

**UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS  
CAP : "SILVERIO BLANCO NUÑEZ"  
SANCTI SPIRITUS.**

**Tesis en opción al Título Académico de Master en Ciencias de la Educación.**

**Mención: Preuniversitario.**

**Título: Tareas docentes para la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en estudiantes del décimo grado.**

**Autora: Lic. Dania Osmara Blanco Martínez.**

**EMCC.**

**Curso 2009-2010**



**UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS  
CAP :”SILVERIO BLANCO NUÑEZ”  
SANCTI SPIRITUS.**

**Tesis en opción al Título Académico de Master en Ciencias de la Educación.**

**Mención: Preuniversitario.**

**Título: Tareas docentes para la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en estudiantes del décimo grado.**

**Autora: Lic. Dania Osmara Blanco Martínez.**

**Tutora: Msc. Ela Orellana Pérez.**

**EMCC.**

**Curso 2009-2010**

## **Pensamiento:**

**“Y pensamos que no hay mejor sistema de educación que aquel que prepara al niño a aprender por sí.”**

**José Martí.**

## **Dedicatoria:**

**A mi madre que aunque no está con nosotros, sé lo orgullosa que estaría conmigo.**

**A mis hijos, Frank y Massiel que son la razón de mi existir y me dan fuerzas para seguir adelante.**

**A mi esposo, por su ayuda incondicional.**

**A la Revolución Cubana, por la oportunidad que me ha ofrecido.**

**A todos, muchas gracias.**

## **Agradecimientos:**

**A mi tutora por su agudeza en su pensamiento y por su dedicación constante al asesoramiento de esta investigación.**

**A mis estudiantes, por haberme permitido experimentar tantos conocimientos a favor de su bienestar.**

**A mis compañeros de trabajo que en todo momento se preocuparon por mi desempeño en los estudios.**

**A todos los que de una forma u otra aportaron sus conocimientos y esfuerzos para la realización de este trabajo,**

**Muchas gracias.**

## **Resumen:**

La presente investigación se llevó a cabo en la EMCC de Sancti Spíritus. Fue concebida sobre la base de las principales dificultades que se encuentran en el banco de problemas de la escuela y que tienen su singularidad en el décimo grado. El objetivo lo constituye aplicar tareas docentes para contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en los estudiantes de décimo grado, en el cual realizamos la práctica pedagógica profesional. En el proceso de investigación fueron utilizados diferentes métodos del nivel teórico y del nivel empírico. El trabajo está estructurado en dos capítulos. En el primero se exponen las concepciones teóricas de la enseñanza aprendizaje de la habilidad calcular con radicales. En el segundo se exponen la fundamentación, propuesta y validación de las tareas docentes que se proponen para la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales. La característica fundamental de estas tareas está en el protagonismo de los estudiantes para la obtención de cada uno de los procedimientos que conforman el cálculo con radicales.

# Índice

|  | Pág.      |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| <b>Capítulo 1: El cálculo con radicales. Formación y desarrollo de las habilidades correspondientes.</b>         | <b>10</b> |
| 1.1 El cálculo con radicales en el aprendizaje de la matemática.   | 16        |
| 1.2 Los procedimientos de solución en matemática. Procedimientos algorítmicos.                                   | 18        |
| 1.3 Estructuración metodológica de sistemas de clases donde intervienen procedimientos algorítmicos.             | 23        |
| 1.4 Concepto de habilidades.   | 25        |
| 1.4.1 Habilidades matemáticas.   | 32        |
| 1.4.2 Habilidades de cálculo.  | 37        |
| 1.4.3 Habilidades de cálculo con radicales.  | 38        |
| <b>Capítulo 2: Tareas docentes dirigidas a la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales.</b> | <b>40</b> |
| 2.1 Constatación inicial.  | 40        |
| 2.2 Características de la orientación de las tareas docentes concebidas.   | 46        |
| 2.3 Ejemplos que tipifican la orientación de tareas docentes.  | 51        |
| 2.4 Resultados.  | 77        |
| <b>Conclusiones.</b>   | <b>79</b> |
| <b>Recomendaciones.</b>  | <b>80</b> |
| <b>Bibliografía.</b>   | <b>81</b> |
| <b>Anexos.</b>   |           |

## **Introducción:**

“La verdadera educación exige mente flexible y rápida, libre de prejuicios, libertad individual e inteligencia que logre seres dinámicos, responsables, comprometidos, en continua búsqueda, seguros, confiados en sí mismos, abiertos al cambio, que rechacen la opresión y la injusticia”. Bernabeu Plous, M (1996).

En el programa del Partido Comunista Cuba se plantea la necesidad de perfeccionar vías y formas de trabajo que propicien un mayor y más efectivo desarrollo y control de los conocimientos.

Actualmente hay muchos especialistas preocupados por perfeccionar las formas métodos y vías para desarrollar habilidades en los estudiantes.

Al respecto nuestro Comandante Jefe ha expresado: ...” entre nuestros alumnos están los hombres y mujeres que triunfarán, que llenarán de orgullo la Patria de mañana, cuyos nombres recorrerán el mundo, en cuya inteligencia y en cuyas manos estará un futuro mejor para nuestro pueblo, en cuyas manos, en cuya inteligencia estará la riqueza del mañana.” Castro, F (1962).

Para lograr estas aspiraciones, el proceso de enseñanza – aprendizaje debe dirigirse de modo que los alumnos, sean agentes activos en la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de las habilidades y capacidades, enfrentándose a contradicciones que deben ser resueltas a través de su aprendizaje, es necesario desarrollar la capacidad de reflexionar sobre los contenidos que aprenden y la forma en que se aprenden, que autorregulen su propio proceso.

La sociedad actualmente demanda que se instaure un nuevo modelo basado en la capacidad de producir y utilizar conocimientos. La norma en el tercer milenio será la de una educación a lo largo de toda la vida, que cultive el intelecto, valores y principios, y que conduzcan a modelos mentales tales como el aprendizaje continuo, el trabajo en equipos y la capacidad de cambios, tomando como guía los cuatro pilares básicos que constituyen el fundamento de la educación en el siglo XXI, propuestos en el Informe Delors (1996).

Estos cuatro pilares básicos determinados por la UNESCO que constituyen una excelente vía para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza –aprendizaje en los momentos actuales son: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser.

El desarrollo del pensamiento pedagógico cubano y su manifestación en las ideas de Félix Varela, José de la Luz y Caballero y José Martí, acerca de la educación científica del ciudadano, sustenta las exigencias de las actuales transformaciones. De igual modo, tiene su expresión la continuidad de las tradiciones y los aportes de Manuel F. G, Dulce María Escalona, Antonio Núñez Jiménez, L. Campistrous, Celia Rizo, Matilde Bernabeu y otros científicos y educadores cubanos a la enseñanza de las ciencias y de la Matemática (Tabloide, Mod.3).

La Matemática es una de las asignaturas que más aporta para conocer y transformar el mundo, con ella se puede encontrar el germen de la vida. Por ello se incluye en todos los currículos de la educación general en Cuba con una frecuencia semanal alta.

La enseñanza de la Matemática es un proceso importante y una parte esencial en la formación de los estudiantes, propicia el desarrollo de habilidades generales que le permiten al hombre actuar con eficiencia ante múltiples objetos, aún cuando sean desconocidos.

Entre los lineamientos generales para la enseñanza de la Matemática en el preuniversitario se encuentran:

Sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, incluyendo dentro de estos últimos los procedimientos heurísticos que faciliten la búsqueda de vías de solución a problemas y ejercicios y los procedimientos algorítmicos que propician las reglas para solucionar determinados tipos de ejercicios.

En las Indicaciones metodológicas Generales de la asignatura Matemática para las EMCC se orienta que ésta no puede centrarse en recordar terminologías, manipular símbolos y algoritmos rutinarios, que los alumnos deben ser capaces de describir cómo han llegado a su solución y qué dificultades encontraron, propiciando la discusión, reflexión y el análisis del procedimiento. Para dar cumplimiento a estas exigencias metodológicas, debe lograrse durante la clase:

- Reforzar la comprensión de conceptos y procedimientos para integrarlos a sistemas más amplios a través de la generalización o diferenciación y de su transferencia de una forma a otra de representación.
- La discusión con los alumnos del porqué de las posibles respuestas a fin de propiciar el análisis de los errores y fundamentar la respuesta correcta en un clima afectivo favorable.
- Emplear métodos y procedimientos heurísticos que promuevan un aprendizaje activo y creador.
- Dedicar especial atención a la formulación de preguntas, que deben caracterizarse por ser productivas, y guiar la búsqueda del conocimiento.

El cálculo ha acompañado al hombre desde los primeros años de su vida, desde que tuvo que expresar numéricamente lo que tenía a su alrededor, fundamentalmente de aquello que incidió en su supervivencia.

En el 10. grado esta habilidad aparece declarada en todas las unidades del programa, en la Unidad 1: Aritmética. Trabajo con variables. Ecuaciones, se debe calcular potencias y raíces mediante el empleo de tablas y/o de propiedades.

El desarrollo de la misma ha sido una problemática existente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se considera que en la medida que se desarrolle esta habilidad mejorarán los resultados de la asignatura y a partir de ella, podrán los estudiantes aplicar estos conocimientos a la vida práctica y cotidiana.

En la enseñanza - aprendizaje de la Matemática se manifiestan insuficiencias por el arrastre de ideas del conductismo; por ejemplo, en la fijación de procedimientos algorítmicos se emplea una elevada cantidad de ejercicios donde el estímulo es resolver cada ejercicio y la respuesta (ofrecida por el profesor) es el procedimiento de solución que se repetirá decenas de veces, obviando la obtención por el alumno del algoritmo de solución que contribuirá a su propia motivación. Este tipo de manifestación, opuesta a las expresadas en documentos normativos como el Programa Director de la Matemática, manual Especializado y los de la disciplina para el Preuniversitario, se puede apreciar también en la concepción de los libros de texto, así como en el criterio de falta de tiempo para la ejercitación expresado por profesores, cuando realmente, sin excluir las repeticiones válidas de procedimientos algoritmos y operaciones de cálculo que ayuden en la sistematización del contenido, debemos mejorar la orientación para la obtención del algoritmo y el desarrollo del pensamiento lógico e integral de la personalidad del estudiante. (Tabloide.mod 3).

En el análisis de la bibliografía (libro de texto) al alcance de los alumnos se pudo concluir que no proporcionan las condiciones para que este sea capaz de lograr los objetivos que persigue el programa de la asignatura, los ejemplos y ejercicios están orientados a la reproducción de conocimientos y no a la búsqueda del conocimiento.

A pesar del sostenido trabajo que realizan los profesores y la atención esmerada que desde las enseñanzas precedentes, se brinda a este importante contenido; en la práctica escolar en general en el 10. grado cuando el estudiante se enfrenta al cálculo con radicales, dando cumplimiento a los dominios cognitivos a través del programa de la asignatura, se observan insuficiencias en:

Cálculo de raíces cuadradas con el uso de la tabla.

Bajos resultados en la pregunta de cálculo con radicales en exámenes ministeriales.

Pobre solidez en los conocimientos por lo que no logran su reproducción parcial o total.

El razonamiento lógico es insuficiente.

Algunos alumnos reproducen el algoritmo pero son limitadas sus posibilidades para aplicarlas.

Estas dificultades se han constatado durante las clases, evaluaciones sistemáticas, trabajos de controles, pruebas ministeriales y por las opiniones de los profesores con experiencias.

Por lo antes expuesto es limitada la búsqueda de procedimientos para aprender y planificar las acciones por parte de los estudiantes, no razonan sus respuestas y dependen mucho del profesor y de otros compañeros. Al conocer estas deficiencias se hace necesario iniciar justificados trabajos científicos que aporten nuevos accesos y permitan estructurar soluciones cuya aplicación resulte factible.

Todo lo antes expuesto sirve como base para plantear como **problema científico** de esta investigación:

¿Cómo contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en estudiantes que cursan el 10. grado de la Escuela Militar Camilo Cienfuegos (EMCC) de Sancti Spíritus?

Por lo que se ha definido como **objeto de investigación**: El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en 10. grado y como **campo de acción**: la habilidad calcular con radicales.

Para dar solución al problema anteriormente señalado se plantea el siguiente **objetivo**: Aplicar tareas docentes para contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en estudiantes de 10. grado de la EMCC de Sancti Spíritus.

El desarrollo del trabajo ha estado orientado por las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cuáles son los fundamentos teóricos- metodológicos que sustentan la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática?
2. ¿Cuál es el estado actual que presentan los estudiantes que ingresan al 10. grado de la EMCC de Sancti Spíritus en relación con la formación y desarrollo de habilidades de cálculo aritmético y algebraico?
3. ¿Qué debe caracterizar a un conjunto de tareas docentes para aplicar en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo con radicales en la formación y desarrollo de la habilidad correspondiente?
4. ¿Qué resultados se obtendrán con la aplicación de la tareas docentes para la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en los estudiantes de 10. grado de la EMCC de Sancti Spíritus?

Para dar solución a las preguntas científicas se conciben diferentes **Tareas de Investigación**:

1. Determinación de los fundamentos teóricos - metodológicos que sustentan la formación y desarrollo de la habilidad de calcular con radicales.
2. Diagnóstico de las condiciones iniciales que presentan los estudiantes de 10. grado de la EMCC de Sancti Spíritus en el desarrollo de habilidades de cálculo aritmético y algebraico?
3. Elaboración de tareas docentes para la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales.
4. Validación de la aplicación de las tareas docentes en los estudiantes de 10. grado de la EMCC de Sancti Spíritus.

La concepción de esta investigación es el resultado de un proceso de instrumentación del aparato teórico conceptual de la ética para su introducción práctica en el proceso pedagógico, donde se puso en práctica la utilización de los diferentes métodos de investigación, tanto del nivel teórico como del nivel empírico, así como los estadísticos

trabajando por Irma Nocedo y Gastón Pérez en su libro Metodología de la Investigación Pedagógica y Psicológica.

### **Métodos del nivel teórico:**

1. El Método de Análisis Histórico – Lógico, permitió estudiar los antecedentes del problema, o sea, se analizaron diferentes tendencias y posiciones sobre la formación y desarrollo de las habilidades Matemáticas.
2. Análisis–Síntesis, permitió estudiar la evolución del problema, los componentes del proceso de enseñanza de la Matemática, los de la habilidad calcular y las habilidades matemáticas básicas.
3. Método de Enfoque Sistémico, para fundamentar el enfoque del sistema de habilidades matemáticas y del conjunto de tareas.

### **Métodos del nivel empírico:**

1. La Observación Científica: Permite determinar el desempeño de los estudiantes seleccionados (Intencional) en relación con los procedimientos fundamentales que realizan para el cálculo aritmético y algebraico.
2. Análisis documental: Se analizó el libro de texto, los programas de estudio, indicaciones metodológicas, orientaciones emitidas por el MINED y MINFAR, Manual Especializado, todo con el propósito de analizar la metodología sugerida en el programa de estudio de la Matemática y las exigencias establecidas.
- 3- Experimento Pedagógico, en su modalidad pre-experimento para validar la efectividad de las tareas aplicadas para la formación y desarrollo de la habilidad cálculo con radicales.

### **Métodos Matemáticos y Estadísticos:**

El Análisis porcentual: Permite procesar la información recogida por la utilización de los métodos empíricos, tanto en la constatación del problema como en el diagnóstico final.

Decisión Muestral: Para la realización de este trabajo se seleccionó una población conformada por los estudiantes del décimo grado de la EMCC de S.S., que tiene una matrícula de 158 estudiantes distribuidos en seis pelotones. La muestra está integrada por un total de 28 estudiantes del pelotón 1, que representan un 17% de la población, seleccionada de forma intencional por la similitud en relación al comportamiento de la

independencia cognoscitiva. Tienen edades entre 14,15 y 16 años, período de la adolescencia, distribuidos teniendo en cuenta la composición étnica.

- **Variable independiente:** Tareas docentes.
- **Variable dependiente:** Nivel alcanzado en la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales.

### **Conceptualización de la variable.**

El desarrollo de la habilidad en el cálculo con radicales se considera cuando los alumnos sepan identificar el tipo de cálculo, así como los conceptos y procedimientos asociados a éste, seleccionar las reglas y realizar los cálculos necesarios, que puedan comprobar y hacer valoraciones de los resultados obtenidos.

### **Operacionalización de la variable dependiente:**

| Dimensiones                        | Indicadores  |
|------------------------------------|--|
| 1- Dominio de los conceptos.       | 1,1 Identificar el tipo de cálculo.<br>1.2 Identificar los conceptos y propiedades asociados al tipo de cálculo. |
| 2- Dominios de los procedimientos: | 2.1 Seleccionar las reglas de cálculo necesarias.<br>2.2 Realizar los cálculos indicados                         |
| 3- Autocontrol:                    | 3.1- Comprobar si el resultado es correcto.<br>3.2 Hacer valoraciones de los resultados obtenidos.               |

La **novedad científica** radica en la concepción de las tareas docentes que se caracterizan por una estructura que tiene en cuenta diferentes elementos para la gradual incorporación de los estudiantes en la búsqueda del nuevo conocimiento, la sistematización de otras habilidades de cálculo que deben poseer y que presentan analogías en las formas del pensamiento con las nuevas a formar y las orientaciones en forma de ayudas o impulsos heurísticos que ofrece el profesor.

El **aporte práctico** está dado en la aplicación y sistematización de tareas docentes con un procedimiento metodológico de orientación en el que se utilizan un modelo guía de actuación.

La tesis cuenta con una introducción, 2 capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexo.

El Capítulo 1 titulado **“El cálculo con radicales, formación y desarrollo de las habilidades correspondientes”**, ofrece un resumen que resulta del análisis crítico realizado de la bibliografía consultada y que sirve de fundamento a la concepción de la solución del problema de investigación. Se dedica al análisis de lo que significa las habilidades matemáticas la habilidad calcular con radicales y los procedimientos de solución en matemática.

