td></tr>
<tr><td>En la determinación de la</td><td>En la comprobación.</td></tr>
</table>

		solución.	
1	1	-	-
2	2	-	Error en cálculo de números de diferentes signos
3	3	-	Error de cálculo aritmético (de la división entre cero se obtiene cero).
4	4	Error de cálculo algebraico (eliminar paréntesis). Transposición de un miembro a otro. No se coloca el signo adecuado a la diferencia de dos números enteros.	-
5	5	Error en determinar el (mcm) entre los denominadores.	Error de cálculo aritmético (de la división entre cero se obtiene cero).
6	6	Error al transponer términos de un miembro a otro.	Error de cálculo aritmético (simplificación de números enteros).
7	7	Error en la determinación del mcm entre los denominadores y en la descomposición factorial de trinomios $(x^2 + px + q)$.	-
8	8	Error en el desarrollo de un binomio elevado al cuadrado.	Error de cálculo aritmético (Aplicación incorrecta de la división de números).
9	9	Error en la eliminación de paréntesis(propiedad distributiva)	Error de sustitución (no se tiene en cuenta el signo de la solución al sustituir).

1.6 Características de los estudiantes del preuniversitario.

José Martí, el Apóstol, proclamó que: “*Al venir a la tierra, todo hombre tiene derecho a que se le eduque, y después, en pago, el deber de contribuir a la educación de los demás*” (1975,19: 375).

La atención a la educación en Cuba es función del Estado y en ella participa toda la sociedad, como legado a la vigencia de las palabras del Apóstol. Sus objetivos y principios fundamentales han sido refrendados por la Constitución de la República, vigente desde el 24 de febrero de 1976.

El Sistema Nacional de Educación está concebido como un conjunto de subsistemas orgánicamente articulados. La Educación Preuniversitaria en Cuba se ha concebido en los principios de la igualdad, la justicia plena, la atención a la autoestima y los valores morales de los ciudadanos y en la actualidad se trata de perfeccionar la obra realizada, se identifica con procesos de continuidad, formación permanente, educación para todos y con la Batalla de Ideas para alcanzar la Cultura General Integral.

El ingreso al nivel medio superior ocurre en un momento crucial de la vida del estudiante, es el periodo de tránsito de la adolescencia hacia la juventud. Es conocido que los límites entre los periodos evolutivos no son absolutos y variaciones de carácter individual, de manera que el profesor puede encontrar en un mismo grupo escolar, estudiantes que ya manifiestan rasgos propios de la juventud, mientras que otros mantienen todavía un comportamiento típico de la adolescente.

Esta diversidad de rasgos se observa con más frecuencia en los grupos de décimo grado, pues en los estudiantes de años anteriores comienzan a revelarse mayoritariamente las características de la edad juvenil. Es por esta razón que se centra la atención en algunas características de la etapa juvenil, cuyo conocimiento resulta de gran importancia para los profesores de este nivel.

Muchos consideran el inicio de la juventud como el segundo nacimiento del hombre; entre otras cosas, ello se debe a que en esta época se alcanza la madures relativa de ciertas formaciones y algunas características psicológicas de la personalidad.

En la juventud se continúa y amplia el desarrollo en la esfera intelectual a tenido lugar en etapas anteriores. Así, desde el punto de vista de su actividad intelectual, los estudiantes del nivel medio superior están potencialmente capacitados para realizar tareas que requieren una alta dosis de trabajo mental, de razonamiento, iniciativa, independencia cognoscitiva y creatividad. Estas posibilidades se manifiestan tanto al respecto a la actividad de aprendizaje en el aula, como en las diversas situaciones que surgen en la vida cotidiana del joven.

Los estudiantes del nivel medio superior alcanzan índices superiores a los del estudiantado de niveles anteriores, lo que no significa, desde luego, que ya en el nivel medio superior los estudiantes no presentan dificultades ante tareas de carácter intelectual, pues durante la investigación, se pudo constatar la existencia de estudiantes que no resuelven de un modo correcto los problemas lógicos, en situaciones que exigen la aplicación de procedimientos racionales y el control conciente de su actividad. No obstante, fue posible establecer que cuando la enseñanza se organiza de forma correcta esos estudiantes pueden superar muy rápido sus deficiencias, gracias a las reservas intelectuales que han desarrollado.

Debe tenerse presente que los estudiantes de la Educación Media Superior, por su grado de desarrollo, pueden participar de forma mucho mas activa y consciente en este proceso, lo que incluye la realización más cabal de las funciones de autoaprendizaje y autoeducación. Cuando esto no se toma en consideración para dirigir el proceso de enseñanza, el papel del estudiante se reduce a asimilar pasivamente, el estudio pierde todo interés para el joven y se convierte en una tarea no grata para él. Gozan de particular respeto en que los profesores demandan esfuerzos mentales, imaginación, inventiva y crean condiciones para que el alumno participe de modo activo.

Las condiciones y puntos de vista empiezan a determinar la conducta y actividad del joven en el medio social donde se desenvuelve, lo cual le permite ser menos dependiente de las circunstancias que lo rodea, ser capas de enjuiciar críticamente las condiciones de vida que influyen sobre el y participar en la transformación activa de la sociedad en que vive.

En tal sentido, es necesario que el trabajo de los profesores, tienda no solo a lograr un desarrollo cognoscitivo, sino a propiciar vivencias profundamente sentidas por los jóvenes, capases de regular su conducta en función de la necesidad de actuar de acuerdo con sus convicciones. El papel de los educadores como orientadores del joven, tanto como a trabes de su propia conducta, como en la dirección de los ideales y las aspiraciones que el individuo se plantea, de una de las cuestiones principales a tener en consideración.

La función de los educadores es exitosa sobre todo cuando un profundo conocimiento de sus estudiantes. En el caso especifico de la comunicación optima con los estudiantes, es fundamental el conocimiento acerca de sus preferencias comunicativas, de los temas que ocupan el centro de sus intereses y constituyen el objeto de las relaciones de los estudiantes entre si, y con otras personas (P.decimo grado, 2006:4).

Dentro de las soluciones dirigidas a la educación de estos jóvenes, la adecuada atención a la diversidad educativa es sin duda un aspecto central y una de las claves para alcanzar la calidad de los aprendizajes. La heterogeneidad de los estudiantes que acuden a estos cursos constituye un hecho reconocido. La diferencia, la variabilidad interindividual son realidades ineludibles en las aulas.

Las diferencias individuales son aquellas disparidades existentes entre los individuos de una especie en correspondencia con las condiciones individuales de su desarrollo concreto como seres biológicos y también – en el caso de los seres humanos - como seres sociales” (Castellanos, 2005: 71).

Existen muchas clasificaciones y enfoques sobre las diferencias individuales. Preocupa en particular, las diferencias individuales asociadas a la eficiencia del aprendizaje escolar, es decir, aquellas condiciones de disparidad o diversidad que puedan obstaculizar o favorecer de manera significativa el logro de los objetivos del aprendizaje desarrollador.

Desde este punto de vista, existen muchos y diferentes grupos de estudiantes con necesidades educativas especiales. Estas pueden tener un carácter relativamente permanente, pero también transitorio.

La categoría necesidades educativas se utiliza por la autora citada para designar las:

[…] demandas individuales de aprendizaje y de opciones educativas diferenciadas, que generalmente no quedan cubiertas por los programas regulares y estandarizados, y que se fundamentan en la diversidad o variabilidad interindividual (e intraindividual) de los estudiantes que asisten a un centro educacional concreto (Castellanos, 2005: 71).