El Capítulo 2 titulado **“Tareas docentes dirigidas a desarrollar la habilidad calcular con radicales”** muestra los resultados obtenidos en el diagnóstico inicial, las características de la tareas docentes concebidas y los ejemplos que tipifican la orientación de estas concebidas para el desarrollo de la habilidad calcular con radicales así como los resultados del experimento pedagógico.

En los anexos se encuentra la información sobre el procesamiento estadístico realizado a partir de los datos obtenidos utilizando tablas y gráficos, muestra los instrumentos aplicados y los resultados de estos utilizando cálculos aritméticos.

## **Capítulo I: El cálculo con radicales. Formación y desarrollo de las habilidades correspondientes.**

La educación general tiene entre sus objetivos permanentes el perfeccionamiento continuo de la educación y cada vez presta mayor atención a la formación de los escolares para la vida. En los documentos del XII Seminario Nacional a Dirigentes y Metodólogos, se plantea sobre la calidad de la educación:

"El resultado del aprendizaje no será efectivo si en el desarrollo de cada unidad del programa no concebimos un sistema de actividades, ejercicios y problemas que aseguren la asimilación de cada contenido esencial, su aplicación práctica y la necesaria integración de los conocimientos de la asignatura, lo que significa concebir la suficiente, variada y diferenciada actividad escolar en el proceso de aprendizaje".

Lo antes planteado nos hace pensar en la necesidad de variar la forma de obtención de los conocimientos de tal manera que la formación y desarrollo de cada contenido esencial cuente con un sistema de actividades en el cual se exija de los alumnos esfuerzos graduales en la solución de ejercicios y problemas de diferentes niveles de complejidad.

La dirección del aprendizaje en la escuela debe estar dirigida a desarrollar el pensamiento de los alumnos. Esto propicia que ellos vayan ampliando su capacidad para asimilar los conocimientos teóricos en la medida que cumplen su actividad escolar.

En investigaciones realizadas por la MsC Ela Orellana Pérez (2000) sobre procedimientos algorítmicos, puntualizó que;

"Los maestros y profesores pueden adoptar varias formas para dirigir el aprendizaje. Ello está en dependencia del contenido de la enseñanza, del grado o nivel de educación, del tipo de actividad, así como de los recursos de que dispongan. Cualquiera que sea la forma de dirigir el aprendizaje lo más importante es que el alumno esté bien orientado, que a la hora de trabajar sepa qué camino recorrer, por dónde va a empezar, qué debe buscar y cómo debe hacerlo. Todo esto obliga al profesor a realizar una planificación científica de su clase, lo que sería imposible si no estructura las mismas en un sistema coherente que le permita plantear los objetivos a alcanzar respectivamente, haciendo un análisis vertical y horizontal del material teórico".

Las sociedades modernas se caracterizan por el continuo cambio en todos sus ámbitos (Social, cultural, ideológico, político, económico, etc.) y precisan de instrumentos facilitadores del mismo. En este contexto, la educación está llamada a jugar un papel cada

vez más esencial, tanto como catalizadora del tránsito, como activadora de los resortes que ayudan a los sujetos a su adaptación a las nuevas exigencias.

La enseñanza ha de contribuir al pensamiento creativo y la fantasía cuando los alumnos participan activamente en la búsqueda de nuevos conocimientos y relaciones entre ellos, de ideas para la solución de ejercicios y problemas. Hay que dar la oportunidad a los alumnos de buscar, analizar y discutir diferentes modos de proceder, diferentes vías de solución, diversas posibilidades de introducir variables y modelar soluciones.

La Matemática siempre ha sido una asignatura útil, pero de interés solo para parte de la población escolar. Su utilidad no es discutida por nadie, de aquí su presencia en los programas de todo el mundo desde el inicio de la vida escolar. Todos la necesitan, porque provee de los recursos necesarios para enfrentar con éxito los distintos quehaceres de la vida cotidiana, permitiendo conocer la forma y tamaño de los objetos que rodean al hombre, ubica en tiempo y espacio, enseña a contar, comparar, medir y a realizar operaciones estrictamente necesarias para la convivencia social y además, lo que no es evidente para todos, nos enseña a pensar correctamente, con ella se puede encontrar el germen de la vida.

En el libro Metodología de la enseñanza de la Matemática, de autores cubanos, se plantea que para comprender el significado de la Matemática y su enseñanza hay que conocer su desarrollo histórico, el cual nos muestra los conocimientos matemáticos surgidos de las necesidades prácticas del hombre mediante un largo proceso de abstracción. Esta idea, que forma parte de los cimientos de la didáctica desarrolladora revela la comprensión del aprendizaje de las Matemáticas a partir de la concepción vigotskiana de la personalidad, en su unidad de lo histórico y lo social. Ballester, S (1992).

En el transcurso de la vida cada ser humano se enfrenta, desde las primeras edades, a una gran cantidad de problemas internos y externos cuya solución depende de la preparación que posee en cada etapa y, en mayor o menor medida, conducen al éxito en diferentes situaciones que se le presentan y en las tareas emprendidas.

La asignatura de Matemática forma parte del currículo de todos los niveles de la Enseñanza General Politécnica Laboral. En la misma se han realizado cambios curriculares significativos. Los cambios en el contenido y las formas de enseñar la Matemática en las últimas décadas, han sido consecuencia de diversos movimientos que han puesto énfasis en uno u otro aspecto que la han caracterizado.

Sin embargo algunos intentos de abordar con especificidad la enseñanza de la Matemática se vislumbraban ya en el texto: "Aritmética. Lecciones preparadas para que sirvan de guía a los maestros en los primeros grados de la enseñanza". Nuevas y enriquecedoras reflexiones en torno a la enseñanza de la Matemática fluyeron de las exhortaciones del destacado pedagogo A. Aguayo en su libro "Pedagogía" editado en 1924, y en el que se abogaba por el estudio correlacionado de la Aritmética y las nociones geométricas, el desarrollo gradual de una lógica geométrica, así como el aprendizaje de la Geometría en estrecha vinculación con las aplicaciones prácticas y las vivencias de los niños.

Un nuevo y especial impulso a favor de una perspectiva didáctica de la Matemática en Cuba se encuentran en los trabajos de la Doctora Dulce María Escalona y sus colaboradores, a través de la formación de Maestros Normalistas. (Hernández, Montes de Oca, 1998, Santana, 1998), citado por Torres (2000).

A partir de finales de los años cincuenta y comienzo de la década de los sesenta, se produjo un cambio importante conocido como la Nueva Matemática o Matemática Moderna.

En este período se resaltó la estructura y lenguaje formal de la Matemática y se puso en primer plano el estudio de la Teoría de Conjuntos y las estructuras abstractas, así como se enfatizó en el trabajo con las demostraciones.

Según la caracterización de Muñoz (1985), al triunfo de la Revolución en 1959, la política educacional para la enseñanza de la Matemática estaba completamente al margen del proceso de desarrollo de la ciencia Matemática y de la renovación de los planes de estudio que se había iniciado en casi todo el mundo. Los programas de Matemática vigentes en ese año no estaban actualizados pues durante varias décadas se venían aplicando y en muchos casos, eran el reflejo de programas practicistas que habían estado en boga en otros países (en especial los EE UU) durante épocas anteriores.

Las deficiencias existentes en estos programas hicieron necesario incorporar a Cuba al movimiento universal de reformas de los programas de Matemática. Esa necesidad se vio satisfecha cuando el perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática se puso en práctica desde posiciones socialistas y se integró al plan general de perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación.

La transformación realizada ha sido algo más que una simple modernización; se ha atendido al desarrollo de capacidades y habilidades en los estudiantes, y se han

seleccionado contenidos que ponen de relieve el carácter instrumental de la ciencia Matemática.

Los conceptos matemáticos se presentan con todo el rigor científico que permiten la edad y el desarrollo intelectual de los estudiantes, lo que posibilita que una vez presentado un concepto el trabajo posterior, a través de la ejercitación, sirva de sistematización, sin que sea necesario repetir lo estudiado antes. Además se incluyen introducciones al pensamiento algorítmico y a la Teoría de las Probabilidades contribuyendo con ello al desarrollo de las capacidades y habilidades de los estudiantes.

Torres(2000), apunta al respecto que la enseñanza de la Matemática no estuvo ajena a este vertiginoso proceso de transformaciones y coincidiendo con un importante movimiento mundial de cambios conocido como Matemática Moderna, aventajó en determinadas acciones el trabajo de las demás especialidades.

En 1975 se hicieron en Cuba, cambios curriculares y didácticos con la introducción de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, basada en experiencias de la antigua República Democrática Alemana, donde se establecieron las líneas directrices, que se definen "(...) como lineamientos que penetran durante todo el curso escolar a partir de la relación entre el objetivo a lograr, el contenido que es objeto de aprendizaje y los métodos a elegir". Rebollar (2000: 42).

Se reconocían en aquella época las siguientes líneas directrices: "Conjuntos, variables, ampliación de los dominios numéricos, ecuaciones e inecuaciones, correspondencia, transformaciones y funciones, definición, demostración, desarrollo de la expresión y terminología matemática, adquisición de técnicas de trabajo mental y educación socialista de los estudiantes". Jungk (1979: 46). Estas se fueron adecuando a las transformaciones posteriores.

Esta nueva concepción demostró que para la enseñanza de la Matemática, no eran las adecuadas al no estar en correspondencia con las condiciones histórico- culturales de Cuba e intereses económicos por no ajustarse a la realidad cubana y a concepciones educativas propias, lo que condujo a la poca solidez en el aprendizaje de los estudiantes.

Para lograr una solidez en los conocimientos es necesario fijarlos. "Los objetivos de la enseñanza de la Matemática (instructivos, educativos y del desarrollo del pensamiento) deben ser objeto de fijación. No basta propiciar la solidez de conocimientos como: conceptos, teoremas o procedimientos; es necesario fijar habilidades tales como: definir, construir, calcular, graficar y demostrar, entre otras; así como formas de trabajo y de

pensamiento propias de la Matemática, como la variación de condiciones (propiedades, relaciones, objetos matemáticos, situaciones), la búsqueda de relaciones, las consideraciones de analogía y, además, formas de conducta social y convicciones acordes con las mejores tradiciones nacionales”. Jungk (1979: 138).

La necesidad de ajustar el sistema educativo a las nuevas realidades resultantes del desarrollo de la ciencia y la técnica, las experiencias alcanzadas y las posibilidades del país, precisaron los cambios introducidos a partir del curso 1986-1987 que incluyeron desde el lugar de las asignaturas en el Plan de Estudio hasta la utilización de nuevos materiales docentes. Ello fue concebido como una lógica consecuencia de las transformaciones iniciadas basadas en la concepción del continuo perfeccionamiento como única forma de estar acorde con el contexto social.

A partir del curso 1989-1990 se realizaron transformaciones a los programas de Matemática del preuniversitario, y aparecen, por primera vez, las Orientaciones Metodológicas dirigidas a los profesores, incluyéndose además una unidad de sistematización de los conocimientos en el último grado de cada nivel de la enseñanza media.

Una de las cuestiones fundamentales relacionadas con el proceso de enseñanza de las matemáticas es el cálculo aritmético y la adquisición y aplicación de dicho contenido.

El desarrollo de las habilidades en el cálculo aritmético constituye un objetivo fundamental en la enseñanza de la matemática debido a la importancia del desarrollo de las habilidades en el mismo para el trabajo con ecuaciones e inecuaciones, funciones, el trabajo con variables, magnitudes y demostraciones.

Es conocido que existen dificultades por parte de los estudiantes en cuanto a la comprensión de los números, por falta de solidez, durabilidad y aplicabilidad de este contenido, además de no llevarse a cabo de forma correcta el algoritmo para el cálculo aritmético con números racionales y que dicho contenido no despierta el interés necesario en los estudiantes. Por ello tiene gran importancia para el maestro que los estudiantes se encuentren motivados, que en ellos exista una razón que mueva a su actuación y lograr inducirlos a la realización consciente y deseada de los ejercicios de cálculo aritmético.

El término poder de cálculo o cultura de cálculo se emplea en algunos países en el sentido de destacar importantes aspectos de la materia de la enseñanza de la matemática tales como:

- la realización de la comparación de números y las operaciones de cálculo de forma oral, escrita o con medios de cálculo,
- realización de la estimación y el redondeo,
- indicación de los resultados con una exactitud razonable,
- trabajo con magnitudes (longitud, área, volumen, tiempo, masa) y
- selección de una vía de solución efectiva y representación de la solución de forma exacta.

Calcular, es una forma existencial de un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual, mental, oral, escrita y mediante tablas o medios de cómputo.

Cálculo Aritmético: son los diversos procedimientos que en la práctica se emplean para calcular los números, es decir para combinarlos o compararlos entre sí, y cuyos resultados tienen la propiedad de expresar en un número nuevo el valor de la relación establecida. Aquino V (2009).

Las expresiones algebraicas son aquellas donde los números y las variables aparecen relacionadas por cualquiera de las operaciones de cálculo.

Es evidente que con una insuficiente comprensión de los números y una falta de solidez, durabilidad, y aplicabilidad en el poder de cálculo se hace casi imposible el avance de la enseñanza de la matemática, por ejemplo en el trabajo con ecuaciones, e inecuaciones, funciones, trabajo con variables, cálculo con radicales, etcétera.

Por otro lado la formación de un saber y poder sólidos de los alumnos en el cálculo numérico debe contribuir al desarrollo de su personalidad y a su preparación para enfrentar la vida y poder resolver numerosos problemas que le plantea la práctica.

La especificidad del desarrollo del pensamiento en el marco de la enseñanza del cálculo consiste en que a través de esta habilidad el alumno asimila y forma conocimientos generales, fija los procedimientos de trabajo que pasan a formar parte de su manera peculiar de actuar, relacionarse con el mundo circundante y consigo mismo y propicia el aseguramiento de cualidades estables de la personalidad.

Estos fundamentos teóricos se sustentan en aportes psicológicos, pedagógicos y metodológicos que postulan el desarrollo cognoscitivo y de los procesos psíquicos que se interrelacionan entre sí y que su forma superior y más acabada es el pensamiento lógico

que debe potenciarse en la práctica cotidiana de la enseñanza y el aprendizaje de los escolares.

## 1.1 El cálculo con radicales en el aprendizaje de la matemática

Acerca del concepto de radical se ha encontrado en la bibliografía consultada algunas cuestiones interesantes que a continuación se exponen.

¿Cómo surgió el signo de radical?

El símbolo radical que se emplea en la notación actual es varias veces centenario pero el concepto de radical es bastante más antiguo. Este símbolo aparece por primera vez en las obras de los hindúes. El símbolo radical  $\sqrt{\quad}$  fue introducido en 1525 por Christoff. Rudolff en su libro "Die Coss", libro que tuvo enorme influencia en Alemania en el siglo XVI y en 1552 se publicó por el matemático alemán Michael Stifel (1483-1567) una nueva edición mejorada de la obra de Rudolff. Se supone que adoptó el símbolo porque semeja una *r* minúscula, inicial de la palabra raíz. Campistrous y otros (1989, 84).

La notación de potencia sugiere el concepto de raíz, es decir el de una cantidad que multiplicada por si misma un cierto numero de veces produzca como resultado otra cantidad determinada. De esta forma, se debe entender la radicación como una operación inversa de la potenciación y el profesor no debe dejar de aprovechar la oportunidad para dejar claro que al igual que la sustracción es la operación inversa de la adición y la división es la operación inversa de la multiplicación también la potenciación tiene operación inversa, sin dejar de declarar que no es solo una y que en otros curso estudiarán otra operación inversa. Por tanto la nueva operación a estudiar permite que dada la potencia y el exponente se debe encontrar la base de la potencia. Ahora esos términos recibirán un nuevo nombre. La denominación de los términos de la radicación es de significativa importancia al igual que en las operaciones estudiadas anteriormente, ya que en lo adelante en los distintos procedimientos para el cálculo se mencionarán los nombres correspondientes (índice, radicando, raíz, radical).

El significado de la radicación como operación inversa de la potenciación queda expresado

en la definición:  $\sqrt[n]{a} = X \Rightarrow X^n = a$  lo que debe retomarse en todas las oportunidades posibles con los estudiantes.

La radicación puede entenderse como una potencia de exponente racional, introduciendo por definición la siguiente notación  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ , para  $n \geq 2$  y  $a \geq 0$ .

En la educación secundaria básica el alumno debe aprender a calcular la raíz cuadrada y cúbica de números positivos, por simple inspección o por tablas.

En décimo grado profundiza este estudio. Debido a que  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  para  $a > 0$ , los radicales cumplen propiedades que son consecuencia inmediata de las propiedades de las potencias de exponente racional.

Estas propiedades son de mucha aplicación en las operaciones con radicales, en la introducción de factores en el radical, en la racionalización de denominadores y en la simplificación de radicales.

En la práctica se hace necesario calcular con radicales que tienen índices diferentes y para hacerlo, en muchas ocasiones es necesario reducirlo a un índice común lo que a su vez permite compararlos.

De grados anteriores al 10<sup>o</sup> los alumnos conocen los términos semejantes. Cuando los términos con que se trabajan son radicales se tiene un caso especial de términos semejantes que se llaman radicales semejantes.

Para sumar y restar radicales semejantes se procede igual que cuando se reducen términos semejantes. A menudo es preciso simplificar previamente cada sumando, antes de reducir los radicales semejantes.

En la multiplicación y división de radicales se aplican las propiedades, por tanto es necesario que los radicales tengan el mismo índice.

Lo esencial que se debe lograr en este punto es que los alumnos desarrollen habilidades en el cálculo con radicales; en las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y en la racionalización de denominadores.

## **1.2 Los procedimientos de solución en matemática. Procedimientos algorítmicos.**

La enseñanza de la matemática debe preparar a los alumnos para trabajar de modo racional, planificado y orientado hacia el cumplimiento de objetivos específicos .Ballester (1992.p:32).

Un trabajo de este tipo tiene como componentes esenciales:

- El conocimiento seguro de conceptos, teoremas y procedimientos de trabajo matemáticos.
- El empleo razonable de medios auxiliares de cálculo.
- El dominio de los procedimientos de solución y formas de trabajo matemático, y el dominio de acciones para el control del proceso de solución.

En la enseñanza de la matemática son muy utilizados los procedimientos que tienen como base un algoritmo, en cálculos aritméticos y los procedimientos de carácter heurísticas en la solución de ejercicios de aplicación a la práctica y de demostración.

El conocimiento de los procedimientos de solución y las formas de trabajo de la matemática permite a los alumnos encontrar ideas de solución y resolver problemas con racionalidad.

De acuerdo con esto los procedimientos de solución en la enseñanza se pueden clasificar en dos grandes clases: los algorítmicos y los heurísticos.

Ambos tienen en común que se aplican en la solución de ejercicios y problemas de diversos tipos. Su diferencia esencial consiste en que si para una determinada clase de ejercicios se conoce un algoritmo de solución, entonces todo ejercicio de esta clase se puede resolver con seguridad, en la misma forma, mediante la aplicación de dicho algoritmo, en cambio, si para un ejercicio no se dispone de ningún algoritmo de solución porque no existe o no se conoce, entonces primero hay que determinar una vía de solución apropiada. Para ello puede ser útil tener en cuenta los procedimientos heurísticos que permiten realizar un trabajo sistemático orientado hacia este objetivo, pero sin que sea posible asegurar que de ese modo se encuentre una vía de solución.

En los programas de matemática para la Enseñanza General Politécnica y Laboral (EGPL) se establecen con precisión los procedimientos algorítmicos que los alumnos deben conocer y poder aplicar, sin embargo, no siempre ocurre así con los procedimientos heurístico, aunque esta forma parte de la materia de enseñanza y juegan un importante papel para encontrar ideas de solución o problemas particulares y también nuevos algoritmos de solución .Ballester (1992.p:224).

**Procedimientos heurísticos:** La heurística como disciplina científica es relativamente joven, y en épocas muy recientes es que aparecen sistematizados los procedimientos heurísticas en la literatura pedagógica.

El vocablo "heurística" o "eurística" proviene del griego y significa hallar, descubrir, inventar.

Aunque desde la época de los griegos los grandes maestros de matemática han abogado porque se utilicen los elementos heurísticos, en la enseñanza de esta ciencia aun no se ha logrado que todos los docentes los conozcan y los utilicen en sus clases o, lo que es más importante, que desarrollen una verdadera enseñanza heurística.

El objetivo fundamental de la heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos y a las invenciones, e incluye la elaboración de principios, reglas, estrategias y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución, la obtención de procedimientos de carácter algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico.

Algunos autores consultados clasifican los elementos heurísticos en dos categorías:

- Procedimientos heurísticos.
- Medios auxiliares heurísticos.

Los procedimientos heurísticos apoyan la realización conciente de actividades mentales complejas y exigentes. La introducción en las clases de Matemática y su posterior aplicación por parte de los alumnos, propician la asimilación de los conocimientos, la capacidad de resolver problemas para los que no conocen de procedimientos algorítmicos y sobre todo el desarrollo del pensamiento lógico. Una vez más se pone de manifiesto el protagonismo que propicia dicho procedimiento en la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes.

Estos pueden dividirse en principios, reglas y estrategias, las cuales pueden ser generales y especiales. Sin embargo los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar (directamente) la idea de solución principal de resolución, posibilita determinar por tanto a la vez los medios y las vías de solución Torres (P.:2000:75).

Dentro de los principios heurísticas generales se destacan el de analogía, el de reducción y el de inducción.

Además de estos principios generales, existen otros que sirven para la búsqueda de suposiciones y de ideas de demostración o de solución de problemas.

- Principios de generalización.
- Principio de movilidad.

- Principios de medir y probar.
- Principio de consideración de casos especiales y casos límite.

Las reglas heurísticas tienen el carácter de impulsos dentro del proceso de búsqueda de nuevos conocimientos y de la resolución de problemas, al respecto, estudios realizados por diferentes autores, determinaron que los impulsos contribuyen a conducir la conversación dentro de la clase. Almeida B (1995:3).

Se diferencian de los principios por el alcance de su aplicación, pues ellos no sugieren directamente la idea esencial para resolver un problema, pero aparecen recomendaciones de gran utilidad para llegar a encontrarlas, ya que expresan las acciones y operaciones a realizar en la búsqueda de los medios matemáticos y de las vías para resolver.

Las estrategias heurísticas constituyen los procedimientos principales para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema en sentido amplio y para buscar la idea fundamental de solución, por lo que se les llama estrategia de búsqueda.

Existen dos estrategias heurísticas:

- El trabajo hacia delante o método sintético.
- El trabajo hacia atrás o método analítico.

De interés especial resulta el conocido programa heurístico general el cual constituye para el profesor el instrumento universal de dirección, y para el alumno una base de orientación.

**Procedimientos algorítmicos:** El término algoritmo se emplea con frecuencia en matemática por estudiantes y profesores. Se define como: "... regla exacta sobre la ejecución de cierto sistema de operaciones, en un determinado orden, de modo que resuelvan todos los problemas de un tipo dado". Ballester (1992: 245).

Las operaciones que conforman el algoritmo tienen que ser elementales para el ejecutor. Una operación es elemental o simple cuando puede ser ejecutada sin necesidad de descomponerla en otras operaciones.

El algoritmo debe expresar el proceso en un número finito de operaciones que si se ejecutan correctamente a partir de ciertos datos iniciales permiten obtener siempre el resultado correcto.

La descomposición algorítmica para resolver un ejercicio no es generalmente única, pues la sucesión de pasos que la describen depende de las operaciones definidas hasta ese momento y el nivel de los alumnos, entre otros aspectos.

Un algoritmo es más potente en la medida que resuelve problemas más generales, no se elabora para resolver un problema particular, sino una clase de problemas del mismo tipo.

Félix Muñoz plantea un sistema de ejercicios para la asimilación de procedimientos, cuyas exigencias son:

- Organizar la asimilación de los procedimientos que formen parte de uno más complejo.
- Desarrollar habilidades en los alumnos para que puedan determinar si es posible o no la aplicación de un procedimiento en una situación determinada.
- Aumentar gradualmente las dificultades en la aplicación del procedimiento.
- Lograr que no se cree un estereotipo en relación con el procedimiento aprendido.
- Incluir ejercicios en que le de aplicación al procedimiento estudiado.

Pastor Torres en su tesis de grado científico tiene en cuenta los siguientes pasos para lograr la participación mental activa de los alumnos durante la búsqueda del algoritmo:

- Que se conozca con claridad el objetivo final que se desea alcanzar y la necesidad de realizar cada paso.
- Que el alumno sea consciente en cada momento de lo que nos proponemos alcanzar.
- Que domine los subalgoritmos necesarios para poder comprender el actual, así como los conceptos o teoremas relacionados con el algoritmo que se desea implantar.

Por último, para completar este marco teórico se presupone que el método de enseñanza debe ser activo, por lo tanto deben utilizarse los recursos de la heurística.

### **1.3 Estructuración metodológica de sistemas de clases donde intervienen procedimientos algorítmicos.**

A continuación se presentan las invariantes que se deben considerar para un sistema de clases donde se introducen y ejercitan procedimientos algorítmicos. Orellana (2000):

#### **1. Determinación del objetivo del nivel o grado o estándares del currículum:**

Se parte del hecho de que el objetivo determina el contenido, los métodos y los medios, por tanto en la organización de las clases tiene que ser lo primero.

## 2. Determinación de las habilidades matemáticas y sus acciones u operaciones.

Esto permite planificar cada paso sin que queden grietas en el camino de la formación de la habilidad. Las operaciones indican los pasos necesarios para que la habilidad sea vencida completamente, por tanto, es la guía tanto para la elaboración de las bases de orientación como para la elección de los ejercicios que permitan reafirmar cada uno de estos pasos.

## 3. Estructuración de bases de orientación que incluya él o los procedimientos algorítmicos que se quieren abordar.

La base de orientación debe ser, al final del proceso, una lista escrita de pasos que permita elaborarlo.

Se ha comprobado que el éxito del trabajo con algoritmos está en que sea elaborado por los alumnos a partir de materiales que puede crear el profesor o que estén probados con anterioridad; se ha evidenciado además, que cuando los estudiantes construyen el algoritmo este es mucho más efectivo y duradero en su mente, resulta más motivante y su aplicación posterior es más exitosa. Todo procedimiento algorítmico debe ser elaborado por esta vía, aunque según el nivel con el que se trabaje, se pudiera utilizar otra opción siempre que haya suficientes razones para hacerlo.

Obtener una base de orientación construida con o por los alumnos permite de manera más sencilla lograr que esta sea completa y generalizable. Esta base debe quedar clara, de manera que sirva de verdadero instrumento de trabajo para la formación de la habilidad.

## 4. Ejercitación.

### a. Ejercicios de reproducción.

Esta es la fase que algunos autores consideran de "ejercitación" pues es donde los estudiantes desarrollan un número determinado de actividades para adquirir la habilidad, para lograr este propósito se debe tener en consideración las siguientes recomendaciones:

- estructurar ejercicios para todas las acciones de la habilidad.
- construir o seleccionar ejercicios que incluyan de manera muy especial la identificación del procedimiento, lo que se puede lograr con órdenes dirigidas a este fin.
- presentar ejemplos en que no sea posible aplicar el algoritmo.
- planificar actividades que permitan automatizar acciones sin hacer estereotipos únicos, lo que se puede lograr variando las órdenes.

- utilizar elementos del más variado campo posible, por ejemplo si se trata de calcular con números fraccionarios utilizar diferentes notaciones, es decir, decimales, fracciones, mixtos y demás.

**b. Ejercicios de aplicación.**

Cuando fue construido el algoritmo pudo haberse partido de situaciones concretas de una aplicación, no obstante, no necesariamente esa aplicación pudiera ser la única, lo que obliga a determinar todas aquellas posibles y plantearlas en esta etapa, o incluso retomar aquella de la que se partió para plantear diferentes ejercicios.

Es aquí donde se puede considerar verdaderamente formada la habilidad, cuando el estudiante es capaz de aplicarla en toda la gama de variedades en que pudiera presentarse.

**c. Ejercicios que relacionan el algoritmo con otros contenidos.**

Son ejercicios que sistematizan, que relacionan diferentes elementos de la teoría y que permiten además desarrollar la creatividad, permiten también reconocer un procedimiento por muy enmascarado que esté, ayuda a modelar, habilidad de difícil adquisición por parte de los alumnos.

**d. Ejercicios para el control.**

Todo sistema debe tener un grupo de ejercicios que puedan servir tanto al estudiante para su autocontrol como al profesor para verificar el logro de una etapa determinada, por tanto deben ser cuidadosamente preparados de manera que puedan reflejar los diferentes estadios en que se encuentra cada alumno, servir de retroalimentación y cumplir todas las funciones de una evaluación.

## **1.4 Concepto de Habilidad.**

En los planes de estudio y en los programas de las asignaturas que lo integran se precisan los objetivos del sistema o del subsistema de educación, y el contenido que está conformado por los conocimientos y las habilidades.

Las características del desarrollo actual y la vertiginosa velocidad con que se amplía el contenido de la ciencia y la técnica, determinan la necesidad de una cuidadosa selección de los conocimientos esenciales de la ciencia, que deben adquirir todos los que transitan por las escuelas de educación general, durante los niveles que garantizan la formación básica, mínima obligatoria para los miembros de las nuevas generaciones.

Esta información esencial debe facilitar su incorporación, tanto a centros de estudio superiores como a la vida laboral. Pero este sistema de conocimiento esencial no es suficiente, ni se logra, si no está integrado al trabajo por un sistema de habilidades que garanticen la adquisición sólida, el uso y la aplicación consciente, reflexiva y creadora de esos conocimientos. Es esta integración responsable de su actualización, de su capacitación y, por tanto, debe estar en condiciones para cumplir exitosamente la función que le corresponde en la actividad en que se desenvuelve.

Las habilidades permiten al hombre, al igual que otras formas de asimilación de la actividad, poder realizar una determinada tarea. Así, en el transcurso de la actividad ya sea como resultado de una repetición o de un ejercicio de un proceso de enseñanza dirigido, el hombre no solo se apropia de un sistema de métodos y procedimientos que puede posteriormente utilizar en el marco de variadas tareas sino que también comienza a dominar paulatinamente acciones, aprende a realizarlas de forma cada vez mas perfecta y racional. Danilov y Skatkin (1980) definen las habilidades como el modo de actuar del individuo.

Según Talízina (1988), habilidad es el conocimiento en acción; la habilidad permite obtener conocimientos; a un tipo de conocimiento le corresponde un tipo de habilidad, el conocimiento se expresa a través de la habilidad.

La doctora Aleida Márquez (1990) plantea que podemos llamar habilidad a las formaciones psicológicas, mediante las cuales el sujeto manifiesta de forma concreta la dinámica de la actividad, con el objetivo de elaborar, transformar, crear objetos, resolver situaciones y problemas.

Carlos Manuel Álvarez de Sayas (1992), dice que habilidad no es más que elementos del contenido de la enseñanza que consiste en el sistema de acciones y operaciones que poseen un objetivo y que se expresan en un lenguaje didáctico, la actuación del profesional en su relación con el objeto de trabajo, para resolver los problemas consustanciales a dicho objetivo. Cuando hablamos de habilidades consideramos un complejo formado por conocimientos específicos, sistema de acciones y operaciones lógicas.

Algunos psicólogos como O. A. Abdulina; E. I. Brito, y otros, en sus estudios tratan el concepto de habilidad, expresando las dos tendencias en la evolución de este concepto: los que definen la habilidad como un hábito culminado y los que la definen como una acción creadora en constante perfeccionamiento; siendo la segunda tendencia la más

aplicada por su influencia que ejerce en el desarrollo progresivo y constante del aprendizaje en la sociedad.

Muchos autores asumen que la habilidad es resultado de la asimilación de conocimientos y hábitos por lo que prestan la mayor atención a su estructura funcional y se ocupan menos de cómo actúa el sujeto con esos conocimientos y hábitos en los diferentes niveles de sistematicidad del contenido. Especialmente importante es el hecho de que la actuación del sujeto se motiva por un fin conciente que consideramos ha de estar relacionado con el contexto que brinda el ejercicio que se propone resolver.

En sentido general, habilidad es un sistema de acciones lógicas y conocimientos, donde el alumno debe aprovechar al máximo los datos que le ofrecen, conocimientos o conceptos con los que tiene que operar, para que así puedan llegar a la resolución exitosa de determinadas tareas teórico-prácticas. Asumiendo de esta forma la definición de Talízina.

Toda habilidad presenta una estructura y para determinar la misma se tiene que tener en cuenta el punto de vista psicológico que se da de la actividad, teniendo como componente, las acciones mediante las cuales se realizan y son ejecutadas a través de operaciones.

Del análisis de la estructura surge la siguiente interrogante: ¿Cuál es el vínculo entre conocimiento y habilidad?

A esta interrogante se le da respuesta mediante el análisis de la definición de habilidad de Talízina, y debe su propia estructura que tiene en su base un determinado conocimiento, que permite el desarrollo de nuevas habilidades y con esto se asegura la adquisición de nuevos conocimientos, es decir, el conocimiento es la premisa necesaria para alcanzar una habilidad, el cual se expresa a través de las habilidades que el sujeto posea para encarar determinado problema. La adquisición de conocimiento conlleva necesariamente a un proceso de formación de habilidades.

La esencia de la categoría habilidad es la actividad, gracias a esta, es que los alumnos van poniéndose en contacto con el objeto de estudio, lo van asimilando.

Leontiev. (1982), en su concepción de la categoría actividad plantea que está constituida por un sistema de acciones, regida por los objetivos, y que a su vez están formadas por las operaciones vinculadas estas a las condiciones en que se realiza la actividad.

Las habilidades se forman en el mismo proceso de la actividad en la que el alumno hace suya la información y adquiere conocimientos. En estrecha relación con los hechos, conocimientos y experiencias, se debe garantizar que los alumnos asimilen las formas de

elaboración, los modelos de actuar, las formas de aprender, las formas de razonar; de modo que con el conocimiento se logre también la formación y el desarrollo de las habilidades, fundamentalmente las que determinan capacidades cognitivas.

Son importantes dos etapas en la adquisición de una habilidad: la etapa de la formación de la habilidad y la de su desarrollo. Se habla de formación de la habilidad a la etapa que comprende la adquisición consciente de los modos de actuar, cuando bajo la dirección del maestro o profesor el alumno recibe la orientación adecuada sobre la forma de proceder. Esta etapa es fundamental para garantizar la correcta formación de la habilidad.

En la práctica diaria suelen darse dos situaciones diferentes: una es que el alumno recibe una orientación adecuada en correspondencia con sus posibles niveles de dificultad gradada y teniendo en cuenta la lógica en la sucesión de las operaciones; la otra cuando el maestro o profesor actúa y espera que el alumno, teniendo en cuenta su proceder, haga suya más o menos espontáneamente sus formas de acción. Esta segunda situación descrita debe ser eliminada de la práctica pedagógica.

Se habla de desarrollo de la habilidad cuando una vez adquiridos los modos de acción, se inicia el proceso de ejercitación, es decir, de uso de la habilidad recién formada en la cantidad necesaria y con frecuencia adecuada, de modo que vaya haciéndose cada vez más fácil de reproducir o usar, y se eliminen los errores. Cuando se garantiza la suficiente ejercitación se dice que la habilidad se desarrolla; son indicadores de un buen desarrollo: la rapidez y corrección con que la acción se ejecute.