Tal es el caso de los estudiantes de décimo grado del preuniversitario que tienen necesidades educativas especiales por todas las dificultades que presentan en su aprendizaje. Una de las dificultades que presentan estos estudiantes es en la resolución de ecuaciones fraccionarias, un contenido que deben dominar al concluir el décimo grado, pero que no es así y ocurre que cometen una serie de errores al resolverlas como son:

- Identificar tipo de ecuación.
- Descomponer en factores los denominadores.
- Determinar mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores y la excusión de los valores que anulan el (m.c.m).
- Multiplicar ambos miembros por el (m.c.m) para eliminarlo del denominador.
- Ampliar el numerador.
- Agrupar o reducir término semejantes.
- Tomar una decisión sobre el conjunto solución de la ecuación al realizar la comprobación.

CAPÍTULO II: EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES DEL IPU EDUARDO GARCÍA DELGADO ANTE LOS ERRORES COGNITIVOS AL RESOLVER ECUACIONES FRACCIONARIAS: SISTEMA DE EJERCICIOS. RFESULTADOS.

2.1 Fundamentos que avalan la elaboración del sistema de ejercicios

Un ejercicio es la acción de repetir muchos actos para adiestrarse en la ejecución de una cosa, tomar posición de ella o hacer que uno la aprenda mediante la enseñanza y práctica de ella (RAE, 2006).

En el ámbito didáctico y especialmente en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, el concepto de ejercicio tiene una connotación especial. Para Ballester y otros (1992: 406) “la mayoría de los autores lo definen como una exigencia para la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etc.”

Horst Müller (citado por Ballester y otros, 1992: 406) considera que en la enseñanza de la Matemática, un ejercicio es una exigencia para actuar que se caracteriza por el **objetivo** y el **contenido** de las acciones y las **condiciones** para las acciones.

Según Horst Müller (citado por Ballester y otros, 1992: 406) “el **objetivo** de todas las acciones en la resolución de un ejercicio es, en cada caso, transformar una situación inicial (elementos dados, premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis)”.

El **contenido** de las acciones en la resolución de un ejercicio está caracterizado por el objeto de las acciones y los tipos de acciones, mientras que en las **condiciones** “se encuentran en primer lugar las exigencias que el ejercicio plantea al alumno, expresada por el grado de dificultad del mismo” (Ballester y otros, 1992: 407).

Muchas veces resulta compleja la elaboración de colecciones de ejercicios en forma de sistema, pero por la importancia que tienen para favorecer el desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones lineales, es que se recurre a un sistema de ejercicios.

Según Muñoz (1985: 44) “un sistema de ejercicios no es solamente una agrupación de ejercicios, este conjunto debe cumplir determinados principios”, los cuales han sido explicitados por este autor para la formación de conceptos y la asimilación de teoremas y de procedimientos matemáticos.

Aunque en el desempeño de los estudiantes ante los errores se integran los procedimientos de identificación, valoración y corrección de los errores y en estos procedimientos se entremezcla lo matemático y lo extramatematico, los principios propuestos por Muñoz no se pueden trasladar mecánicamente a los sistemas de ejercicios destinados a favorecer tal desempeño.

Teniendo en cuenta estos principios y las reflexiones de Lorence acerca de los sistemas como resultados de la investigación pedagógica (Lorences, 2007), la autora de este trabajo concibe que un sistema de ejercicios del tipo señalado, ha de satisfacer los requisitos siguientes:

- Potencialidad desarrolladora.
- Representatividad procedimental.
- Balance procedimental.
- Suficiencia ejecutora.
- Representatividad de los errores.
- Ordenamiento progresivo de la complejidad de los ejercicios.
- Diversidad en la formulación de las exigencias.

La **potencialidad desarrolladora** del sistema consiste en que los ejercicios componentes exigen una actuación ubicada en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, de manera que su resolución requiere de niveles de ayuda de los otros, especialmente del docente en un ambiente donde se combinan el trabajo autónomo y la colaboración.

La **representatividad procedimental** del sistema está en que las condiciones y exigencias de los ejercicios que lo conforman conducen a la ejecución por el alumno de los tres procedimientos esenciales del desempeño ante los errores: identificación, valoración y corrección.

El **balance procedimental** del sistema reside en una distribución equitativa de los ejercicios integrantes, de manera que se garantice periodicidad y continuidad en la ejecución de los tres procedimientos esenciales del desempeño de los estudiantes ante los errores.

La **suficiencia ejecutora** consiste en que los ejercicios sean suficientes para que los estudiantes desarrollen habilidades en la ejecución de los procedimientos esenciales del desempeño ante los errores.

La **representatividad de los errores** reside en que los ejercicios del sistema cubren los tipos fundamentales de errores que cometen los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, así como los errores más frecuentes de cada tipo.

El **ordenamiento progresivo de la complejidad de los ejercicios** consiste en que las acciones que integran el desempeño ante los errores son ejecutadas al resolver las tareas después de cierto nivel de dominio por el alumno de las operaciones componentes, gracias a la existencia de ejercicios en el sistema, dirigidos a la ejecución de estas operaciones los cuales aparecen primero en el ordenamiento.

El cumplimiento de este requisito pone orden didáctico a las relaciones de dependencia entre los ejercicios que componen el sistema.

La **diversidad en la formulación de las exigencias de los ejercicios** radica en que se cambie la formulación de la exigencia que conduzca a la aplicación de un mismo procedimiento cuando se utilicen varios ejercicios en que esté presente esta exigencia. Por ejemplo, si la exigencia se refiere a la identificación del error, esta se puede formular de varias formas para evitar estereotipos.

Se concibe en esta tesis que un sistema de ejercicios para favorecer el desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones lineales, es un conjunto de ejercicios relacionados entre sí y diferenciados, que satisface los principios de potencialidad desarrolladora, representatividad y balance procedimental, suficiencia ejecutora, representatividad de los errores, ordenamiento progresivo de la complejidad de los ejercicios y diversidad en la formulación de las exigencias, cuya resolución conduce a la ejecución de las acciones de identificación, valoración y corrección.

2.2 Características del sistema de ejercicios elaborado

El sistema de ejercicios elaborado pretende favorecer el desempeño de los estudiantes del primer semestre del CSIJ ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones lineales.

El sistema elaborado (**Fig. 1**) está compuesto por 23 ejercicios distribuidos en los tipos siguientes:

- Ejercicios dirigidos a favorecer el desempeño ante los errores en la determinación del conjunto solución.
- Ejercicios dirigidos a favorecer el desempeño ante los errores al realizar la comprobación de las soluciones.
- Ejercicios dirigidos a favorecer el desempeño ante los errores en todo el proceso, es decir, en la determinación del conjunto solución y en la comprobación de las soluciones.

Los ejercicios que componen el sistema fueron concebidos teniendo en cuenta las condiciones y exigencias que aparecen a continuación.

Condiciones:

Se ofrece información acerca de que un alumno al resolver un ejercicio trabajó de cierta forma que se muestra en la determinación del conjunto solución, la comprobación de la solución o en el proceso total de resolución.

Posibles exigencias:

1. Decidir si el alumno cometió algún error e identificar los errores.
2. Valorar la actuación del resolutor.
3. Corregir el error.
4. Valorar las causas de la comisión del error.

Aunque la primera exigencia se enmarca en la identificación del error, se le atribuye un carácter independiente con el objetivo de que el alumno esté en situación de duda y tenga un motivo para identificar el error.

La valoración de las causas del error conduce a que el alumno reflexione sobre su propia forma de resolver ecuaciones lineales, de manera que esta exigencia favorece su metacognición.