¿Por qué ocurre esto? Durante la formación de la habilidad, todo el sistema de operaciones que ella comprende es dirigido en forma consciente para garantizar la corrección en la ejecución, así como el orden adecuado de esas operaciones. Una vez iniciada la ejercitación, la repetición del sistema de operaciones va determinando la automatización de muchos de sus componentes, cada una de ellas se ejecuta con más seguridad, la dirección consciente es cada vez menor, desaparecen los movimientos innecesarios, se gana en precisión, en fin, se logra el desarrollo.

Con la finalidad de lograr metodológicamente un desarrollo exitoso de las habilidades es conveniente tener en cuenta los siguientes requisitos, según Rita Marina Álvarez de Sayas. (1996):

- Para pasar de una fase a otra en la metodología es fundamental que el alumno domine la fase anterior por lo cual es recomendable que este realice varios ejercicios del mismo tipo para que adquiera el algoritmo de trabajo.

- Las órdenes de los ejercicios deben garantizar que se ejecuten paso por paso, por separado y controlar su asimilación, luego podrán abarcar hasta llegar a darlos de una sola vez de manera integrada.
- Para que el alumno aumente el nivel en la reproducción y aplicación de la habilidad deben producirse los pasos junto al profesor, posteriormente ellos solos con una orientación del docente y por último con independencia sin ayuda, ni orientación.
- Otro elemento en la elevación del nivel de complejidad del conocimiento, es incluir, datos y aspectos poco a poco con mayor volumen de información.
- El nivel de asimilación debe ir desde el reproductivo, al aplicativo, y finalmente el creativo.
- Planificar el proceso de forma que ocurra una sistematización y la consecuente consolidación de los elementos deseados. (acciones)
- Garantizar el carácter plenamente activo del proceso de aprendizaje, la esencia de las habilidades está dado precisamente por el hecho de que el sujeto sea capaz de seleccionar de forma racional los conocimientos, métodos, procedimientos y de llevarlo a la práctica en correspondencia con los objetivos y condiciones de las tareas. La consecuente regularidad racional que se produce exige por lo tanto la clara comprensión de los fines perseguidos.
- El conjunto de exigencias no se limita al sistema de acciones invariantes, pues incluye los subsistemas de cada acción del modelo, acorde con determinadas condiciones y otros aspectos, como por ejemplo la disposición, motivación del escolar con respecto a la preparación de los modos de actuación y tener presente la unidad de lo cognitivo y lo afectivo en la manifestación y regulación de la actividad.

Ningún conocimiento puede ser realmente asimilado sin su inclusión en alguna actividad. Realmente el tener conocimiento es una premisa necesaria para siempre poder hacer algo, la seguridad y claridad de los conocimientos se precisa, por lo que puede hacer con ello el que aprende esto. Todo lo cual significa que no podemos ver aislado el “saber” del “saber hacer”, pues están estrechamente relacionados. Saber es siempre saber hacer algo y esto nos permite reafirmar, una vez más, que no puede haber conocimiento sin habilidad, primeramente hay que tener claro los tipos de habilidad, mediante los cuales se manifiesta el mismo.

En muchas ocasiones pensamos que se cumple el objetivo perseguido cuando los alumnos comprenden las explicaciones; por eso es necesario conocer que esto no significa asimilar: el proceso de asimilación de los conocimientos ocurre en su aplicación en forma de habilidades.

Dentro de la diversidad de criterios se encuentran, los que consideran que las habilidades se basan en conocimientos y hábitos ya formados, donde los hábitos son secundarios, los que consideran que las habilidades iniciales o primarias sirven como base para la formación de los hábitos y a su vez que las habilidades perfeccionadas se forman sobre la base de los hábitos y otros se representan las habilidades como capacidades para una determinada actividad.

A nuestro juicio, respecto a los criterios anteriores, no se debe ser tan categórico pues hay que tener en cuenta que cada uno de los elementos o categorías que conforman los criterios, tienen su especificidad y lugar, lo cual significa que no debemos identificar unos por otros, así como relegar a un segundo plano lo que en realidad se da en una estrecha relación y por último, no es posible identificar las habilidades con las capacidades, pues la habilidad es un componente de la actividad y en última instancia de las capacidades, no la capacidad misma.

La diversidad de los puntos de vista sobre la naturaleza de las habilidades está dada por la multiplicidad de acepciones de los términos habilidades, hábitos y capacidades y por la diversidad de los tipos de actividad.

El psicólogo Bruner reconoce el desarrollo y estructura de las habilidades como el desarrollo de estrategia para la utilización inteligente de la información, escogiendo entre modos alternativos de respuestas, aceptando la estrategia como patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la formación que sirve para lograr ciertos objetivos Bruner. (1989.:129).

En las concepciones didácticas actuales, el análisis sistemático del contenido de la enseñanza distingue entre sus componentes un sistema de conocimientos y un sistema de habilidades. El conocimiento refleja el objeto de la ciencia y su movimiento y las habilidades reflejan las relaciones del hombre con dicho objeto.

La habilidad, el modo de actuar, de relacionarse el estudiante con el objeto de estudio, esta condicionado por dicho objeto, por sus componentes, por sus estructuras, por las relaciones que están presentes en él mismo. El dominio de la habilidad presupone, a la vez, el dominio de las características del objeto de estudio C. Álvarez. (1999:46).

La formación y desarrollo de habilidades precisa que no puede verse aisladamente de la independencia cognoscitiva de la integración a los nuevos contenidos, al desarrollo operacional de analizar, sintetizar, comparar, clasificar, argumentar, entre otros, para que contribuya a la formación de capacidades mentales en los estudiantes, desarrollando el pensamiento lógico que se persigue en nuestras escuelas, sin ayuda o con poca ayuda del profesor, realizar los ejercicios y aplicar ese algoritmo. Por tanto al finalizar todo el proceso de elaboración, debe quedar escrita en láminas, pizarra, cuaderno u otro medio para dotar de un procedimiento general de trabajo.

Las habilidades se forman con la sistematización de las acciones subordinadas a un fin conciente y se desarrollan sobre la base de la experiencia del sujeto de sus conocimientos y de los hábitos que posee; pero los conocimientos se manifiestan o expresan concretamente en las habilidades, en la posibilidad de operar con ellos, de ahí que se les denomine como instrumentación conciente en la manifestación ejecutora de la actuación de la persona en un contexto dado.

En la actualidad constituye un propósito fundamental, la formación y desarrollo de habilidades y hábitos en los alumnos a través del proceso docente-educativo, pero es necesario tener en cuenta que existe una gran divergencia en los criterios de la naturaleza de estos fenómenos, del lugar que ocupa en la actividad, y por tanto, en relación con aquellas condiciones y requisitos fundamentales a tener en cuenta para su formación y desarrollo. Se coinciden con el psicólogo S.L. Rubinstein cuando sitúa a las habilidades en la llamada regulación ejecutora de la personalidad que tiene como resultado que la actividad se realice en correspondencia con las condiciones existentes y con los fines perseguidos por el sujeto.

Por tanto, desde el punto de vista psicológico las habilidades constituyen una formación psicológica de la personalidad del sujeto. Desde el punto pedagógico las habilidades constituyen parte del contenido de la educación como componente del proceso docente-educativo; he ahí el lugar de las habilidades.

En este sentido, la habilidad incluye tanto, elementos que le permitan al maestro orientarse en las condiciones en las que se realiza la actividad, en los objetivos y fines de la misma, como en los métodos a emplear como aspectos destinados a tener en práctica y a controlar su ejecución adecuadamente.

Para que se produzca con plena efectividad el proceso de formación de las habilidades la sistematización debe llevar implícita no solo una repetición de las acciones y su

reforzamiento, sino también, el perfeccionamiento de la misma. Solo teniendo en cuenta esta exigencia es que podemos garantizar el logro de aquel nivel de asimilación de la actividad que caracteriza en este caso, a las habilidades.

En sentido general consideramos que un alumno posee determinada habilidad cuando puede aprovechar los datos, conceptos que tiene y opera con ellos para la dilucidación de las propiedades consustanciales de las cosas y la resolución exitosa de determinadas tareas teóricas, prácticas, según plantea Petrovski. (1982).

#### **1.4.1 Habilidades matemáticas.**

El acelerado desarrollo científico técnico plantea al sistema educacional nuevas exigencias, esta es una de las causas que conllevan al perfeccionamiento continuo de los planes y programas de estudio para la enseñanza de las diferentes asignaturas. En matemática se han producido cambios en la estructura de algunos objetivos y en la selección de los contenidos que deben ser tratados.

El perfeccionamiento de la enseñanza de la matemática es una condición que induce a la necesidad de analizar su influencia en la conformación de los programas. Tómese en consideración que estos cambios se han producido en los parámetros esenciales que determinan el sistema de habilidades a trabajar.

En este sentido, es oportuno preguntarse, ¿Cómo influyen los cambios producidos en los programas al caracterizar las habilidades de la enseñanza de la matemática?

Con el triunfo revolucionario se comenzaron a realizar cambios en los programas de matemática, en los que se indica que se le dedique un mayor presupuesto de tiempo al trabajo con la habilidad calcular, luego a partir del curso 89 – 90 y hasta el 91 – 92 se producen los cambios en el preuniversitario, teniendo los programas a partir de ese momento un mayor presupuesto de tiempo que se puede dedicar a trabajar con esta y además quedan dentro de las mismas muy bien definido el sistema de habilidades a trabajar.

En el libro de metodología de la enseñanza de la matemática para la escuela primaria(1975), de autores alemanes (De la antigua RDA), se entiende por habilidades matemáticas los componentes automatizados que surgen durante la ejecución de acciones con un carácter preferentemente matemático y que posteriormente pueden ser empleados en acciones análogas .Geissler( 1975. p. 41) .Evidentemente queda limitada la habilidad matemática a la repetición de la misma forma de acción, que con la automatización puede ser incorporada a formas más complejas como acciones parciales. Esto ha conducido a la

idea de que la formación y desarrollo de una habilidad matemática se alcanza con la formación de determinados patrones cuando se proponen la ejercitación con grupos de ejercicios similares sin que necesariamente se reflexionen sobre las posibilidades de utilización en situaciones diferentes, en una diversidad de contextos, este concepto limita su aplicación a actividades con el cálculo con radicales, en el sentido ya explicado, si se tiene en cuenta que no se trata de ejercicios análogos ni se trata de automatizar acciones a partir de la repetición de una misma forma de acción por lo que es conveniente hacer precisiones sobre el concepto que comprenda el sentido de la habilidad matemática en toda su complejidad y niveles de sistematicidad de la actividad matemática.

Se asume la habilidad como las acciones que el sujeto debe asimilar, dominar en mayor o menor grado y que, en esta medida, le permiten desenvolverse adecuadamente en la realización de determinadas tareas. Las habilidades como modos de actuación se forman y se desarrollan en la actividad a través de los siguientes momentos:

- Comprensión del modo de actuar y del orden en que se deben realizar las acciones.
- Asimilación de forma consciente del modo de actuación.
- Fijación del modo de acción asimilado, a través de la repetición.
- Aplicación de las habilidades adquiridas a otras situaciones más complejas desde el punto de vista del contenido y en la adquisición de nuevos conocimientos.

Estos momentos expresan un proceso en el que el alumno llega a apropiarse de un modo de actuación, a la formación de un hábito, cuando se señala como esencial la repetición de la acción con la misma dificultad hasta lograr su automatización, aunque queda positivamente planteada la idea de que deben variarse las condiciones del ejercicio y aumentar las dificultades, destacando también el papel importante del lenguaje matemático, no solo como medio de comunicación sino como una forma de pensamiento.

Sin embargo ha habido en los últimos años una tendencia que identifica la habilidad como proceso y resultado de perfeccionamiento de los modos de actuación correspondiente o una actividad determinada, lo que sin dudas acerca esta categoría a la capacidad de conseguir un ajuste óptimo de la intervención pedagógica Coll C ( 1986. 19).

Las habilidades se forman con la sistematización de las acciones subordinadas a un fin conciente y se desarrollan sobre la base de la experiencia del sujeto, de sus conocimientos y de los hábitos que poseen; pero los conocimientos se manifiestan o expresan concretamente en estas, en la posibilidad de operar con ellas, de ahí que se les denomine

como instrumentación consciente en la manifestación ejecutora de la actuación de la persona en un contenido dado. Especialmente importante es el hecho de que la actuación del sujeto se emotiva por un fin consciente que consideramos ha de estar relacionado con el contexto que brinda el problema que se propone resolver.

Al hablar de la Matemática de la enseñanza y la metodología del aprendizaje se debate la idea de que no basta con transmitir o apropiarse de los conocimientos, sino que a la persona que aprende hay que moderarle las condiciones necesarias para que aprenda a aprender, o sea, desarrollar las potencialidades meta cognitivas. Bermúdez (1996: 44).

Es evidente que la metodología de la enseñanza ha de estar dirigida a lograr que el estudiante construya sus propios mecanismos, métodos, técnicas, procedimientos de aprendizaje; por lo que en la teoría fundamental en la dirección del proceso de construcción de conocimientos y los métodos a emplear, ha de estar la construcción de los modos de actuación, que propician el desarrollo de las habilidades necesarias para llevar a cabo la efectividad de la actividad en función del conocimiento. Bermúdez (1996, p.44).

El poder matemático está formado por los hábitos, habilidades y capacidades específicas de la asignatura, desarrolladas por los alumnos para operar con los conocimientos adquiridos y darles aplicación, así como las normas de conducta y cualidades de la personalidad. Ballester (1992.:88).

Cuando decimos que un alumno posee determinadas habilidades matemáticas, se entiende que él puede, ante todo, establecer el tipo de problema que debe resolver, determinar las acciones implicadas, las condiciones de esta, los datos que se ofrecen, las posibles vías de solución, lo que es necesario hallar y cómo proceder; estas observaciones son de gran importancia, ya que por ejemplo enseñamos a un estudiante a resolver cualquier ejercicio; pero no es extraño que unos meses más tarde tenga que enfrentarse a una situación como esa y no recuerden cómo proceder. En estos casos el problema consiste en que el alumno nunca ha diferenciado este tipo de ejercicios de los demás, pues todos los que le han puesto, para él son iguales. Resumiendo podemos decir que en las habilidades consideramos tres componentes fundamentales: conocimientos matemáticos, sistema de operaciones de carácter matemático y conocimiento y operaciones lógicas.

La adquisición de habilidades matemáticas significa el dominio por los alumnos del sistema de acciones que le permitan la flexibilidad, plasticidad y el dinamismo para que en un momento dado y en condiciones nuevas, puedan realizar la actividad correspondiente.

El objetivo final de la actividad docente del profesor es lograr que los alumnos aprendan, es decir, que al final los alumnos deben saber o conocer el contenido del curso. Para decir qué es saber un concepto, hay que precisar cuales son las habilidades en las que debe funcionar ese concepto. A veces esa acción es la reproducción de la definición, esto ocurre cuando se plantea como objetivo familiarizar al alumno con el concepto, no utilizarlo, lo cual sucede muy pocas veces. Como antes se ha dicho en general los conceptos no se enseñan para que el alumno lo reproduzca sino para que pueda trabajar con ellos. Talizina, Nina. (1985).

Si se trata de incluir en la enseñanza procedimientos específicos que corresponden a todos los tipos específicos de conocimientos necesarios, se obtienen un número elevado de habilidades que los alumnos no pueden asimilar. La sustitución de procedimientos específicos por generalizadores eleva sustancialmente el efecto de desarrollo de la enseñanza, coadyuva a la formación del pensamiento teórico. Teniendo en cuenta la importancia de trabajar con procedimientos generalizados haremos referencia a ciertas habilidades generalizadas que dominan el curso de Matemática en el décimo grado. Campistrous, L (1989). Estas habilidades son:

- Calcular.
- Evaluar.
- Simplificar.
- Resolver ecuaciones.
- Descomponer en factores.
- Relacionar gráficos y propiedades de funciones.

Los procedimientos que incluyen son:

- Calcular:
  - Identificar el tipo de cálculo a realizar.
  - Seleccionar las reglas de cálculo necesarias.
  - Efectuar los cálculos.
- Evaluar:

- identificar el tipo de expresión.
- seleccionar y utilizar los medios necesarios (tablas, algoritmos, etc.).
- calcular.

-Simplificar:

- identificar el significado concreto de la simplificación en la expresión dada.
- reconocer las reglas a utilizar.
- calcular.
- comprobar que la expresión no admite otra simplificación.

-Resolver ecuaciones:

- simplificar si es necesario.
- reconocer el tipo de ecuaciones.
- seleccionar el procedimiento de resolución.
- calcular.
- comprobar las soluciones.

-Descomponer en factores:

- identificar si es posible proceder directamente o no.
- identificar el tipo de descomposición.
- utilizar las reglas.
- calcular.
- comprobar si está factorada completamente.

-Relacionar gráficos y propiedades:

- identificar la relación entre el gráfico y la propiedad.
- reconocer el comportamiento en el gráfico.
- concluir sobre las propiedades.

Cada habilidad es realmente una habilidad generalizada que incluye varios procedimientos específicos:

- La habilidad de calcular incluye cálculo con números, con variables, con radicales, con razones trigonométricas.
- La habilidad de evaluar se pone de manifiesto cuando se determina el valor numérico de una expresión algebraica, cuando se comprueba una ecuación, cuando se determina la imagen de un número por una función, etcétera.
- La de simplificar incluye reducir términos semejantes simplificar fracciones, quitar signos de agrupación, simplificar radicales, simplificar expresiones trigonométricas.

### **1.4.2 Habilidades de cálculo**

Los conocimientos asimilados profunda y conscientemente a través de la instrucción y la enseñanza conforman parte orgánica de los conocimientos teóricos y del pensamiento lógico, constituyendo además, la base de la formación de las habilidades y hábitos matemáticos para el cálculo.

El desarrollo de habilidades de cálculo con números es una preocupación de muchos especialistas en Cuba.

La doctora Gloria Ruiz Ugarrío de Medina (1965) considera que para la enseñanza de la aritmética se distinguen dos objetivos esenciales .Bernabeu, P. (1996):

- 1-Adquirir un instrumento de participación social.
- 2-Desarrollar la actitud para pensar reflexivamente.

El tratamiento del cálculo aritmético cuenta de las fases siguientes:

- 1-Actividades preparatorias para el cálculo.
- 2-Trabajo intuitivo para el cálculo.
- 3-Formación de las estrategias de cálculo.

La primera fase se inicia antes de la introducción de los procedimientos de cálculo, la fijación de los significados prácticos de las operaciones conceptos o procedimientos que le permitan a los estudiantes tener conciencia de lo que va a realizar cuando se le presente un ejercicio de cálculo.

La segunda fase se caracteriza por realizar cálculos sin haber estudiado o formalizado un procedimiento para ello, es la realización de actividades, ejercicios, resolución de problemas que conduzcan a un cálculo aritmético, obteniendo los resultados correctos a

partir un razonamiento que puede ser intuitivo y práctico o mediante la aplicación de un concepto matemático que conozca.

La tercera fase transcurre durante la etapa de obtención de procedimientos para calcular y su fijación, a diferencia de las anteriores que transcurren antes del proceso de obtención y fijación de los procedimientos de cálculo. Se caracteriza porque el estudiante adquiere su estrategia de cálculo a partir de un entrenamiento que el docente debe realizar, aunque son procedimientos algorítmicos, requieren de una enseñanza heurística, es necesario que el estudiante aprenda a reducir y establecer analogías.

### **1.4.3 Habilidades de calcular con radicales.**

En la unidad temática Radicales. Operaciones con radicales se distinguen dos puntos esenciales. Campistrous Pérez, (1990).

- Simplificación de radicales.
- Cálculo con radicales.

En lo mismo se hace un estudio más profundo de los radicales del que se ha hecho hasta el momento.

En el trabajo con los radicales es conveniente trabajar con ellos simplificados; por lo que los alumnos deben ser capaces de reconocer si un radical está o no simplificado, y en este último caso simplificarlo, así como que puedan introducir factores en un radical y reducir radicales a un índice común.

Para poder simplificarlos deben conocer previamente las propiedades, la extracción de factores del radical. Como un procedimiento inverso de la extracción de factores del radical puede explicar la introducción de factores en el radical.

Otro de los procedimientos para el trabajo con radicales es reducción de radicales a un índice común y la comparación de radicales.

Lo esencial que se debe lograr en el segundo punto es que los alumnos desarrollen habilidades en el cálculo con radicales; en las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y la racionalización de denominadores.

Una condición previa importante, para el tratamiento de la adición y sustracción de radicales a la definición de radicales semejantes.

## **Capítulo 2: Tareas docentes dirigidas a desarrollar la habilidad calcular con radicales.**

### **2.1 Constatación inicial:**

En la investigación realizada en la EMCC de Sancti Spíritus, se seleccionó intencionalmente el pelotón 1 de décimo grado, integrado por 28 camilitos. Se manifiestan en ellos características propias de esta etapa como son: estirón de sus extremidades, hipersensibilidad, fuertes vivencias emocionales, aumento del volumen de sus músculos, intensificación de la actividad de la hipófisis y otras glándulas. Desde el punto de vista psicológico se caracterizan por la necesidad de independencia y autoafirmación, se incrementa la necesidad de ocupar un lugar en el grupo, que se reconozca y ser aceptado por sus compañeros.

En la etapa juvenil, se alcanza una mayor estabilidad de los motivos, intereses, puntos de vista, de manera tal que los alumnos se van haciendo más concientes de sus propias experiencias y de quienes lo rodean, tienen lugar así la formación de convicciones morales que el joven experimenta como algo personal, que entran a formar parte de su concepción moral del mundo.

La muestra está formada por 7 hembras y 21 varones, en su mayoría hijos de obreros.

Con relación a sus capacidades académicas se puede plantear que es un grupo con 19 alumnos de bajo rendimiento, 6 medio y 3 con altos resultados docentes, esto trae consigo una cuidadosa diferenciación por parte del profesor cuando la tarea a realizar requiera una alta dosis de trabajo mental, de razonamiento, independencia y creatividad.

El análisis de la situación de la enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática en el grado fue realizado a partir de la aplicación de varios instrumentos que abarcan la revisión de programas, libros de texto, orientaciones metodológicas, observación al desempeño de los alumnos, revisión de la prueba de ingreso a los camilitos, análisis del primer trabajo de control y de la prueba ministerial, estos hicieron posible determinar las dificultades reales existentes en los estudiantes al iniciar el 10. grado y el comportamiento después de aplicadas las tareas que se proponen en este trabajo de la EMCC de Sancti Spíritus.

Se realiza la aplicación de la guía de observación al desempeño de los alumnos durante una clase de cálculo (anexo 2), la que permitió constatar el estado inicial de la problemática.

De una muestra de 28 estudiantes, al comprobar la dimensión dominio de los conceptos, 14 identifican el tipo de cálculo a realizar para un 50%, 10 identifican los conceptos y propiedades para un 36%, y en la dimensión dominio de los procedimientos y solo 9 saben seleccionar las reglas necesarias, así como los cálculos indicados para un 32% ,9lo realizan correctamente para un 32%, 8 lo realizan seguro para un 29% y 6 con rapidez para un 21%(anexo 3).

Al comprobar la dimensión de autocontrol se concluye que solo 3 estudiantes saben hacer valoraciones de los resultados obtenidos e igual número de alumnos saben comprobar si el resultado es correcto para un 11%.

Al realizar un análisis de los resultados de la prueba de ingreso a las EMCC (curso 2003-2004), del grupo que conforma la muestra, (anexo 4) se procesa solamente la pregunta de cálculo.

De esta se tiene como resultado que para la dimensión, dominio de los conceptos, 16 alumnos identifican el tipo de cálculo (aritmético) para un 57% y 10 identifican los conceptos asociados al tipo de cálculo para un 36%, o sea, 9 identifican la raíz cúbica, 8 la división de números fraccionarios,6 la sustracción de expresiones decimales.

Al referirnos a la dimensión dominio de los procedimientos, 9 alumnos seleccionan correctamente las reglas necesarias y realizan los cálculos indicados para un 32%, 9 saben dividir, 6 calcular raíz cúbica para un 21%.

Cuando se integran estos resultados con lo anteriormente analizados en la observación al desempeño permiten establecer los resultados del diagnóstico inicial (anexo 5).

- para la dimensión, dominio de los conceptos, 15 alumnos identifican el cálculo para un 54%, 10 identifican los conceptos asociados al tipo de cálculo para un 36%.
- para la dimensión, dominio de los procedimientos, de 9 alumnos saben seleccionar las reglas de cálculo para un 32% y para el indicador realizar los cálculos indicados,8 lo realizan para un 29%.
- para la tercera dimensión, autocontrol, se obtiene como resultado que 3 alumnos saben hacer valoraciones de los resultados obtenidos y 3 que saben comprobar si el resultado es correcto para un 11%.

El cumplimiento de los indicadores en la constatación inicial se mide como B (bajo), M (medio) y A (alto), (anexo 6). De aquí se infiere que 19 alumnos se encuentran en nivel bajo para un 68%, 6 en medio para un 21% y 3 en nivel alto para un 11%, no son capaces

de detectar el error o deficiencia cometida al realizar el ejercicio, no hacen valoraciones sobre lo logrado, lo que trae como consecuencia que tengan dificultades en el cálculo (anexo 7).

## **Resultados del análisis de los documentos normativos**

Se realiza el análisis de los documentos normativos: programa rector para la dirección del proceso docente educativo de la EMCC, programa de matemática y libro de texto.

### **Análisis del programa rector para la dirección del proceso docente educativo (PDE) de la EMCC.**

El proceso docente educativo es el eje principal de la institución con las siguientes exigencias:

- Formar en los estudiantes una sólida preparación media general.
- Formar a los alumnos bajo el principio del estudio –trabajo-defensa.
- Educar a los alumnos en el amor a la profesión militar y a lo que está representado por la defensa de la Patria Socialista.
- Desarrollar en los alumnos elevadas cualidades políticas, morales y físicas.

Los factores que intervienen en el PDE son el trabajo docente, docente investigativo, el control de la asimilación de los alumnos, el trabajo político ideológico, el trabajo metodológico, el trabajo de ciencia e innovación tecnológica, la superación de la calificación y el aseguramiento multilateral al proceso docente educativo.

El proceso docente educativo es la principal actividad en las EMCC, sus principales componentes son: los objetivos, el contenido, las formas, los métodos, la evaluación, el clima y la base material de estudio.

El proceso de enseñanza –aprendizaje de Matemática en el preuniversitario cubano está concebido a partir de la política educacional del Estado, es por ello que refleja el profundo humanismo de la concepción marxista-leninista de la Revolución Cubana, teniendo en cuenta, además, las condiciones histórico-culturales de su desarrollo.

El Programa Director de la Matemática reconoce la necesidad de elevar el grado de motivación para el aprendizaje al declarar que es fundamental que se cree un clima favorable alrededor del estudio de la Matemática con la utilización de recursos disponibles, organizando concursos y otras actividades extradocentes de apoyo a la labor que se realiza en las aulas, y estimular a los estudiantes a que participen en estas.

El programa de Matemática del décimo grado está dividido en las siguientes unidades de estudio: Aritmética y Trabajo con Variables, Funciones Lineales y Cuadráticas, Estadística Descriptiva y Semejanza de Figuras Geométricas.

La Unidad # 1 “Aritmética y Trabajo con Variables” se concibe con el objetivo de formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científico-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.

Salida de los lineamientos de la asignatura:

- Contribuir a la educación (ideo-política, jurídica, laboral y económica, para la salud, estética y ambiental) de los estudiantes.
- Favorecer la comprensión conceptual y la comunicación.
- Potenciar el desempeño de los estudiantes hacia niveles superiores.
- Hacer que los estudiantes aprendan a identificar, formular y resolver problemas dados en contextos diferentes.
- Sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental.
- Propiciar la integración de las diferentes áreas matemáticas.
- Enfatizar en el análisis de las causas de los errores.
- Utilizar las tecnologías de la informática y la comunicación.

Las transformaciones actuales están dirigidas a elevar la calidad del proceso de enseñanza –aprendizaje con la concepción de una enseñanza desarrolladora.

Según estudios realizados por investigadores cubanos esta didáctica desarrolladora es “la vía mediatizadora esencial para la apropiación de conocimientos, habilidades, normas de relación emocional, de comportamiento y valores, legados por la humanidad, que se expresan en el contenido de enseñanza, en estrecho vínculo con el resto de las actividades docentes y extradocentes que realizan los estudiantes”. Silvestre y Zilberstein (2002: 16).

Con las nuevas transformaciones de la secundaria básica, a partir de las modificaciones, se ha seguido realizando el perfeccionamiento de los programas de estudio, específicamente en la asignatura de Matemática.

Los cambios en el programa de Matemática del preuniversitario están dirigidos a ello, lo que se concreta en las siguientes indicaciones metodológicas generales de la asignatura: MINED (2004: 4):

1. Potenciar el desarrollo de los estudiantes hacia niveles superiores de desempeño, a través de la realización de tareas cada vez más complejas y el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y la creatividad.
2. Plantear el estudio de los nuevos contenidos matemáticos en función de resolver nuevas clases de problemas de modo que la resolución de problemas no sea sólo un medio para fijar, sino también para adquirir nuevos conocimientos, sobre la base de un concepto amplio de problema.
3. Propiciar la reflexión, la comprensión conceptual junto con la búsqueda de significados, el análisis de qué métodos son adecuados y la búsqueda de los mejores, dando posibilidades para que los estudiantes elaboren y expliquen sus propios procedimientos, de modo de alejar todo formalismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
4. Sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, tratando además que se integre el saber de los estudiantes procedente de distintas áreas de la Matemática e incluso otras asignaturas.
5. Realizar el diagnóstico sistemático de los conocimientos, habilidades, modos de de la actividad mental, y de las formas de sentir y actuar de los estudiantes, valorando en cada caso cuáles son las potencialidades y las causas de las dificultades de los estudiantes.
6. Planificar, orientar y controlar el trabajo independiente de forma sistémica, variada y diferenciada, que les permita desarrollar habilidades para la lectura, la búsqueda de información, la interpretación de diversas fuentes, el trabajo cooperado y la argumentación y comunicación de sus ideas en un adecuado clima afectivo donde haya margen para el error.
7. Proyectar la evaluación en correspondencia con los objetivos del nivel, el grado y las unidades y como proceso continuo que promueva la discusión de alternativas y

procedimientos para la solución de tareas docentes, con el empleo de la crítica y la autocrítica como método habitual para la evaluación de los compañeros y la propia auto evaluación.

8. Utilizar las tecnologías de la informática y la comunicación con el objetivo de adquirir información y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos.

El programa de estudio de las ESCUELA MILITAR CAMILO CIENFUEGOS no ha estado exento de las transformaciones que se han realizado a la enseñanza media superior, lo que repercute en la asignatura de Matemática.

El proceso docente en estas escuelas se materializa en el cumplimiento de los planes y programas de estudio de las diferentes asignaturas, de las actividades extra-docentes que se planifican con el objetivo de desarrollar en los estudiantes, los conocimientos, habilidades, normas de conducta, valores, ética y cualidades que les permitan comportarse en plena correspondencia con el avance de la sociedad.

Por lo que el aprendizaje de la Matemática ha dejado de ser una acumulación de conceptos, teoremas, procedimientos con una determinada relación y orden lógico. De lo que se requiere hoy es de cómo debe ser aprendida, qué necesitan los hombres de estos tiempos “para enfrentar la amplia diversidad de problemas que precisan de los métodos matemáticos para su solución...”. Rebollar (2000: 12).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia “(...) no se restringe a la interacción estudiante-profesor durante la clase, sino que va más allá a otros factores que intervienen” como: “el diseño y desarrollo de los planes y programas de estudio, los libros de textos, las metodologías de la enseñanza, las teorías de aprendizaje y la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa, que se ponen en práctica a partir de las concepciones filosóficas y epistemológicas que tienen el profesor y los estudiantes acerca de las Matemáticas” Rebollar(2000: 12).

Por otra parte en el libro de texto de Matemática se evidencia que en todos los procedimientos se ejemplifica cada caso pero no se fundamenta a partir de conceptos y propiedades los pasos que requiere.

Las orientaciones metodológicas del año 1989 ofrecen recursos al profesor para desarrollar sus clases de manera que pueda lograr una activación del aprendizaje por parte del alumno y resolver las deficiencias del libro de texto, pero esos textos no se han

vuelto a editar y ya no se encuentran en las escuelas ni en las bibliotecas por lo que constituyen ejemplares raros.

## **2.2 Características de la orientación de las tareas docentes.**

En el Programa del Partido Comunista de Cuba cuando se determina el fin de la educación se destaca la necesidad de la formación de la concepción científica del mundo y para que este objetivo o fin general pueda ser concretado en la práctica, es imprescindible la determinación y formulación adecuada de objetivos y tareas pedagógicas que permitan encauzar el proceso de la educación a la formación de hombres que participen activa y conscientemente en la construcción de la sociedad y que alcancen el pleno desarrollo multilateral de su personalidad.

La formación de la concepción científica del mundo se logra en cada asignatura a partir de la asimilación consciente del sistema de conocimientos científicos que esta proporciona. Cada disciplina docente, al mostrar la acción de las leyes que rigen el desarrollo de la naturaleza en la sociedad y en el pensamiento, proporciona, sobre la base de los conocimientos, la posibilidad de llegar a las generalizaciones científico-filosóficas.

La propuesta de tareas docentes se sustenta básicamente en el enfoque socio -histórico-cultural de Vigotski, a partir de considerar al alumno como sujeto activo y consciente de su actividad de aprendizaje, y de tener en cuenta sus necesidades, potencialidades y el trabajo socializado al resolver las tareas que se orientan.

Vigotski considera dos niveles evolutivos:

- El de las capacidades reales que posee un individuo.
- El de las posibilidades de aprender con ayuda de los demás.

La diferencia entre estos dos niveles es a lo que llama zona de desarrollo próximo. La distancia entre el nivel real del desarrollo determinado por la capacidad de resolver un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o la de un compañero.

Estos fundamentos de carácter sociológico están claramente demostrados por diferentes pedagogos cuando entre los aspectos que distinguen el aprendizaje, sitúan al carácter mediado y cooperativo del mismo.

### **2.2.1 Tareas docentes. Características y concepciones dominantes.**

Las exigencias históricas – sociales de los nuevos tiempos colocan al maestro ante un proceso de reconceptualización de su práctica formativa.

Tal reconceptualización enfrenta al maestro ante el desafío del proceso de elaboración de la tarea docente de la clase como célula básica del aprendizaje de los alumnos, de manera que esta le permita lograr la formación humanista del hombre en un proceso de relación y generalización que los ponga en condiciones, no solo de aplicar, sino de transferir para transformarse a sí y al mundo que lo rodea.

De acuerdo con los autores consultados Davídov, V. (1987), Álvarez de Sayas, C. M., (1996), (1999); Garcés, W., (2000); Silvestre, M., (1999); Fuentes González, H. C., (2000); Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2000), Zilberstein, J. y Pórtela, R., (2002), las principales tendencias detectadas en el trabajo con la tarea docente son:

- Inadecuada o incompleta comprensión de su concepción esencial.
- Aparece mal estructurada afectando la lógica de la dirección del aprendizaje en la clase.
- No se corresponde con el objetivo de la clase y/o con los demás componentes del proceso pedagógico.
- No se orienta adecuada y oportunamente para que se logre su comprensión y el curso de un aprendizaje consciente a través de ella.
- No se controla el proceso de su ejecución lo que afecta su evaluación y auto evaluación.
- No responde a las exigencias que se le plantea a la calidad de la clase.