Objetivo del sistema	Ejercicios dirigidos a la identificación, valoración y corrección de errores en:	Estructura de los ejercicios
Favorecer el desempeño de los estudiantes del preuniversitario ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones fraccionarias.	**La determinación del conjunto solución** **La comprobación de las soluciones** **La determinación y comprobación**	**Condiciones** **Información sobre el trabajo realizado por un alumno en la resolución de una ecuación fraccionaria.** **Exigencias** • **Decidir si el alumno cometió algún error e identificar los errores.** • **Corregir errores.** • **Valorar las causas de la comisión de errores.** • **Valorar la actuación del resolutor.**

Fig.1: Sistema de ejercicios para favorecer el desempeño ante los errores.

Tabla 3: Ejercicios dirigidos a la identificación, valoración y corrección de errores	
Ejercicios para el desempeño ante errores en:	**Número del ejercicio**
La determinación del conjunto solución.	1, 2, 3, 4, 5
La comprobación de las soluciones.	6,7, 8, 9,10
La determinación y comprobación.	11, 12, 13, 14, 15 y 16

En sistema contiene dos ejercicios en cuya resolución no se han cometido errores (7 y 14) con el objetivo de fomentar la duda en los estudiantes.

Aunque la identificación, la valoración y la corrección son tres procesos interrelacionados, en el sistema de ejercicios existen tareas que no exigen respuesta escrita para los tres procesos (tabla 2), independientemente de que todos tengan lugar en el pensamiento del alumno.

Tabla 4: Relación entre los ejercicios del sistema y las exigencias				
Ejercicio	Exigencias			
	Decidir si el alumno cometió algún error e identificarlo (1)	Valorar la actuación del resolutor (2)	Corregir el error (3)	Valorar las causas de la comisión del error (4)
1	x		x	
2	x		x	
3	x		x	
4	x		x	
5	x		x	
6	x	x	x	
7	x	x		
8	x	x	x	
9	x	x		x
10	x	x		x
11	x			x
12	x		x	x
13	x	x		
14	x	x		
15	x	x	x	
16	x	x		

En los ejercicios del sistema también se relacionan las operaciones del procedimiento de resolución de una ecuación fraccionaria y los procedimientos fundamentales del desempeño ante los errores (tabla 5).

Tabla 5: Relación entre los procedimientos del desempeño ante los errores, las operaciones de la resolución de una ecuación fraccionaria y los ejercicios del sistema.

Operación que se ejecuta con errores	Ejercicios que exigen explícitamente		
	Identificación	Corrección	Valoración
Seleccionar procedimiento según tipo de ecuación	1	1	-
Eliminar signos de agrupación	2, 4, 9	2, 4	9
Transponer términos	3, 10	3	10
Calcular con números en la determinación de la solución	5, 12	5, 12	12
Calcular con monomios no numéricos	22	22	22
Sustituir la solución en la ecuación original	8, 10, 11, 12, 13, 15, 16	8, 12, 15	8, 10, 11, 12, 13, 15, 16
Calcular con números después de la sustitución	6, 9	6	6, 9

Los ejercicios elaborados se encuentran relacionados con los casos que se pueden presentar ya expuestos en la **tabla 1.** La relación se expone en la tabla 6**.**

Tabla 6: Relación de los ejercicios del sistema con los casos de la **tabla 1**

Caso	**Ejercicios**
1	1
2	13
3	6 ,8, 11, 15
4	12
5	2
6	4,5
7	3
8	9, 10
9	16

2.3 Ejercicios que componen el sistema

1- Un alumno al determinar la solución de la ecuación $\frac{5x+2}{4x+6}=\frac{x+7}{2x+3}$, lo hace de la forma siguiente:

$$\frac{5x+2}{4x+6}=\frac{x+7}{2x+3}$$

$$\frac{5x+2}{2(2x+3)}=\frac{x+7}{2x+3}\bullet/2(2x+3)$$

$$5x+2=2(x+7)$$

$$5x+2=2x+14$$

$$5x+2-2x-14=0$$

$$3x+12=0$$

$$3x=-12$$

$$x=\frac{-12}{3}$$

$$x=-4$$

a) El alumno cometió algún error en el proceso. Argumenta.

b) Corrige el error cometido.

2- Un alumno al determinar la solución de la ecuación $\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{5x-6}{x^2-4}$, lo hace de la forma siguiente:

$$\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{5x-6}{x^2-4}$$

$$\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{5x-6}{(x-2)(x+2)}\bullet/(x-2)(x+2)$$

$$4(x-2)+(x+2)=5x-6$$

$$4x-8+x+2=5x-6$$

$$5x-6=5x-6$$

$$0=0$$

a) Comprueba si el resultado obtenido es correcto.

b) Si el resultado no es correcto, identifica los errores cometidos.

c) Si existe error en el proceso, corrígelo.

3- Un alumno del preuniversitario para determinar la solución de la ecuación $\frac{3x+1}{x^2+5x+6}-\frac{x+4}{x+3}=\frac{x+1}{x+2}$, realiza los pasos siguientes.

$$\frac{3x+1}{(x+3)(x+2)}-\frac{x+4}{x+3}=\frac{x+1}{x+2}\bullet/(x+3)(x+2)$$

$$3x+1-(x+4)(x+2)=(x+1)(x+3)$$

$$3x+1-(x^2+6x+8)=x^2+4x+3$$

$$3x+1-x^2-6x-8=x^2+4x+3$$

$$2x^2+7x+10=0$$

$$a=2, b=7, c=10$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=(7)^2-4(2)(10)$$

$$D=49-80$$

$$D=-31\langle 0$$

$$S=\{\ \}$$

a) ¿Es correcto el resultado obtenido? Argumenta

b) ¿Cómo resolverías esta ecuación?

4- Cierto alumno determina la solución de la ecuación $\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{x^2-2}{x^2-2x}=0$, con los pasos siguientes:

$$\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{x^2-2}{x(x-2)}=0$$

$$\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{x^2-2}{x(x-2)}=0 \bullet / x(x-2)$$

$$(x+2)(x-2)+x(x-1)-(x^2-2)=0$$

$$x^2-4+x^2-1-x^2+2=0$$

$$x^2-3=0$$

$$x=\pm\sqrt{3}$$

a) Decide si la solución obtenida es correcta.

b) Analiza si el alumno cometió algún error.

c) Resuelve la ecuación y expresa tu acuerdo o desacuerdo con el trabajo realizado por el estudiante.

5- Al determinar la solución de la ecuación $\frac{3(x+1)}{x-1}=\frac{4x+1}{x+1}$, un alumno realiza los pasos siguientes:

$$\frac{3(x+1)}{x-1}=\frac{4x+1}{x+1} \bullet /(x-1)(x+1)$$

$$3(x-1)(x+1)=(4x+1)((x-1))$$

$$3(x^2-1)=4x^2-4x+x-1$$

$$3x^2-3=4x^2-3x-1$$

$$4x^2-3x^2-3x-1+3=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=-1$ o $x=-2$

a) ¿Es correcta la solución obtenida? Argumenta

b) Si observas que el estudiante cometió algún error, expresa en qué consiste el error.

c) Resuelve la ecuación y expresa en qué se diferencia tu trabajo con el del estudiante.

6- El procedimiento seguido por un alumno para resolver una ecuación fue el siguiente:

$x+\frac{3}{x}=\frac{x^2+3+2x}{x} \bullet / x$

$x^2+3=x^2+3+2x$

$x^2+3-x^2-3-2x=0$

$-2x=0$

$x=0$

Comprobación: para $x=0$

$0+\frac{3}{0}=\frac{0^2+3+0}{0}$

$\frac{3}{0}=\frac{3}{0}$ Proposición falsa

$S=\{0\}$

Solución incorrecta

a) Determina si el alumno cometió algún error en el proceso. Argumenta

b) Comprueba la solución ¿En qué se diferencia tu trabajo del realizado por el alumno?

c) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió que a=4 no es solución de la ecuación.