#### **Rasgos que tipifican la tarea docente:**

- Célula básica del aprendizaje.
- Componente esencial de la actividad cognoscitiva.
- Portadora de las acciones y operaciones que propician la instrumentación del método y el uso de los medios para provocar el movimiento del contenido y alcanzar el objetivo en un tiempo previsto.

Es en la tarea docente como célula básica del aprendizaje, y la menor unidad del proceso docente educativo, donde se concreta la interrelación dinámica entre los componentes personales y no personales.

## **Estructura de la tarea docente. Portela, R (2002).**

**El objetivo:** Es el propósito o aspiración social que determina el resto de los componentes personalizados del proceso pedagógico.

El objetivo formativo expresa en su estructura interna la unidad entre los conocimientos, las habilidades y los valores a alcanzar.

**El aprendizaje:** Es en síntesis, el proceso de aprehensión por el alumno del contenido como parte de la cultura que debe ser asimilada por él en términos de conocimientos, habilidades, valores y rasgos de la actividad creadora en un proceso de integración y generalización, por tanto, la tarea docente debe elaborarse en función del alumno, de sus posibilidades y ritmo de aprendizaje a partir del diagnóstico y el objetivo formativo previsto.

La actividad cognoscitiva es un tipo especial de actividad humana que posibilita el conocimiento del mundo que nos rodea y debe ser dirigida conscientemente por el maestro y asimilada por el alumno en su proceso de aprendizaje.

Las acciones son los pasos lógicos que deben guiar al alumno para desarrollar su aprendizaje:

Cada uno de estos pasos debe concretarse en su redacción en correspondencia con la naturaleza del objeto de estudio de la clase.

**Las operaciones:** Es la parte instrumental de la tarea docente en que se concretan y materializan las acciones, pues para analizar, determinar, comparar, seleccionar, el alumno tendrá que valerse de las operaciones.

Las acciones y operaciones deben conformarse de manera tal que en estrecha relación conduzcan, no sólo al desarrollo de la habilidad, sino también unido a ella a la adquisición del conocimiento y al alcance de la intencionalidad educativa como una totalidad no dividida, declarada ya en el objetivo formativo de la clase. Este es el particular que matiza la tarea docente de nuestros tiempos de revolución educacional.

**El método:** Es la vía o modo que utiliza el profesor y el alumno para asimilar el contenido, su curso tienen lugar a través de procedimientos que constituyen momentos o eventos del método y el mismo propicia el desarrollo de las acciones y operaciones previstas en la tarea docente.

**Los medios:** son el soporte material del método y expresan la esencia del contenido.

Los métodos y los medios permiten darle curso a las acciones y operaciones de la tarea docente para provocar el movimiento del contenido y alcanzar el objetivo formativo.

El tiempo previsto es aquel necesario y suficiente para darle solución a la tarea docente, el que se necesita prever en función de las posibilidades de los alumnos y su interés de aprendizaje, determinado por el diagnóstico y la naturaleza y complejidad del contenido.

### **Exigencias de la tarea docente:**

La correspondencia entre el diagnóstico, la estrategia grupal y el plan individual.

La atención a la diversidad a través de:

- El trabajo preventivo desde la clase.
- La correspondencia entre el tratamiento del contenido y las respuestas individualizadas.
- El tratamiento del contenido a partir de los intereses y motivaciones del grupo.
- Tiene en cuenta criterios y dudas de estudiantes en particular para dar explicaciones generales.
- La utilización de los recursos existentes que apoyan al proceso docente educativo.
- La demostración de la utilidad de la clase para su actividad a partir de las necesidades de la vida práctica.
- La simulación de situaciones docentes a partir de la práctica.
- La estimulación de la competencia comunicativa.
- El desarrollo de acciones de autoaprendizaje y auto evaluación.
- La orientación, ejecución y control del trabajo independiente.
- La calidad del trabajo político ideológico.
- El uso de programas y recursos que aporta el programa de la Revolución Educacional.

Resumiendo los criterios empleados se puede plantear que la tarea docente constituye un medio a través del cual se ponen de manifiesto los componentes fundamentales de la actividad pedagógica.

Es en la tarea docente donde se plantean nuevas exigencias a los estudiantes, las cuales repercuten tanto en la adquisición de conocimientos, en el desarrollo del intelecto, así como en la formación de cualidades y valores, todo en función de formar un modo de actuación.

Su función principal es la de organizar la participación de los sujetos que intervienen en el PEA, dentro y fuera del momento de la clase. Su esencia transformadora se manifiesta a

través del método que se emplee para solucionarla, de manera que ofrezca un modo de actuación y sus características principales son:

- La variedad de formas y enfoques que pueda adoptar.
- No se da aislada de los componentes del PEA.
- Esta dirigida a la formación multilateral de la personalidad.

Otras características de la tarea docente son consecuencias del concepto acción,"como componente fundamental de la actividad" Leontiev (1986:46).

Entre estas características se destacan:

- Se estructuran sobre la base de objetivos jerárquicamente determinados.
- Su planteamiento tiene un carácter consciente y planificado.
- Esta necesariamente relacionada con el concepto de motivo.
- Se realiza a través de una secuencia de determinadas acciones objetivamente condicionadas que se superponen e interrelacionan de diversas formas.
- Una actividad con enfoque diferenciado y concreto lo cual significa ajustar el trabajo a las necesidades individuales y las del colectivo.

En esta caracterización se reafirma la concepción de que la tarea docente es la instancia donde se integran los componentes del PEA, estas se pueden concebir para realizar por el alumno en clase y fuera de ella, de forma individual o colectiva, vinculadas a la búsqueda y adquisición de los conocimientos y al desarrollo de las habilidades.

Autores como Silvestre, M. (2000); Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2000); Zilberstein, J. y Pórtela, R. (2002), por su parte, consideran las tareas docentes "(...) como aquellas actividades que se orientan para que el alumno las realice en clases o fuera de esta, implican la búsqueda y adquisición de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la formación integral de la personalidad" Silvestre, (2000:35).

En esta definición quedan explícitamente delimitadas, a criterio de la autora, las funciones de cada uno de los polos que intervienen en el proceso de enseñanza–aprendizaje los profesores diseñan y orientan las actividades (tareas docentes); los estudiantes las realizan, y en consecuencia, adquieren conocimientos, desarrollan habilidades y en general, forman integralmente su personalidad.

En los criterios analizados, se evidencia una doble funcionalidad de la tarea docente atendiendo a cada uno de los polos que interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje:

1) como medio para aprender (para los estudiantes) .

2) como medio para dirigir el aprendizaje (para los profesores).

Álvarez de Sayas, C. M. (1999), expresa que “la explicación de un concepto y su correspondiente comprensión por el alumno, la realización de un ejercicio o de un problema por éste, son ejemplos de tareas docentes”

.Fuentes González, H. C. (2000.16), considera que la tarea “... puede ser interpretada como operación o como procedimiento dependiendo de que estemos considerándolo como actividad o como el método con que se enfrenta el problema”. Este criterio equivale a considerarla instrumentación o recurso, y no como cualquier actividad diseñada para enseñar o aprender.

Se asume el criterio de Zilberstein, J. y Pórtela porque se ajusta más al contexto educacional y al propósito de esta investigación, privilegia el papel del alumno e incluye la búsqueda de información y la apropiación de conocimientos, así como el desarrollo de habilidades.

Según Wilber. (2000.42) "es común encontrar en la literatura pedagógica dos acepciones del termino "tarea". La primera es cualquier tipo de ejercicio cuya relación exija la materialización de algún acto cognoscitivo. La segunda no es cualquier ejercicio, sino precisamente una "tarea" que frecuentemente se denomina "tarea cognoscitiva", cuya solución conduce a los estudiantes a conocimientos y modos de acción nuevos para ellos."

En la tarea docente podemos identificar tres grandes campos de acción, los que han concretarse en exigencias, que se cumplan tanto por la tarea en sí como por la posibilidad que estas puedan ofrecer de interacción entre los estudiantes, estas son: la instrucción, la educación y el desarrollo.

**Suficiente:** Está dada en el hecho de que se asegure la ejercitación necesaria del alumno para la adquisición de la habilidad, para la formación del conceptos o para la aplicación.

**Variado:** Está dado por las propias exigencias de la concepción de la tarea. Es decir, que se presentan en los diferentes niveles de complejidad, crecientes en su concepción de forma que se exija al alumno el esfuerzo intelectual que estimule su desarrollo, una mejor asimilación y la utilización del conocimiento.

**Diferenciado:** El docente en la concepción atiende las diferencias individuales de sus alumnos, sus potencialidades, intereses, motivos. Hay alumnos que pueden enfrentar tareas más complejas, otros aún no están en condiciones de enfrentarse.

Es importante reiterar que el carácter rutinario y aburrido de las tareas lejos de contribuir a desarrollar interés por el estudio crea el rechazo por la escuela.

### **Modelo guía de orientación para el desarrollo de la habilidad calcular con radicales.**

- a. Comprensión y análisis del ejercicio.
  - a) Lee cuidadosamente la orden dada:
    - Identifica el tipo de cálculo y determina si conoces un procedimiento para efectuarlo. Si es así procede.
    - Si no conoces el procedimiento entonces,
  - b) Busca conceptos, teoremas o propiedades que se relacionen con el cálculo.
  - c) Realiza las transformaciones que sean necesarias para reducir a un procedimiento conocido.
  - d) Calcula.
  - e) Analiza el resultado.
  - f) Formula el nuevo procedimiento obtenido.

### **Características del modelo guía de orientación:**

No se pretende ofrecer un algoritmo cerrado para la solución de los ejercicios.

- 1- Ofrece una forma de ayuda a los alumnos, se trata que a través de impulsos ellos lleguen a formular los procedimientos en cada caso.
- 2- Las exigencias planteadas en las tareas tienen un carácter heurístico, se trata de facilitarles a los alumnos herramientas que puedan utilizar en la búsqueda de los procedimientos de solución correspondientes.
- 3- Una vez obtenido cada procedimiento el trabajo de resolución de los ejercicios tienen carácter algorítmico.

## **Procedimientos metodológicos para la orientación de las tareas docentes concebidas para el desarrollo de la habilidad calcular con radicales.**

1-En el trabajo con la tarea docente es necesario explicar a los estudiantes la importancia que tienen la habilidad calcular con radicales en décimo grado y para grados posteriores, teniendo en cuenta que todo lo que se aprende en matemática es utilizado en algún momento de nuestra vida.

2-Luego de la motivación se analizan las exigencia que deben tener en cuenta para resolver los ejercicios de cálculo con radicales planteados en las tareas docentes orientadas. Se precisan las exigencias que estas deben cumplir así como las características de las mismas, estas conforman un modelo guía de orientación el cual se puede plasmar en una diapositiva, cartulina, tarjetas etc.

3- Luego se analiza por el profesor el modelo guía de orientación a partir de un ejemplo.

4- Finalmente se realiza una valoración con el grupo de acuerdo con las exigencias planteadas por el modelo para verificar si estas fueron cumplidas o no y con que calidad.

## **Tareas docentes para la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales.**

### **Tarea No. 1**

**Título:** Simplificación de radicales. Reducción del índice del radical.

**Objetivo:** Simplificar expresiones con radicales reconociendo la importancia de la simplificación para los cálculos que posteriormente aprenderán.

#### **Condiciones previas:**

1. Significado de simplificar. Simplificación de fracciones.

2.  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  para  $a > 0$  y  $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ , en particular  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

3. Propiedades de los radicales.

**Concepto asociado:** Simplificación de un radical: Simplificar un radical es reducirlo a su más simple expresión, o sea cuando la cantidad subradical es entera y del menor grado posible. Ejemplo pág.104 L/T.

#### **Niveles de dificultad.**

I. Cuando la cantidad subradical o radicando contiene factores cuyo exponente es divisible por el índice del radical.

II. Cuando los factores del radicando y el índice tienen un divisor común.

**Orientación, ejecución y control de la tarea.**

**P:** Indica los ejercicios.

**1. Simplificar.**

a)  $\sqrt{18}$

b)  $\sqrt{9a^3}$   $a > 0$ .

c)  $\sqrt[3]{16}$

**A:** Comprende lo que debe realizar a partir del significado de simplificación de radicales.

**A:** Trabaja en la resolución.

**P:** Observa si el radicando se puede descomponer en factores primos.

**A:**  $18 = 3^2 \cdot 2$   
 $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2}$

**P:** ¿Cómo puedes expresar también la raíz del producto indicado?

**A:**  $\sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2}$

**P:** ¿Cómo puedes representar estos factores usando la notación de potencias?

**A:**  $\sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$   
 $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

**P:** Escribe de nuevo usando los radicales.

**A:**  $3\sqrt{2}$

**P:** - ¿Está simplificada ya la expresión?

- Trata de hacer lo mismo en los otros casos.

**A:** Comprueba de acuerdo con el concepto de simplificar.

**P:** Usa los resultados que ya obtuviste en el caso anterior.

$$\begin{aligned}\sqrt{9a^3} &= \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot a} \\ &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \\ \text{A: } \sqrt{3^2} &= 3; \sqrt{a^2} = a \\ \sqrt{9a^3} &= 3a\sqrt{a}\end{aligned}$$

**P:** Comprueba siempre que obtiene una expresión simplificada.

$$\begin{aligned}\text{A: } \sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

**2.** Simplifica.

$$\text{a) } \sqrt[4]{4a^2} \qquad \text{b) } \sqrt[6]{9a^2x^2}$$

**P:** Procede como en los casos anteriores y observa las características.

$$\text{a) } \sqrt[4]{4a^2} = \sqrt[4]{2^2 a^2} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{a^2} = 2^{\frac{2}{4}} \cdot a^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2a}.$$

**b) P:** es conveniente que también descompongas el índice del radical en sus factores primos para que te des cuenta de lo que tienes que hacer.

$$\text{A: } \sqrt[6]{9a^2x^2} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^2 \cdot a^2 \cdot x^2} = \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{3ax}.$$

**P:** Recuerda siempre comprobar que la expresión resultante está completamente simplificada.

**P:** Resume los pasos dados. Trata de arribar a alguna conclusión con respecto al procedimiento usado.

- Descomponer el radicando en sus factores primos si es posible.
- Si el exponente de los factores es igual que el índice de la raíz, el factor sale, si es mayor se divide entre el índice de la raíz, el cociente es el exponente con que sale y el resto el exponente con que queda como radicando.

**P:** Analiza ahora el cuadro de la pág.105 y compara cómo se corresponde con tus ideas.

**P:** Estudia todos los ejemplos de la pág.105 comparando cada paso con lo indicado en el cuadro.

- En general se cumple:

1. Si  $a > 0$ ;  $m \in \mathbb{N}$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ;

Y  $n = kx$ ;  $m = ky$ ;  $k \in \mathbb{N}$ .  $x, y$  primos entre sí.

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kx]{a^{ky}} = \sqrt[x]{a^y}$  está simplificado.

2. Si  $m > n$  y  $m = nz + r$ ;  $z \in \mathbb{N}$ ;  $r \in \mathbb{N}$ .

$\sqrt[n]{a^m} = a^z \sqrt[n]{a^r}$  está simplificado.

3. **Ejercicios para la fijación y el control:** (El profesor los indica y orienta que usen el recuadro hasta tanto les sea necesario). Controla el trabajo individual y colectivo.

1. Ejercicio 3 pág.107 L/T 10. Inciso a, c, g, h, j, k, m, p.

2. Simplifica los siguientes radicales. (Considera que las variables y expresiones que aparecen son todas positivas).

a)  $\sqrt{4a^2b^4}$

b)  $\sqrt[3]{27a^3b^9}$

c)  $\sqrt{\frac{9a^2}{25x^4}}$

d)  $\sqrt[4]{16a^4m^8x^4}$

e)  $\frac{\sqrt[4]{128(a-b)^5}}{81(a+b)^4}$

## Tarea No.2

**Título:** Simplificación de radicales. Racionalización de denominadores.

**Objetivos:** Simplificar radicales cuando aparecen fracciones en el radical reconociendo la importancia de la simplificación para los cálculos que posteriormente deberán realizar.

### **Condiciones previas**

- Fracciones equivalentes.  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$  ;  $b, d \neq 0$ .
- Producto notable.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- Propiedades de los radicales.  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  ;  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  ;  $a, b > 0$ .

**Conceptos asociados:** Simplificación de un radical (se retoma el concepto de la tarea anterior).

**Niveles de dificultad.**

I. Denominador es un monomio (contiene un solo radical).

II. Denominador es un binomio (dos radicales que no son semejantes).

**Orientación, ejecución y control de la tarea**

**P:** Indica los ejercicios.

1. Simplifica los siguientes radicales.

a)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$

c)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x-1}}$  ( $x > 0$ ).

b)  $2\sqrt{\frac{9a^2}{8x^5}}$  ; ( $x > 0$ ).

d)  $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

**A:** Comprende lo que se debe realizar retomando el concepto de simplificación de radicales.

**P:** ¿Por qué no está simplificado?

**A:** Retoma el concepto de simplificar y observa que aparecen denominadores dentro del radical o radicales en los denominadores, o sea, la cantidad subradical no es entera.

**P:** ¿Cómo puedes expresar también  $\sqrt{\frac{3}{7}}$  ?

**A:**  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

**P:** ¿Por qué factor se pueden multiplicar numerador y denominador para que desaparezca la raíz en el denominador?

**A:**  $\sqrt{7}$  ya que  $(\sqrt{7})(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7$  ; entonces:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

**P:** Recuerda que debes simplificar completamente.

- **b)** Por qué la consideración de  $x > 0$ .

**A:** Tiene en cuenta que si  $x < 0$  la expresión dentro del radical es negativa y si  $x = 0$  se indefine.

**P:** Representa la expresión como una división de radicales y simplifica tanto como sea posible.

$$\mathbf{A:} \quad 2 \left( \frac{\sqrt{9a^2}}{\sqrt{8x^5}} \right) = 2 \left( \frac{3a}{\sqrt{2^3 \cdot x^5}} \right) = 2 \left( \frac{3a}{2x^2 \sqrt{2x}} \right) = \frac{6a}{2x^2 \sqrt{2x}}$$

**P:** Ahora decide por quién debes multiplicar.

**A:** Multiplicar por  $\sqrt{2x}$  porque es el radical que está en el denominador.

$$\frac{6a\sqrt{2x}}{2x^2(\sqrt{2x})^2} = \frac{6a\sqrt{2x}}{2x^2 \cdot 2x} = \frac{3a\sqrt{2x}}{2x^3}$$

- **c)** ¿Cuál es la expresión del denominador; por quién se debe multiplicar numerador y denominador?

**A:** Por  $\sqrt{x-1}$ ;  $x > 1$ .

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{3(x-1)}}{x-1}$$

- **d)**

**P:** Observa que el denominador es un binomio, ten en cuenta lo que se te indicó anteriormente para determinar por quién tienes que multiplicar numerador y denominador.

**A:** Para que aparezca  $(\sqrt{7})^2$  y  $(\sqrt{3})^2$  deben aparecer como términos de una diferencia de cuadrados, por lo que se debe multiplicar por la suma  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ ,

entonces:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}.$$

**P:** Pudieras resumir el procedimiento que empleaste para racionalizar los denominadores.

**A:** Se multiplican numerador y denominador por una expresión que elimine la raíz del denominador.

**P:** Lee los recuadros de la pág. 117 para que aprendas el concepto de conjugada y su importancia en la racionalización de denominadores.

### **Ejercicios para la fijación y el control:**

1. Racionalizar el denominador de:

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c)  $\frac{3}{4\sqrt{5}}$

e)  $\frac{5n^2}{3\sqrt{mn}}$

g)  $\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

b)  $\frac{5}{\sqrt{2}}$

d)  $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$

f)  $\frac{4-\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}}$

h)  $\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

3. Ejercicio 1 pág. 118 L/T 10. grado incisos b, c, e, g, i, l, n.

### **Tarea No. 3**

**Título:** La operación inversa a la simplificación de radicales.

**Objetivos:** Convertir expresiones con radicales en expresiones equivalentes introduciendo factores dentro del signo de radical.

### **Condiciones previas**

•  $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$

•  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0.$

$$\bullet (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Conceptos asociados:** Concepto de radicación como operación inversa de la potenciación.

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ significa } b^n = a; a \geq 0.$$

**Niveles de dificultad.**

1. Que el factor exterior sea un monomio.
2. Que el factor exterior sea un binomio.

**Orientación, ejecución y control de tarea.**

**P:** ¿Cuál es la operación inversa a la simplificación de fracciones? Ejemplifícala.

**A:** La ampliación de fracciones,  $\frac{2}{5}$  se puede ampliar a una fracción con denominador que sea múltiplo de 5, por ejemplo 30 ( $30 : 5 = 6$ ) y multiplicando numerador y denominador por 6 se obtiene la fracción equivalente  $\frac{12}{30}$  lo que es útil para realizar algunas operaciones de cálculo como la adición y la sustracción .

**P:** ¿Cómo se pudiera presentar una situación análoga en el cálculo con radicales?

**P: 1.** Introduce en el radical el factor exterior o coeficiente.

a)  $2\sqrt{a} \quad a \geq 0.$

b)  $5a\sqrt[3]{b} \quad a, b \geq 0.$

c)  $(a + b) \sqrt{\frac{a}{a + b}} \quad a + b \geq 0.$

**P:** En el primer caso cuál es el exponente de 2.

**A:** Es 1.

**P:** A que exponente hay que elevar el factor 2 para introducirlo dentro del radical para que no se altere su valor.

**A:** Cuando se introduce el 2 dentro del radical su exponente pasaría a ser  $\frac{1}{2}$  , para que no se altere hay que elevarlo a 2, entonces  $2\sqrt{a} = \sqrt{2^2 a} = \sqrt{4a}$  .

**P:** Comprueba siempre que se obtiene una expresión equivalente. Para el caso b) piensa de la misma forma pero ahora tienes que tener en cuenta los dos factores.

$$\mathbf{A:} \ 5a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(5a)^3 b} = \sqrt[3]{5^3 a^3 b} = \sqrt[3]{125a^3 b}$$

**P:** En el caso c) debes tener en cuenta que debes introducir un binomio. Analiza si es conveniente desarrollarlo o simplificar.

$$\mathbf{A:} \ (a + b) \sqrt{\frac{a}{a+b}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 a}{a+b}} = \sqrt{(a+b)a} = \sqrt{a^2 + ab}$$

**P:** Pudiera formular una regla para esta transformación.

**A:** Para introducir un factor bajo el signo radical se eleva dicho factor a la potencia que indica el índice del radical o lo que es lo mismo se multiplica el exponente del factor que está fuera por el índice de la raíz y el resultado es el exponente cuando está “bajo” el signo del radical.

**P:** Estudien los ejemplos de la pág. 106. L/T10. grado

## **2. Ejercicios para la fijación y el control.**

Ejercicio 4 pág.108 a, b, c, e, f, h, i. L/T10. grado

### **Tarea No. 4**

**Título:** Reducción de radicales al mínimo común índice.

**Objetivos:** Convertir radicales que tienen diferentes índices, en radicales equivalentes a los dados pero que tengan un índice común.

#### **Condiciones previas.**

- Mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.
- Comparación de números racionales.

#### **Conceptos asociados.**

Comparación de números. Para comparar radicales que tengan un mismo índice se comparan los radicales. Es mayor el que mayor radicando tiene.

#### **Niveles de dificultad.**

No es necesario distinguir.

#### **Orientación, ejecución y control de la tarea.**

**P:** Recuerda que hasta ahora han podido comparar números racionales expresados de distinta forma y que también es muy fácil comparar radicales que tengan el mismo índice.

**Indica los ejercicios.**

1. Compara:

a)  $\frac{5}{6}$  y  $\frac{3}{4}$ .

b)  $\sqrt{3}$  y  $\sqrt{5}$

c)  $\sqrt[6]{2}$  y  $\sqrt[4]{5}$

**A:** Comprende lo que se debe realizar en los casos **a)** y **b)** a partir del concepto de orden de los números fraccionarios y del de orden de radicales. Se da cuenta que en c) se le presenta una situación análoga al inciso **a)**.

**P:** ¿Para **c)** pudieras proceder análogamente que en **a)**? ¿Cómo hallar el índice común? ¿Cómo debe cambiar el exponente del radicando para que el radical obtenido sea equivalente al dado? Piensa análogamente a como proceder en **a)**.

**A:** Busca el mcm entre 6 y 4 (12).

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[6 \cdot 2]{2^{2 \cdot 1}} = \sqrt[12]{2^2}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{5^3}$$

Compara  $2^2$  y  $5^3$  para decidir en la comparación.

**P:** Reflexiona sobre los cálculos realizados. ¿Es aplicable la vía que usaste para resolver otros ejercicios? ¿Pudieras describir el procedimiento?

**A:** Expresan sus ideas.

**Procedimientos para reducir dos radicales a un índice común.**

- 1) Se determinan el mcm de los índices.
- 2) Multiplico cada índice por el número necesario para obtener el mcm.
- 3) Multiplico el exponente de cada radical por el mismo número que multipliqué el índice (Factor K).

La reducción de radicales a un índice común nos permite comparar radicales comparando solamente los radicandos. (Libro de texto de décimo grado pág.109).

**P:** En la pág.108 del L/T un recuadro con la descripción completa del procedimiento. Compara con lo que lograron hacer y estudien los ejemplos dados.

**A:** Lee, toma notas.

**P:** ¿Cuál es el índice común?

**P:** ¿Es posible comparar estos radicales? ¿Cómo procedes?

**A:** Reduce los radicales a un índice común. Compara los radicales.

**P:** Soluciona. Indica soluciones.

**A:** Ejecuta.

**P:** Evaluación. Comprobación. ¿Es lógica la solución? ¿Es única la solución?

**A:** Evalúa los resultados. Explica la solución de los ejercicios.

**P:** Reflexión sobre los cálculos realizados. ¿Cómo procediste para la solución de los ejercicios? ¿Es aplicable la vía de solución para otros ejercicios de este tipo?

**A:** Explica la vía de solución. Describe los procedimientos. Valora la posibilidad de aplicarlos a ejercicios similares.

### **Ejercicios para la fijación y el control.**

1) Reduce los radicales a un índice común.

a)  $\sqrt[3]{7}$  ;  $\sqrt[4]{5}$

b)  $\sqrt[3]{5^2}$  ;  $\sqrt[3]{2}$

c)  $\sqrt[4]{5}$  ;  $\sqrt[3]{3}$

d)  $\sqrt[6]{10}$  ;  $\sqrt[4]{5^3}$  ;  $\sqrt[3]{2^2}$

e)  $\sqrt{2a}$  ;  $\sqrt[4]{y^3}$  ;  $\sqrt[5]{2^2}$

f)  $\sqrt{a-b}$  ;  $\sqrt[4]{a+b}$  ;  $\sqrt[6]{a \cdot b}$  ;  $\sqrt[3]{a^2b}$

2) Disponer los radicales siguientes en orden numérico creciente:

a)  $\sqrt{2}$  ;  $\sqrt[3]{5}$

b)  $\sqrt{5}$  ;  $\sqrt[3]{7}$  ;  $\sqrt[4]{8}$

c)  $\sqrt[3]{7}$  ;  $\sqrt[4]{5}$  ;  $\sqrt[6]{2^5}$

d)  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  ;  $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$  ;  $\sqrt{\frac{7}{8}}$

## Tarea No. 5

**Título:** Radicales semejantes. Adición y sustracción de radicales.

**Objetivo:** Adicionar y sustraer radicales a partir del concepto de radicales semejantes.

### Condiciones previas.

- Concepto de términos semejantes.
- Reducción de radicales a un índice común.
- Simplificación de radicales.

### Conceptos asociados.

Concepto de radicales semejantes: son los radicales que tienen igual índice e igual radicando.

### Niveles de dificultad.

I. Cuando no se precisa hacer simplificaciones previas.

II. Se debe simplificar previamente para racionalizar el cálculo.

### Orientación, ejecución y control de la tarea.

P: Indica los ejercicios.

Efectúa:

a)  $0.25 + 3.14$

e)  $4.5x^3 + 2x^2 - 1.5x^3$

b)  $-4.36 + 2.04$

f)  $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

c)  $\frac{13}{7} + \frac{41}{7}$

g)  $-8\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + 6\sqrt[3]{a}$

d)  $4a + 2a - 7a - b$

h)  $\sqrt{20} + \sqrt{45} - 4\sqrt{5}$

A: Comprende y resuelve hasta f). En f) procede de forma análoga.

**P:**  $4\sqrt{3}$  y  $2\sqrt{3}$  son semejantes. Remite al recuadro de la pág.110 y a los ejemplos. ¿Cuáles son semejantes en **g)**? ¿Qué puedes sumar?

**A:**  $-8\sqrt[3]{a} + 6\sqrt[3]{a} = -2\sqrt[3]{a}$

**P:** Y entonces cómo que el resultado.

**A:**  $5\sqrt[3]{b} - 2\sqrt[3]{a}$

**P:** ¿Qué sucede con los radicales? ¿Pudieran convertirse en términos semejantes? ¿Por qué no prueban simplificando para ver que resulta?

**A:**  $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

Entonces  $\sqrt{20} + \sqrt{45} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

Ahora todos son semejantes y puedo proceder.

$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

**P:** ¿Qué puedes concluir acerca del procedimiento?

**A:** Primero debo simplificar si es posible, después reduzco los semejantes y dejo los no semejantes con su propio signo.

**P:** En general se procede de la siguiente forma.

- **Reducir radicales semejantes:** Los radicales semejantes, o sea los radicales que tienen igual índice e igual radicando, se reducen como términos semejantes que son hallando la suma algebraica de los coeficientes y poniendo esta suma como coeficiente de la parte radical común.
- **Adición y sustracción de radicales:** Se simplifican los radicales tanto como sea posible. Se reducen los radicales semejantes. A continuación se escriben los radicales no semejantes con el signo correspondiente.

### **Ejercicios para la fijación y el control:**

**1) Efectúa las sumas siguientes.**

**a)**  $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$

**e)**  $3\sqrt{8} + 4\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + \sqrt{32}$

b)  $5\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{4}$

f)  $-\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 5\sqrt{75} + 3\sqrt{48}$

c)  $6\sqrt{2} + 0.2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$

g)  $\sqrt[3]{216a} + \sqrt[3]{64a} - 4\sqrt[3]{27a^4}$

d)  $3\sqrt{a} + 7\sqrt{b} + 5\sqrt{b} \quad a, b > 0.$

h)  $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{8}$

2) Verifique que:

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12}}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} \text{ es un número entero.}$$

3) Calcula:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$

## Tarea No. 6

**Título:** Multiplicación y división de radicales.

**Objetivo:** Multiplicar y dividir radicales aplicando las propiedades de las potencias.

**Condiciones previas:**

- Propiedades de los radicales.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a : b} \end{aligned} \quad a, b > 0.$$

- Reducción de radicales a un mismo índice.

**Concepto asociado.**

Radicales con un índice común.

**Niveles de dificultad.**

I. Que todos los factores tengan el mismo índice.

II. Que los factores tengan diferente índice.

**Orientación, ejecución y control de la tarea.**

P: Propuesta de los ejercicios.

**A:** Efectúa:

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

d)  $\sqrt{12} : \sqrt{3}$

b)  $5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}$

e)  $\sqrt{20} : 2\sqrt{5}$

c)  $\sqrt{8} : \sqrt{4}$

**P:** Comprensión de los ejercicios. Lee y analiza cuidadosamente los mismos. ¿De qué tratan? ¿Qué tipo de cálculo podemos realizar? ¿Podemos aplicar propiedades de los radicales? ¿Cuáles propiedades se pueden aplicar? ¿Qué condición deben cumplir estos radicales? ¿Si los radicales tienen índices diferentes como procedemos?

**A:** Interiorizan y responden.

Respuesta/ Si

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad a, b > 0.$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

Que tengan igual índice.

Se reduce a un índice común y aplicamos las propiedades.

**P:** Trabajo en los ejercicios. Presición en los cálculos a efectuar.

**A:** Trabajan en la solución de los ejercicios.

**P:** Reflexión sobre los cálculos realizados. ¿Cómo procedimos para la solución de los ejercicios? ¿Es aplicable la vía de solución para otros ejercicios de este tipo?

**A:** Explica vía de solución. Describe los procedimientos. Valora la posibilidad de aplicarlo a situaciones similares.

### **Procedimientos para multiplicar o dividir radicales.**

**Para multiplicar o dividir radicales diferenciamos dos casos:**

a) Los radicales tienen igual índice.

b) Los radicales tienen índices diferentes.

En el primer caso aplicamos directamente las propiedades anteriores.

En el segundo caso reducimos primero a un índice común y aplicamos las propiedades. (Libro de texto décimo grado Pág.114).

### **Ejercicios para la fijación y el control.**

1. Efectúa las multiplicaciones (todas las variables y expresiones que aparecen son positivas).

a)  $4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2}$ .

e)  $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx}$ .

b)  $-2\sqrt[3]{5} \cdot 4\sqrt[3]{25}$ .

f)  $a\sqrt{2x} \cdot 3b\sqrt[4]{8x^3}$ .

c)  $\sqrt[3]{4x^2} \cdot \sqrt[3]{2x}$ .

g)  $\frac{3}{a}\sqrt[4]{a^2b^3c} \cdot \frac{1}{b}\sqrt[6]{a^3b^5c^2}$ .

d)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ .

2. Ejercicio 2 pág.115 L/T 10.grado Incisos a, b, d, e, g, h, i, n, p.

### Tarea # 7 (Final)

**Título:** Resumen de los procedimientos estudiados.

**Objetivo:** Calcular con radicales, seleccionar el procedimiento que corresponde.

**Condiciones Previas:**

1. Distintas formas de simplificación.
2. Radicales semejantes.
3. Adición y sustracción de radicales.
4. Convertir radicales en un índice común.
5. Multiplicación de radicales.
6. Comparación de radicales.
7. Introducción de factores en el radical.

**Orientación del Profesor:**

Cuando se presente un cálculo con radicales debes proceder de la siguiente manera.

1. Identificar que tipo de cálculo se tiene.
2. Simplificar la expresión si es necesario diferenciando cada caso.

### Caso 1

El radical puede aparecer.

$$\begin{aligned} \text{Ej. } \sqrt[4]{a^2} &= 2\sqrt[2]{a^2} = \sqrt{a} \\ \sqrt[12]{16} &= 3\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Aquí aplicas la propiedad

$$\sqrt[k \cdot n]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ k > 0 \end{array}$$

### Caso 2

El radical puede aparecer.

$$\text{Ej. a) } \sqrt[3]{a^5} = a\sqrt[3]{2} \quad \text{b) } \sqrt[5]{a^5} = a$$

En el ejemplo (a) divide el exponente

entre el índice y el cociente es el

de la potencia que queda en el

Radical.

En el ejemplo (b) simplifican la

el exponente y el índice

porque son iguales.

### Caso 3

Puede aparecer

$$\text{Ej. a) } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ej. b) } \frac{1}{3 + \sqrt{2}} = \frac{1}{3 + \sqrt{2}} \cdot \frac{3 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$$

Aquí racionalizan el denominador que puede ser un monomio (se multiplica por la raíz cuadrada ( $\sqrt{\quad}$ ) del denominador; o un binomio (se multiplica por la conjugada).