7- Un alumno al resolver la ecuación $\frac{2(x+2)}{x-2}-\frac{3(x-2)}{2x+3}=\frac{x^2-52}{2x^2-x-6}$, procede de la forma siguiente:

$$\frac{2(x+2)}{x-2}-\frac{3(x-2)}{2x+3}=\frac{x^2-52}{(x-2)(2x+3)}\bullet /(x-2)(2x+3)$$

$$(2x+4)(2x+3)-(3x-6)(x-2)=x^2-52$$

$$4x^2+14x+12-(3x^2-12x+12)=x^2-52$$

$$4x^2+14x+12-3x^2+12x-12=x^2-52$$

$$x^2+26x=x^2-52$$

$$26x=-52$$

$$x=\frac{-52}{26}$$

$$x=-2$$

Comprobación: para $x=-2$

$$\frac{2(-2+2)}{-2-2}-\frac{3(-2-2)}{2(-2)+3}=\frac{(-2)^2-52}{2(-2)^2-(-2)-6}$$

$$\frac{0}{-4}-\frac{-12}{-1}=\frac{-48}{4}$$

$-12=-12$ $\qquad S=\{-2\}$

Proposición verdadera.

a) Comprueba si el procedimiento de resolución es correcto

b) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió el conjunto solución.

8- Un alumno al resolver una ecuación lineal procede de la forma siguiente:

$$\frac{4}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$$

$$\frac{4}{x-2}=\frac{16}{(x-2)(x+2)}\bullet /(x-2)(x+2)$$

$$4(x+2)=16$$

$$4x+8=16$$

$$4x=16-8$$

$$4x=8$$

$$x=2$$

Comprobación: para $x=2$

$$\frac{4}{2-2}=\frac{16}{(2)^2-4}$$

$$\frac{4}{0}=\frac{16}{0}$$

$0=0$ Proposición falsa

$S=\{\ \}$ No es solución

a) Verifica si el alumno cometió algún error.

b) En caso afirmativo, identifícalo.

c) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió que x=-3 no es solución de la ecuación.

d) ¿Cuál es la solución de la ecuación? Argumenta.

9- El profesor al revisar la libreta de un alumno le dice “has realizado un proceso de resolución con errores”. A continuación se presenta lo que el alumno tenía en su libreta.

$$\frac{3}{c+3}=\frac{9}{c^2-9}$$

$$\frac{3}{c+3}=\frac{9}{(c-3)(c+3)}\bullet/(c-3)(c+3)$$

$$3c^2-9=9c+27$$

$$3c^2-9c-36=0\div/(3)$$

$$c^2-3c-12=0$$

$$(c-6)(c+2)=0$$

$c=6$ o $c=-2$

Comprobación: para $c=6$

$$\frac{3}{6+3}=\frac{9}{(6)^2-9}$$

$$\frac{3}{9}=\frac{9}{36-9}$$

$$\frac{3}{9}=\frac{9}{27}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Para $c=-2$ $\qquad S=\{6\}$

$$\frac{3}{-2+3}=\frac{9}{(-2)^2-9}$$

$$\frac{3}{1}=\frac{9}{4-9}$$

$$3=\frac{9}{-5}$$

Proposición verdadera.

a) Localiza los errores cometidos por el alumno.

b) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió el conjunto solución.

c) ¿Por qué tú crees que el alumno cometió cada uno de los errores?

10- Un alumno del preuniversitario al resolver la ecuación $\frac{b-2}{b-3}=\frac{b+6}{b+4}$, procede de la forma siguiente:

$$\frac{b-2}{b-3}=\frac{b+6}{b+4}\bullet/(b-3)(b+4)$$

Comprobación: para $b=10$

$$\frac{10-2}{10-3}=\frac{10+6}{10+4}$$

$$\frac{8}{7}=\frac{16}{14}$$

$(b-3)(b+4)=(b+6)(b-3)$

$b^2+2b+2=b^2+4b-18$

$-4b+2b=-20$

$-2b=-20$

$b=10$

a) Determina si hay errores en el proceso de resolución de la ecuación.
b) En caso afirmativo identifícalos.
c) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió el conjunto solución de la ecuación.
d) Valora las causas de la comisión de los errores.

11-Al resolver la ecuación $\frac{2x-1}{x^2+3x}=\frac{3}{x+3}$, un alumno procede de la forma siguiente:

$\frac{2x-1}{x^2+3x}=\frac{3}{x+3}$

$\frac{2x-1}{x(x+3)}=\frac{3}{x+3}\bullet / x(x+3)$

$2x-1=3x$

$x=-1$

Comprobación: para $x=-1$

$\frac{2-1-1}{-1^2+3-1}=\frac{3}{-1+3}$

$\frac{0}{3}=\frac{3}{2}$

$3=\frac{3}{2}$ Proposición falsa.

$S=\{\ \}$ No es solución.

a) En el proceso de resolución de la ecuación se cometieron errores. Argumenta indicando cuáles son los errores.

b) Valore las causas de la comisión de los errores.

12-Un alumno al resolver una ecuación fraccionaria lo hace de la forma siguiente:

$$\frac{5}{b-5}=\frac{7}{3b-7}$$

$$5(3b-7)=7(b-5)$$

$$15b-35=7b-35$$

$$15b-7b=\cancel{-35}+\cancel{35}$$

$$8b=0$$

$$b=0$$

Comprobación:

$$15(0)-35=7(0)-35$$

$$-35=-35$$

$$S=\{0\}$$

Proposición verdadera.

a) Decide si el alumno cometió algún error.

b) Identifícalo en caso de existir.

c) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió el conjunto solución.

13-Un alumno resuelve una ecuación de la forma siguiente:

$$\frac{2m}{2m-3}=\frac{m+2}{m}$$

$$\frac{2m}{2m-3}=\frac{m+2}{m}\bullet/\,m(2m-3)$$

$$2m^2=(2m-3)(m+2)$$

$$2\cancel{m^2}=2\cancel{m^2}+4m-3m-6$$

$$m=6$$

Comprobación:

$$\frac{2m}{2m-3}=\frac{m+2}{m}$$

$$\frac{1\cancel{2}}{\cancel{9}}=\frac{\cancel{8}}{\cancel{6}}$$

$$\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

$$S=\{6\}$$

Proposición verdadera.

a) Decide si el alumno cometió algún error en el proceso de resolución.

b) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió el conjunto solución.

14-Cierto alumno de un preuniversitario al resolver una ecuación fraccionaria procede de la forma siguiente:

$$\frac{x}{x+10}=\frac{x-2}{x+3}$$

$$\frac{x}{x+10}=\frac{x-2}{x+3}\bullet /(x+10)(x+3)$$

$$x(x+3)=(x-2)(x+10)$$

$$\cancel{x}^2+3x=\cancel{x}^2+8x-20$$

$$8x-3x=20$$

$$5x=20$$

$$x=\frac{20}{5}$$

$$x=4$$

comprobación:

$$\frac{-4}{-4+10}=\frac{-4-2}{-4+3}$$

$$\frac{-4}{6}=\frac{-6}{-1}$$ Resolución incorrecta

$$-\frac{2}{3}=6$$ Proposición falsa

a) Verifica si el alumno cometió algún error en el proceso de resolución.

b) Localiza el error, de haberlo cometido.

c) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió que x=-2 no es solución de la ecuación.

d) Resuelve la ecuación y compara tu trabajo con el del alumno.

15-Un alumno resuelve una ecuación fraccionaria mediante el procedimiento siguiente:

$$\frac{2x-1}{x^2+3x}=\frac{3}{x+3}$$

Comprobación:

$$2(-1)-1=3(-1)$$

$$-2-1=-3$$

$$-3=-3$$ Proposición verdadera

$$\frac{2x-1}{x(x+3)}=\frac{3}{x+3}\bullet/\,x(x+3)$$

$$2x-1=3x$$

$$-1=x$$

a) Decide si el procedimiento de resolución es correcto.

b) En caso negativo identifica los errores cometidos.

c) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió el conjunto solución.

16-Un alumno resuelve una ecuación fraccionaria mediante los pasos siguientes:

$$\frac{2}{x-3}=\frac{16}{x^2+2x-15}$$

$$\frac{2}{x-3}=\frac{16}{(x+5)(x-3)}\bullet/(x+5)(x-3)$$

$$2(x+5)=16$$

$$2x+10=16$$

$$2x=16-10$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

Comprobación:

$$\frac{2}{3-3}=\frac{16}{(3)^2+2(3)-15}$$

$$\frac{2}{0}=\frac{16}{9+6-15}$$

$$\frac{2}{0}=\frac{16}{15-15}$$

$\frac{2}{0}=\frac{16}{0}$ Imposible

$x=3$ Proposición falsa
No es solución

a) Verifique si existe algún error en el proceso de resolución.

b) En caso afirmativo identifica el error.

c) Valora la decisión tomada por el alumno.

d) Resuelve la ecuación y expresa la diferencia esencial entre tu trabajo y el realizado por el alumno.

2.4 Evaluación de la efectividad del sistema de ejercicios

En este epígrafe se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación del sistema de ejercicios, a partir del pre-experimento realizado, con medida pretest y postest.

Este sistema fue implementado en los turnos presenciales de la asignatura Matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la unidad correspondiente a la resolución de ecuaciones fraccionarias y algunos ejercicios fueron propuestos como tareas de trabajo independiente, luego fueron debatidos con los estudiantes en clases o en consultas de atención a estudiantes con dificultades, para conocer mejor como se iba favoreciendo su desempeño y observar su actitud ante los errores cometidos por ellos y por los demás.

Para la evaluación de la variable dependiente se aplicó el procedimiento siguiente:

- Determinación de dimensiones e indicadores.
- Modelación estadística de los indicadores mediante variables.
- Establecimiento de los criterios de medición de cada indicador.
- Medición de los indicadores.
- Procesamiento estadístico de los datos.
- Elaboración de juicios de valor sobre el objeto de evaluación.

Los indicadores de la dimensión 1 se conciben en la actuación del alumno después de la resolución de una ecuación lineal, es decir, en una situación en que debe ejecutar estas acciones para identificar, valorar y corregir los errores cometidos por él o por otro.

2.4.1 Modelación estadística de los indicadores mediante variables

La modelación estadística de los indicadores requiere de la ejecución de las acciones siguientes:

- Representar cada indicador mediante una variable.
- Determinar los valores a asignar a las variables en la medición (escala de medición).

Representación de cada indicador mediante una variable

Dimensión 1: Cognitivo-instrumental.

Tabla 8: Variables estadísticas de la dimensión 1		
No.	**Indicador**	**Variable estadística**
1.1	Seleccionar procedimiento según tipo de ecuación.	SP
1.2	Eliminar signos de agrupación.	ESA
1.3	Transponer términos de un miembro a otro.	TT
1.4	Calcular con monomios no numéricos.	CMNN
1.5	Calcular con números.	CCN

Dimensión 2: Comunicacional.

Tabla 9: Variables estadísticas de la dimensión 2		
No.	**Indicador**	**Variable estadística**
2.1	Crítica ante sus propios errores.	CAPE
2.2	Crítica ante los errores de los demás.	CAED

Dimensión 3: Actitudinal.

Tabla 10: Variables estadísticas de la dimensión 3		
No.	**Indicador**	**Variable estadística**
3.1	Aceptación del error.	AE
3.2	Interés por la corrección del error.	ICE
3.3	Disposición para ayudar a corregir errores de los otros	DACE

Escala de medición de cada indicador.

Los indicadores se medirán utilizando la escala siguiente:

Bien (**B**), Regular (**R**) y Mal (**M**)

2.4.2 Criterios de medición de cada indicador

Tabla 11: Matriz de valoración de los indicadores de la dimensión cognitivo-instrumental			
Indicador	**Bien (B)**	**Regular (R)**	**Mal (M)**
1.1	Identifica y valora si el procedimiento utilizado se corresponde con el tipo de ecuación y en caso de error lo corrige.	Identifica y valora si el procedimiento seleccionado se corresponde con el tipo de ecuación, pero no es capaz de corregir el error.	No identifica si el procedimiento utilizado se corresponde con el tipo de ecuación.
1.2	Identifica y valora si hay errores en la eliminación de signos de agrupación en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige todos los errores.	Identifica y valora si hay errores en la eliminación de signos de agrupación sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige los errores identificados.	No identifica si hay errores en la eliminación de signos de agrupación o identifica y valora si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no es capaz de corregir los errores.
1.3	Identifica y valora si hay errores en la transposición de	Identifica y valora si hay errores en la transposición de	No identifica si hay errores en la transposición de

	términos en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige todos los errores.	términos sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige los errores identificados.	términos o identifica y valora si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no es capaz de corregir los errores.
1.4	Identifica y valora si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige todos los errores.	Identifica y valora si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige los errores identificados.	No identifica si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos o identifica y valora si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no es capaz de corregir los errores.
1.5	Identifica y valora si hay errores en el cálculo numérico en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige todos los errores.	Identifica y valora si hay errores en el cálculo numérico sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrige los errores identificados.	No identifica si hay errores en el cálculo numérico o identifica y valora si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no es capaz de corregir los errores.

Tabla 12: Matriz de valoración de los indicadores de la dimensión comunicacional.			
Indicador	**Bien (B)**	**Regular (R)**	**Mal (M)**
2.1	Siempre reconoce sus errores.	A veces reconoce sus errores.	No reconoce sus errores.
2.2	Siempre critica los errores de los demás	A veces critica los errores de los demás.	No critica los errores de los demás.

Tabla 13: Matriz de valoración de los indicadores de la dimensión actitudinal.			
Indicador	**Bien (B)**	**Regular (R)**	**Mal (M)**
3.1	Siempre acepta sus errores.	A veces acepta sus errores.	Nunca acepta sus errores.
3.2	Siempre se interesa por corregir sus errores.	A veces se interesa por corregir sus errores.	Nunca se interesa por corregir sus errores.
3.3	Siempre tiene disposición para ayudar a corregir errores de los otros.	A veces tiene disposición para ayudar a corregir errores de los otros.	Nunca tiene disposición para ayudar a corregir errores de los otros.

2.4.3 Medición de los indicadores

Para la medición de los indicadores de cada dimensión, se utilizaron distintos instrumentos que se especifican en la tabla siguiente:

Tabla 14: Instrumentos aplicados para la medición de los indicadores.		
Dimensiones	**Indicadores**	**Instrumentos**
1	1.1	• Prueba pedagógica de entrada (anexo 3). • Prueba pedagógica de salida (anexo 5).
	1.2	
	1.3	
	1.4	
	1.5	
2	2.1	• Guía de observación, incisos 1 y 2 (anexo 4).
	2.2	
3	3.1	• Guía de observación, incisos 3, 4 y 5 (anexo 4).
	3.2	
	3.3	

2.4.4 Juicios de valor sobre el desempeño del los estudiantes antes de la implementación del sistema de ejercicios.

Se aplicó una prueba pedagógica de entrada **(anexo 3)** a los 35 estudiantes del grupo I0.5 del IPU ´´ Eduardo García Delgado´´, que conforman la muestra, con el objetivo de comprobar el desempeño de los estudiantes ante los errores cometidos por ellos o por otros, también se utilizó una guía de observación (**anexo 4**) para valorar la crítica ante sus errores y ante los errores de los demás, así como la actitud ante la comisión del error.

La prueba pedagógica de entrada (**anexo 3**) arrojó los resultados siguientes:

Tabla 15: Comportamiento de los indicadores de la dimensión cognitivo-instrumental (antes).

Variables / Categorías	SP		ESA		TT		CMNN		CCN	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	9	23,5	7	17,6	7	23,5	5	11,8	5	11,8
R	5	11,8	11	29,4	11	29,4	11	29,4	11	29,4
M	21	64,7	17	52,9	17	47,1	19	58,8	19	58,8
Total	35	100	35	100	35	100	35	100	35	100

A partir de la aplicación de la guía de observación (**anexo 4**) se obtuvieron los resultados siguientes:

Tabla 16: Comportamiento de los indicadores de la dimensión comunicacional (antes)

Variables / Categorías	CAPE		CAED	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**
B	9	23,5	7	17,6
R	9	23,5	7	17,6
M	17	52,9	21	64,7
Total	35	100	35	100

Tabla 17: Comportamiento de los indicadores de la dimensión actitudinal (antes)						
Variables / Categorías	AE		ICE		DACE	
	Cant.	%	Cant.	%	Cant.	%
B	11	29,4	11	29,4	9	23,5
R	9	23,5	7	17,6	7	17,6
M	15	47,1	17	52,9	19	58,8
Total	35	100	35	100	35	100

Como se puede apreciar en las tablas 15, 16 y 17 en el indicador 1.1 hay 9 estudiantes que identifican y valoran si el procedimiento utilizado se corresponde con el tipo de ecuación y en caso de error lo corrigen; 5 identifican y valoran si el procedimiento seleccionado se corresponde con el tipo de ecuación, pero no son capaces de corregir el error y 21 no identifican si el procedimiento utilizado se corresponde con el tipo de ecuación.

En el indicador 1.2 hay 7 estudiantes que identifican y valoran si hay errores en la eliminación de signos de agrupación en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 11 identifican y valoran si hay errores en la eliminación de signos de agrupación sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 17 no identifican si hay errores en la eliminación de signos de agrupación o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 1.3 hay 7 estudiantes que Identifican y valoran si hay errores en la transposición de términos en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 11 identifican y valoran si hay errores en la transposición de términos sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 17 no identifican si hay errores en la transposición de términos o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 1.4 sólo 5 estudiantes identifican y valoran si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 11 identifican y valoran si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 19 no identifican si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 1.5 sólo 5 estudiantes identifican y valoran si hay errores en el cálculo numérico en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 11 identifican y valoran si hay errores en el cálculo numérico sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 19 no identifican si hay errores en el cálculo numérico o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 2.1 hay 9 estudiantes que siempre reconocen sus errores; 9 a veces reconocen sus errores y 17 que no reconocen sus errores.

En el indicador 2.2 hay 7 estudiantes que siempre critican los errores de los demás; 7 que a veces critican los errores de los demás y 21 que no critican los errores de los demás.

En el indicador 3.1 hay 11 estudiantes que siempre aceptan sus errores; 9 que a veces aceptan sus errores y 15 que nunca aceptan sus errores.

En el indicador 3.2 hay 11 estudiantes que siempre se interesan por corregir sus errores; 7 que a veces se interesan por corregir sus errores y 19 que nunca se interesan por corregir sus errores

En el indicador 3.3 hay 9 estudiantes que siempre tienen disposición para ayudar a corregir errores de los otros; 7 que a veces tienen disposición para ayudar a corregir errores de los otros y 10 que nunca tienen disposición para ayudar a corregir errores de los otros

2.4.5 Juicios de valor sobre el desempeño del los estudiantes después de la implementación del sistema de ejercicios

Luego de la implementación del sistema de ejercicios se realizó una prueba pedagógica (**anexo 4**) que arrojó los resultados siguientes:

En la dimensión cognitivo-instrumental los indicadores se comportaron de la forma siguiente:

Tabla 18: Comportamiento de la dimensión cognitivo-instrumental (después)

Variables / Categorías	SP		ESA		TT		CMNN		CCN	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	15	41,2	17	47,1	19	58,8	16	74,1	17	52,9
R	11	35,3	11	35,3	11	29,4	12	35,3	13	35,3
M	9	23,5	7	17,6	5	11,8	7	17,6	5	11,8
Total	35	100	35	100	135	100	35	100	35	100

A partir de la aplicación de la guía de observación (**anexo 4**) se obtuvieron los resultados siguientes:

Tabla 19: Comportamiento de la dimensión comunicacional (después)

Variables / Categorías	CAPE		CAED	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**
B	17	52,9	15	41,2
R	15	41,2	15	41,2
M	3	5,9	5	17,6
Total	35	100	35	100

Tabla 20: Comportamiento de la dimensión actitudinal (después)

Variables / Categorías	AE		ICE		DACE	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	21	64,7	17	47,1	15	41,2
R	11	29,4	15	41,1	17	47,1
M	3	5,9	3	8,5	3	8,5
Total	17	100	17	100	17	100

Como se puede apreciar en las tablas 18, 19 y 20 en el indicador 1.1 hay 15 estudiantes que identifican y valoran si el procedimiento utilizado se corresponde con el tipo de ecuación y en caso de error lo corrigen; 11 identifican y valoran si el procedimiento seleccionado se corresponde con el tipo de ecuación, pero no son capaces de corregir el error y 9 no identifican si el procedimiento utilizado se corresponde con el tipo de ecuación.

En el indicador 1.2 hay 17 estudiantes que identifican y valoran si hay errores en la eliminación de signos de agrupación en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 11 identifican y valoran si hay errores en la eliminación de signos de agrupación sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 7 no identifican si hay errores en la eliminación de signos de agrupación o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 1.3 hay 19 estudiantes que Identifican y valoran si hay errores en la transposición de términos en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 11 identifican y valoran si hay errores en la transposición de términos sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 5 no identifican si hay errores en la transposición de términos o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 1.4 hay 16 estudiantes identifican y valoran si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 12 identifican y valoran si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 7 no identifican si hay errores en el cálculo con monomios no numéricos o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 1.5 hay 17 estudiantes identifican y valoran si hay errores en el cálculo numérico en las fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen todos los errores; 13 identifican y valoran si hay errores en el cálculo numérico sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente y corrigen los errores identificados y 5 no identifican si hay errores en el cálculo numérico o identifican y valoran si hay errores sólo en algunas fases de resolución del ejercicio en que la operación está presente, pero no son capaces de corregir los errores.

En el indicador 2.1 hay 17 estudiantes que siempre reconocen sus errores; 15 a veces reconocen sus errores y 3 que no reconoce sus errores.

En el indicador 2.2 hay 15 estudiantes que siempre critican los errores de los demás; 15 que a veces critican los errores de los demás y 5 que no critican los errores de los demás.

En el indicador 3.1 hay 21 estudiantes que siempre aceptan sus errores; 11 que a veces aceptan sus errores y 3 que nunca acepta sus errores.

En el indicador 3.2 hay 17 estudiantes que siempre se interesan por corregir sus errores; 15 que a veces se interesan por corregir sus errores y 3 que nunca se interesan por corregir sus errores.

En el indicador 3.3 hay 15 estudiantes que siempre tienen disposición para ayudar a corregir errores de los otros; 17 que a veces tienen disposición para ayudar a corregir errores de los otros y 3 que nunca tienen disposición para ayudar a corregir errores de los otros.

CONCLUSIONES:

1. En el proceso de enseñanza-aprendizaje se considera que el estudiante comete un error cuando ejecuta una acción que lo conduce a un resultado que se desvíe del correcto. Tal es la importancia del tratamiento a los errores que ha sido incluido como uno de los lineamientos generales establecidos por la Comisión Nacional de Matemática del MINED.

2. El desempeño de los estudiantes ante los errores cognitivos en la resolución de ecuaciones fraccionarias se concibe en la investigación realizada como el proceso en el cual el alumno identifica, valora y corrige errores cometidos por él o por otros.

3. Se elaboró un sistema de ejercicios para favorecer el desempeño de los estudiantes del preuniversitario “Eduardo García Delgado” al resolver ecuaciones fraccionarias, donde se tuvo en cuenta las operaciones del procedimiento de resolución y los procedimientos fundamentales del desempeño ante los errores.

4. Al implementar el sistema de ejercicios se produjo un cambio positivo en el nivel de desempeño ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones fraccionarias en los estudiantes del grupo 10.5 del IPU “Eduardo García Delgado” de Trinidad.

RECOMENDACIONES

1. Poner a disposición del equipo metodológico municipal este trabajo con vista a su divulgación en otros centros de la Educación Preuniversitaria.
2. Realizar estudios con otros grupos del preuniversitario con el objetivo de realizar ajustes a este trabajo en correspondencia con nuevas implementaciones.

BIBLIOGRAFÍA

2 Albarrán, I. (2006). *Didáctica de las Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

3 Allendoerfer, C. y Oarkley, M. (1989). *Introducción Moderna a la Matemática Superior*. La Habana: Pueblo y Educación.

4 Álvarez de Zayas, C. (1999). *La escuela en la vida.* La Habana: Pueblo y Educación.

5 Álvarez, M. (2005). *Las causas de los errores matemáticos de los estudiantes. En La enseñanza – aprendizaje de Español, Matemática e Historia.* La Habana: Molinos Trade, S. A.

6 Álvarez, M. (2004). *Etiología de errores matemáticos. En Resúmenes trabajos del III Congreso de Didáctica de las Ciencias*. La Habana.

7 Astolfi, J. P. (1991). *El error un medio para enseñar*. España: Editora Sevilla.

8 Ballester, S. (2000). *Metodología de la enseñanza de la matemática* Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.

9 Ballester, S. (2000). *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Tomo II. La Habana: Pueblo y Educación.

10 Batanero, C y otros. (1994). *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*. International Journal of Mathematics Education Science and Technology, *25* (pp: 527-547).

11 Bermúdez, R y Pérez, L. (2004). *Aprendizaje Formativo y crecimiento personal*. La Habana. Pueblo y Educación.

12 Bernabeu, M., Jiménez, M., León, T. y Matos, C. (2006). *Errores frecuentes de los estudiantes de educación básica en la evaluación del desempeño académico en Matemática y Español*. La Habana. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Grupo de Evaluación de Calidad de la educación.

13 Bosch, E. (2007). *Sistema de superación de idioma inglés para los profesores de la Facultad de Cultura Física de Villa Clara*. Tesis en opción

al título de doctor en ciencias. Villa Clara.

14 Brito, H. (1989). *Psicología general para los ISP*. La Habana: Pueblo y Educación.

15 Campistrous, L. y otros (1989). *Matemática décimo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

16 Campistrous, L. y otros (1990). *Matemática onceno grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

17 Campistrous, L., Rivero, H., Durán, A. & Sandoval, A. (1991). *Matemática duodécimo grado*. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.

18 Campistrous, L. y otros (1989): *Orientaciones Metodológica 10mo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

19 Castellanos, D. y otros (2002). *Aprender y enseñar en la escuela*. La Habana: Pueblo y Educación.

20 Castro, F. (1980): *Informe Central al II congreso del PCC*. La Habana: Editora Política.

21 Collazo, B. (1992) *La orientación en la Actividad Pedagógica*. La Habana: Pueblo y Educación.

22 Danilov, M. A. (1981). *Didáctica de la escuela media.* La Habana: Pueblo y Educación.

23 Del Puerto, S. M. y Minnaard, C. (2004). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas.* Revista Iberoamericana de Educación. Recuperado de www.rieoei.org ISSN: 1681-5653).

24 Duverger, M. (1983). *Sociología de la Política*. Barcelona: Ariel.

25 Engler, A. (2004). *Los errores en el aprendizaje de la matemática*. Argentina. Recuperado de aengler@cfa.unl.edu.ar.

26 Espinosa, F. *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológico didácticos*. México: Iberoamericana.

27 Franchi, L. y Hernández, A. (Febrero, 2003). *Tipología de errores en el área de la geometría plana*. En, Investigación Arbitrada, 8 (24).

28 García, G. (2002). *Compendio de Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.

29 Gómez, P. (2006). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España.

30 Hernández, J. (2000). *El proceso de clasificación de ecuaciones matemáticas, paso inicial previo para el logro de éxitos en su tratamiento metodológico*. IPVCE "Comandante Ernesto Guevara". Villa Clara.

31 Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. (2005) *Fundamentos de la Investigación Educativa*. Maestría en Ciencias de la Educación Módulo I, 1ra y 2da parte. La Habana: Pueblo y Educación.

32 Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. (2006): *Fundamentos de la Investigación Educativa*. Maestría en Ciencias de la Educación. Módulo II, 1ra y 2da parte. La Habana: Pueblo y Educación.

33 Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño. (2007): *Mención en Educación de Adultos*. Maestría en Ciencias de la Educación. Módulo III, 1ra y 2da parte. La Habana: Pueblo y Educación.

34 Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre metodología de al enseñanza de la Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

35 Klingberg, L. (1984). *Introducción a la Didáctica General*. La Habana: Pueblo y Educación.

36 La Nues Bayada, M. y Fernández Rivero, E. (2005). *Fundamentos de la Metodología Investigativa*. CD Maestría en ciencias de la Educación. Módulo II, Mención Adulto, La Habana.

37 Lima, S. y otros (2005). *Las TIC en fundamentos de la investigación educativa*. Maestría en ciencias de la Educación. Tabloide Módulo I, segunda parte. Mención Adulto. La Habana: Pueblo y Educación.

38 Lorences, J. (2007). *Aproximación al sistema como resultado científico.* ISP “Félix Varela”. Santa Clara. Cuba.

39 Martínez, M. (2005). *Los métodos de de investigación educativa: lo cuantitativo y lo cualitativo*. La Habana: Pueblo y Educación.

40 Ministerio de Educación de Cuba. (1999). *Programa director de la Matemática.* La Habana: Pueblo y Educación.

41 Ministerio de Educación de Cuba. (2004). *Programa séptimo grado*. *Secundaria Básica*. La Habana: Pueblo y Educación.

42 Ministerio de Educación de Cuba. (2004). *Programa octavo grado*. *Secundaria Básica*. La Habana: Pueblo y Educación.

43 Ministerio de Educación de Cuba. (2004). *Programa noveno grado. Secundaria Básica*. La Habana: Pueblo y Educación.

44 Muñoz, F. (1985). *Ejercitación en la enseñanza de la Matemática*. Revista Educación, XV, 89, 39-49.

45 Muñoz. F. y otros (1989). *Matemática quinto grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

46 Muñoz. F. y otros (1989). *Matemática sexto grado.* La Habana: Pueblo y Educación.

47 Muñoz. F. y otros (1989). *Matemática séptimo grado.* La Habana: Pueblo y Educación.

48 Muñoz. F. y otros (1989). *Matemática octavo grado.* La Habana: Pueblo y Educación.

49 Muñoz. F. y otros (1989). *Matemática noveno grado.* La Habana: Pueblo y Educación.

50 Mora, N. (2008).Desempeño de os estudiantes del primer semestre del curso de Superación Integral para Jóvenes ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones lineales.Tesis presentada en opción al título académico de Master en Ciencias de la Ecuación.Sancti Spíritus.

51 Pérez, R. y otros (2007). *Didácticas especiales de la Física y la Matemática.*

Necesidad de una concepción didáctica integradora de las asignaturas de ciencias exactas en la Educación Preuniversitaria en Cuba. Maestría en Ciencias de la Educación. Módulo III. Segunda Parte (pp. 6-26). La Habana: Pueblo y Educación.

52 Petrosky, A. V. (1979). *Psicología General*. La Habana: Pueblo y Educación.

53 Pochulu, D. (1994). *Análisis y categorización de los errores en el aprendizaje de la Matemática*. Revista Iberoamericana de Educación. Recuperado de (www.rieoei.org ISSN: 1681-5653).

54 Portal, M. (2004). *Material sobre Sistema*. Universidad Central de la Villas. Soporte Magnético.

55 Real Academia Española (2006). *Integración. Diccionario de la Lengua Española*. Vigésima segunda edición. Recuperado el 23 de abril de 2008, en http://www.rae.es/

56 Rebollo, M.A. (1999). *La teoría sociocultural aplicada al estudio de la televisión en el ámbito de la educación de personas adultos*. Tesis en opción al título de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Sevilla.

57 Rico, P. y Silvestre Oramas, M. (1997). *El proceso de enseñanza aprendizaje*. ICCP. La Habana.

58 Rico, L. y otros (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 69-108). México.: Iberoamericana.

59 Rosental, M. y Ludin, P. (1984). *Diccionario Filosófico*. La Habana: Edición Revolucionaria.

60 Rubinsteins, S. V. (1967). *Principios de la Pedagogía General*. La Habana: Edición Revolucionaria.

61 Savin, N. A. (1979). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.

62 Silvestre, M. y Zilberstein, J. (2002). *Hacia una didáctica desarrolladora*. La Habana: Pueblo y Educación.

63 Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las*

matemáticas en la Educación Secundaria. Barcelona: Horsori.

64 Vigotsky, L. S. (1981) *Pensamiento y lenguaje*. La Habana: Edición Revolucionaria.

65 Villavicencio, M. (2004). *En búsqueda del equilibrio en la enseñanza de la Matemática, a la luz de las teorías del aprendizaje. La necesidad de dificultad. Cartilla No. 10*. Lima. Perú. Recuperado de http://www.huascaran.edu.pe/boletin/0_link/b_e10.

66 Zilberstein, J. (2002). *Didáctica de la escuela primaria*. La Habana: Pueblo y Educación.

ANEXOS

Anexo 1

Guía de entrevista a profesores:

Objetivo: Constatar opiniones sobre el nivel de dominio que tienen los profesores de Matemática del IPU Eduardo García Delgado acerca de los errores y su tratamiento.

Preguntas a realizar.

1. ¿Cómo defines el error matemático?
2. ¿Cuáles consideras que son los errores más frecuente que cometen los estudiantes al resolver ecuaciones fraccionarias?
3. ¿Cuáles son a tu criterio las causas de los errores que cometen los estudiantes en este contenido?
4. ¿Cómo procedes para corregir los errores que con más frecuencia cometen los estudiantes al resolver ecuaciones fraccionarias?
5. ¿Cómo reaccionan los estudiantes ante la comisión de errores?
6. ¿Consideras que los ejercicios del libro de texto y de las teleclases están encaminados a resolver estos errores?

Anexo 2

Prueba de diagnóstico.

Objetivo: Determinar los errores más frecuentes que cometen los estudiantes del preuniversitario al resolver ecuaciones fraccionarias.

Resuelve y comprueba las siguientes ecuaciones:

a.) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{3}{5}$

b.) $\frac{2}{x}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2x}$

c.) $\frac{4}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$

d.) $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-6}=\frac{5x}{x^2-7x+6}$

Anexos 3

Prueba pedagógica de entrada.

Objetivo: Constatar el desempeño de los estudiantes ante los errores al resolver ecuaciones fraccionarias.

1. Un alumno al determinar la solución de la ecuación $\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}=4$ lo hace de la forma siguiente:

$$\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}=4\bullet/(3x)$$

$$3x\left(\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}\right)=4$$

$$15+x-4=4$$

$$x+11=4$$

$$x=4-11$$

$$x=-7$$

   a) El alumno cometió un error en el proceso. Argumenta.
   b) Corrige el error cometido.

2- El profesor al revisar la libreta de un alumno le dice “has realizado un proceso de resolución con errores”. A continuación se presenta lo que el alumno tenía en su libreta.

$$\frac{x-8}{x}=\frac{x}{2}+3$$

$$\frac{x-8}{x}=\frac{x}{2}+3\bullet/2x$$

$$2(x-8)=x^2+6x$$

$$2x-16=x^2+6x$$

$$x^2+6x+2x+16=0$$

Comprobación:

$$\frac{-4-8}{-4}=\frac{-4}{2}+3$$

$$3=-2+3$$

$$3=1$$

Proposición verdadera.

$$S=\{\ \}$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(x+4)^2 = 0$$

$$x = -4$$

a) Localiza los errores cometidos por el alumno.

b) Valora la decisión tomada por el alumno cuando escribió el conjunto solución.

c) ¿Por qué tú crees que el alumno cometió cada uno de los errores?

Anexo 4

Guía de observación

Objetivo: Comprobar el desempeño de los estudiantes ante los errores al resolver ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas, para valorar su comunicación y actuación.

1. ¿Es crítico ante sus propios errores?
   Siempre___, A veces___, Nunca___.
2. ¿Critica los errores de los demás?
   Siempre___, A veces___, Nunca___.
3. ¿Acepta el error?
   Siempre___, A veces___, Nunca___.
4. ¿Se interesa por la corrección del error?
   Siempre___, A veces___, Nunca___.
5. ¿Tiene disposición para ayudar a corregir errores de los otros?
   Siempre___, A veces___, Nunca___.

Anexo 5

Prueba pedagógica de salida.

Objetivo: Constatar el desempeño de los estudiantes ante los errores al resolver ecuaciones fraccionarias.

1- Un alumno al determinar la solución de la ecuación $7x-5=0$ lo hace de la forma siguiente:

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{x+1}=x$$

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{x+1}=x\,/\bullet 3(x+1)$$

$$x(x+1)+3=3x(x+1)$$

$$x^2+x+3=3x^2+x$$

$$x^2+4x-3=0$$

$$(2x-1)(x+3)=0$$

$2x-1=0$ o $x+3=0$

$x=\frac{1}{2}$ $\qquad x=-3$

a) El alumno cometió un error en el proceso. Argumenta.

b) Corrige el error cometido.

2- Un estudiantes procede de la forma siguiente al resolver una ecuación:

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}$$

$$2-x+1=x-1$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

Comprobación:

$$\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \qquad\qquad S = \{2\}$$

a) Decide si el proceso de resolución es correcto.

b) En caso negativo, identifica los errores cometidos

c) Valora la decisión tomada por el alumno al escribir $S = \{2\}$