- $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  y  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ;  $a, b > 0$  se llaman conjugadas.

$$[\sqrt{a} + \sqrt{b}][\sqrt{a} - \sqrt{b}] = [\sqrt{a}]^2 - [\sqrt{b}]^2 = a - b \quad (a, b > 0)$$

- Introducir factores en el radical: para ello es necesario elevarlo a un exponente igual al índice del radical.

$$\text{Ej. a) } a\sqrt[5]{5b} = \sqrt[5]{5a^5b}$$

$$\text{b) } \sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^{-3}} \cdot x^8} = \sqrt[20]{x^5} = \sqrt[4]{x}$$

3. Efectuar el cálculo indicado.

- Adición y sustracción de radicales (solo cuando son semejantes.)

$$\text{Ej. a) } \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{5} = 5\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\text{b) } \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2^3} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

O sea proceder igual que cuando reduces términos semejantes.

- Multiplicación y división (recordar propiedades de los radicales)

Pueden los radicales tener:

- **Igual índice.**

Aquí aplicar la propiedad:

$$\text{Ej. } \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt{4} : \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad a, b > 0$$

-**Índices diferentes.**

$$\text{Ej. } \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} \quad \text{mcm } 3 \cdot 2 = 6$$

$${}^{3 \cdot 2}\sqrt{3^2} \cdot {}^{2 \cdot 3}\sqrt{2^3} = {}^6\sqrt{9} \cdot {}^6\sqrt{8} = {}^6\sqrt{7^2}$$

4. Dar la respuesta completamente simplificada.

**El trabajo con un procedimiento generalizado (Anexo 8) puede contribuir a que los estudiantes cuenten con un soporte material para el cálculo en general.**

- **Indicar los siguientes ejercicios.**

1. Efectúa las operaciones indicadas.

$$a) 7\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x} - 8\sqrt[5]{x} + 15\sqrt[5]{x}$$

$$b) \sqrt{20} + \sqrt{45} - 4\sqrt{5}$$

$$c) \sqrt{45} - 5\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$$

$$d) \sqrt{32} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{9}}$$

2. Calcula. Considera positivas todas las variables y expresiones que aparecen.

$$a) \sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$$

$$b) 2\sqrt{m^2n} - \sqrt{9m^2n} + \sqrt{16mn^2} - \sqrt{4mn^2}$$

$$c) 2\sqrt{a^4x + 3a^4y} - a^2\sqrt{9x + 27y} + \sqrt{25a^4x + 75a^4y}$$

$$d) \sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{a^4}$$

3. Comprueba que para todos los valores admisibles de las variables a y b se cumple que:

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{5b} - \sqrt{b}} - \sqrt{\frac{5ab^2}{16}} - \frac{\sqrt[4]{3\sqrt{b^{12}}}}{\sqrt{16b^2}} = \frac{\sqrt{5}(1 - \sqrt{ab})}{4}$$

### Validación de la aplicación de las tareas docentes .

Se consideró como prueba pedagógica de intermedio y salida respectivamente los resultados del 1er TC, observación al desempeño durante una clase de cálculo con radicales y de la prueba ministerial.

#### Resultados del primer Trabajo de Control.

El análisis de los resultados del diagnóstico inicial condujo a la necesidad de la aplicación de tareas docentes con la finalidad de lograr un desarrollo de la habilidad calcular con radicales que se trabajó en la Unidad 1. Un resultado intermedio de la efectividad de las mismas se obtiene al aplicar el 1er TC (anexo 9) que se trazó como objetivo calcular aplicando propiedades de estos.

Al procesar la pregunta 1 se obtiene como resultado que de un grupo de 28 estudiantes, de 3 que estaban en el nivel alto lo alcanzan 12 para un 42%, de 19 en el nivel bajo se mantienen 10, para un 36% y se mantienen 6 en medio para un 21%.(anexo 10).

- para la dimensión, dominio de los conceptos (radicales semejantes, simplificación de radicales, procedimiento de suma algebraica de radicales) de 15 alumnos que identificaban el cálculo aumentó hasta 26 para un 93%, en el indicador, identificar los conceptos asociados al tipo de cálculo (simplificación de radicales, conjugada de una expresión) de 10 que lo cumplían aumentó a 20 para un 71% , presentándose las mayores dificultades en la simplificación de radicales y a la hora de reconocer la conjugada de una expresión.
- para la dimensión, dominio de los procedimientos, de 9 alumnos que sabían seleccionar las reglas de cálculo aumenta a 23 para un 82% y para el indicador realizar los cálculos indicados, de 8 aumenta a 19 para un 69%, presentándose las mayores dificultades en simplificación de radicales y en la racionalización.
- para la tercera dimensión, autocontrol, se obtiene como resultado que de 3 que sabían hacer valoraciones de los resultados obtenidos aumentan a 10 para un 36% y de 3 que sabían comprobar si el resultado es correcto, (cálculo y simplificación de raíces) aumentan a 12 para un 43%. Ninguno retrocede.

A la valoración final se llega con los resultados de una observación al desempeño de los alumnos durante una clase de cálculo con radicales en la consolidación con vista a la prueba ministerial.

### **Resultados de la observación al desempeño (final).**

La guía de observación utilizada para valorar el desempeño de los alumnos en el desarrollo de la habilidad calcular con radicales (anexo 11), se aplicó durante una clase de consolidación en la que se realizaban ejercicios con las diferentes operaciones de cálculo con radicales. Como condiciones previas para esta clase se indicó en el estudio independiente retomar el procedimiento generalizado para realizar operaciones de cálculo trabajado en la tarea 7.

Durante la observación fue notable que el 100% de los estudiantes pudieran identificar el tipo de cálculo, los conceptos y propiedades asociados, así como seleccionar de forma independiente la regla de cálculo necesaria para realizarla. Todos los estudiantes pudieron llegar al resultado final en cada uno de los ejercicios, dos manifestaron inseguridad en

algunos de los resultados finales y cinco emplearon más tiempo del que requerían cada uno de estos.

Aproximadamente el 61% de los alumnos desarrollaron habilidades en la comprobación final y solo el 54% hace valoraciones acerca de la vía utilizada y del resultado obtenido.

En general la observación permitió concluir los avances de los estudiantes en el desarrollo de habilidades de cálculo, específicamente en este, en el que requieren de las habilidades de cálculos anteriores y los específicos de este.

### **Prueba final (ministerial)**

La habilidad de cálculo con radicales se continúa sistematizando durante el trabajo con las otras unidades del programa. La prueba final contenía un inciso referido a este contenido (anexo 12) que se trazó como objetivo: simplificar aplicando las propiedades de los radicales.

De un grupo de 28 estudiantes, de 12 en el diagnóstico intermedio, 18 alcanzan nivel alto para un 64%, de 6 estudiantes, 5 alcanzan nivel medio para un 18% y de 10, 5 alcanzan el nivel bajo para un 18%(anexo 13).

- Para la dimensión dominio de los conceptos de 15 alumnos que identificaban el cálculo con radicales se aumentó hasta 28 para un 100%, en el indicador identificar los conceptos asociados al tipo de cálculo (simplificación aplicando propiedades de los radicales, radicales semejantes, división de radicales) de 10 que lo cumplían aumentó a 28 para un 100%.
- Para la dimensión, dominio de los procedimientos (simplificación y división de radicales), de 9 alumnos que sabían seleccionar las reglas de cálculo necesarias aumentó a 28 para un 100% y para el indicador realizar los cálculos indicados de 8 aumentó a 23 para un 82%.
- Para la tercera dimensión, autocontrol, se obtiene como resultado que de 3 estudiantes que sabían hacer valoraciones de los resultados obtenidos aumentó a 17 para un 61% y de 3 que sabían comprobar si el resultado es correcto, aumentó a 19 para un 68%.

Cuando se integran estos resultados con lo anteriormente analizados en la observación al desempeño permiten establecer los resultados finales del pre experimento pedagógico.

### **Resultados del pre experimento pedagógico (Avance por alumnos)**

La aplicación de las tareas permitió comprobar su efectividad para alcanzar el estado deseado en los estudiantes y su posible generalización en la EMCC.

Al valorar la caracterización de los niveles de formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales (anexo 14) de los 28 estudiantes, en 20 la dirección del cambio es positiva. Esto está dado en que 5 estudiantes pasan del nivel bajo al medio, 9 del bajo al alto, y 6 del medio al alto. Ninguno retrocede. Los alumnos que se mantienen en el nivel bajo logran avances en la primera y la segunda dimensión. Los alumnos de nivel alto en el diagnóstico inicial manifiestan un mayor desarrollo en sus habilidades de cálculo al poder resolver ejercicios con alto nivel de dificultad con rapidez y seguridad.

El cumplimiento de las dimensiones e indicadores en cada uno de los instrumentos utilizados se muestra en el anexo 15 (tabla y gráfico comparativo de la categoría por alumnos según diagnóstico inicial, intermedio y final).

Se destaca en este aspecto el indicador seleccionar la regla de cálculo para resolver el ejercicio en el que se muestra que 19 estudiantes logran incorporarlo a su proceder. En la dimensión de autocontrol se observan también avances importantes ya que de 3 estudiantes que podían comparar el resultado y hacer valoraciones del mismo, aumentó a 19 y 17 respectivamente.

Todo lo anterior corrobora la significación de las tareas realizadas en el desarrollo de las habilidades de cálculo con radicales, de acuerdo con el objetivo propuesto en éste trabajo.

## CONCLUSIONES:

La propuesta propicia la preparación de los alumnos para resolver los problemas de cálculo con radicales y darle solución a través de diferentes vías, lo que contribuye a su desarrollo. En este proceso el papel rector del profesor va cediendo paulatinamente el protagonismo al alumno en la determinación de los algoritmos y el control de los resultados hasta llegar a la búsqueda independiente.

En el examen de ingreso a las EMCC (2003-2004), la situación docente en cuanto al cálculo aritmético y algebraico fue desfavorable. Al procesar los datos por elementos del conocimiento se puede precisar que existían 19 alumnos con dificultades en la estructura interna de la habilidad para un 68%, ya que no eran capaces de reconocer las operaciones en su orden de realización, así como mostraban serias dificultades en los algoritmos de cálculo y en las operaciones básicas fundamentales, de los 28, 19 no tenían independencia, rapidez y calidad en el cálculo realizado.

Como se puede apreciar en la investigación, es posible reducir al mínimo todas las dificultades que presentan los alumnos, ya que los resultados obtenidos así lo demuestran, en todos los indicadores utilizados. De los resultados de la investigación se puede concluir además:

1- La revisión bibliográfica permitió profundizar en las diferentes concepciones acerca del tratamiento metodológico de la formulación y ejecución de ejercicios de cálculo con radicales los que son de gran importancia para la formación y desarrollo de las habilidades.

2- Las tareas docentes son un procedimiento metodológico de orientación en el que se utilizan un modelo guía de actuación, su característica fundamental está en el protagonismo de los estudiantes para la obtención de cada uno de los procedimientos que conforman el cálculo con radicales.

3- La experiencia realizada constata que las tareas docentes son aplicables en la escuela media superior cubana actual, específicamente en la EMCC y que a través de la orientación correcta de esta puede lograrse niveles superiores en el desarrollo y formación de la habilidad calcular con radicales ya que ha sido una problemática existente.

## **Recomendaciones:**

- 1- Continuar aplicando este trabajo en nuestro centro, perfeccionando su estructura y actualizando sistemáticamente la información de acuerdo con las nuevas orientaciones que se reciban del MINFAR.
- 2- Generalizar los elementos y aspectos esenciales de este trabajo principalmente en la enseñanza Media-Superior.

## Bibliografía:

Abdulina, O (1982): La preparación pedagógica del maestro en el sistema de la institución superior pedagógica, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, material impreso. Ciudad de La Habana.

Aballí, Gudelia y otros (1987): El desarrollo de habilidades previas de cálculo en 9 grado. Revista Educación 67. Ciudad de La Habana.

Almeida, B. y otros (1995): Los procedimientos heurísticos de la enseñanza de la Matemática, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, material impreso, Ciudad de La Habana.

Álvarez, C. (1992). La escuela en la vida, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Álvarez de Sayas, Carlos (1999). Escuela en la vida.-La Habana: Editorial Pueblo y Educación, p.-176.

\_\_\_\_\_. Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana. E.S. - La Habana, 1990 en la enseñanza Media-Superior.

Aquino Lorenzo Vivian, 2009. " Conjunto de ejercicios con enfoque Ciencia, Tecnología, Sociedad dirigidos a la motivación hacia el aprendizaje del cálculo aritmético 8vo grado ". Tesis en opción del Título de Master en Ciencias de la Educación. ISP S.S.

Báez, B (1994): El movimiento de las escuelas eficaces: Implicaciones para la innovación educativa. p.93 –116. En Revista Iberoamericana de educación.-No.4.-España, ene-abr.

Báez, Faustino (1935): Aritmética elemental, La Habana, 1935.

Ballester, S. y otros (1992): Metodología de la enseñanza de la Matemática .Editorial Pueblo y Educación. Tomo 1. Ciudad de la Habana.

Ballester, S (2000): Metodología de la Enseñanza de la Matemática .Tomo 2. La Habana. Pueblo y Educación.

----- (2002): El Transcurso de las Líneas directrices en los Programas Matemática y la Planificación de la Enseñanza. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Bernabeu Plous, Matilde y otros (1996): La transferencia en el cálculo. Folleto mimeografiado, La Habana.

Bermúdez, Rogelio y Marisela Rodríguez (1996): Teoría y metodología del aprendizaje. Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

Brito Fernández, Héctor (1987): Psicología General para Institutos Superiores Pedagógicos [et-al].-La habana: Ed. Pueblo y Educación, T.2.

Bruner, Jerome (1989): Acción, pensamiento y lenguaje .Compilación. Alianza. Editorial Madrid.

Campistrous, L y Rizo, C (2001): Sobre las hipótesis y preguntas científicas en los trabajos de investigación. Revista Desafío Escolar. Año 5 .Segunda Edición Especial.2001.

Campistrous Pérez, L y otros (1990): Orientaciones Metodológicas 11no. Grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

----- (1990): Orientaciones Metodológicas 10mo.Grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

Castro Ruz, Fidel (1962): Discurso pronunciado en el primer Congreso de estudiantes secundarios.

Cerezal J. y Fiallo J (2001). Los métodos teóricos en la investigación pedagógica. Revista Desafío Escolar. Año 5 .Segunda Edición Especial.

Colectivo de autores (1984): Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1984.

----- (2006): Tabloide. Módulo ///.Material Base. Didáctica de la Matemática en Preuniversitario. IPLAC. Editorial Pueblo y educación. La Habana.

----- (1992): Metodología de la Matemática en la escuela primaria .Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

----- (1998): Objetivos de la enseñanza de la Matemática. Ministerio de Educación. La Habana,

Coll, Cesar (1986): Acción, interacción y construcción del conocimiento en situaciones educativas .Revista educación 279. p.9-24. Madrid. Enero -Abril.

Concepción.L (2000): ¿Cómo dirigir el proceso de formación de habilidades Matemáticas? .Curso 62. La Habana.IPLAC.

Danilov, MA. (1982): Didáctica de la escuela media. M.N. Skatkin.- La Habana: Ed. Libros para la educación p. 366.

Davidov, V.V (1988): La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico, Editorial Progreso, Moscú.

Davidov, V. V (1982): Tipos de generalización en la enseñanza.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación.371-416.

Delors, J (1996): La educación encierra un tesoro, Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre La Educación para el siglo xx1.Editorial Santillana/UNESCO, Madrid.

Fuentes Gonzáles, H.C. y I.B.Alvarez Valiente (2001): Dinámica del proceso docente educativo. Monografía. CEES. Manuel F Gran. Santiago de Cuba.

Fuentes, H (1995): [et-al]. Fundamentos didácticos para un proceso de enseñanza – aprendizaje participativo, monografía. Centro de Estudio de Educación Superior “Manuel F. Gran”. Universidad de oriente.

Galperin, P (1981): Sobre el método de la formación de acciones intelectuales por etapas.- En Antología de la Psicología evolutiva.- Moscú: Ed. Progreso.

Galperin, P. (1986). Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades.(pp.114-118).La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Garcés, Wilber (2000): El sistema de tareas como Modelo de actuación Didáctica en la Formación de Profesores de Matemática-Computación.Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias Pedagógicas. ISP José de la Luz y Caballero. Holguín.

García, G (1974): Bosquejo general de la Educación en Cuba. Dirección General de Formación del Personal Docente. MINED, p.83.

González Rey, Fernando (1995): Comunicación, Personalidad y Desarrollo. – La Habana: Ed. Pueblo y Educación. 135P.

\_\_\_\_\_ (1989): La personalidad, su Educación y Desarrollo. Albertina Mitjans.- P.33-145.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

González Maura, Viviana (1995): Psicología para educadores... [et-al].- La Habana: Ed. Pueblo y Educación .291P.

Geissler, E,(1975):Metodología de la Enseñanza de la Matemática de 1ro a 4to grado Primera parte .La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Gutiérrez, M.R. Esencia de la tarea docente y su proceso de elaboración. ISP. Félix Varela. Villa Clara. En Soporte Magnético.

Jungk, Werner (1979,1982): Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática.Tres partes. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Klingberg, Lotear (1972): Introducción a la Didáctica General.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación p.13-35, 126-257.

Koprin, P. V (1983):Interrelaciones de la inducción y la deducción.- En lógica dialéctica.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Labarrere, A. L(1994): Análisis y autorregulación en la actividad cognoscitiva en los alumnos.- México: Ángeles. Editores- S.A. 149P.

\_\_\_\_\_ (1987): Bases psicopedagógica de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación, p.147.

Labarrere, Guillermina (1991): Pedagogía.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación, p.354.

Leontiev, A.N. (1986) Sobre la formación de las capacidades, en Antología de la psicología pedagógica y de las edades, Editorial Pueblo y Educación, La Habana. .

Leontiev, A. N (1982): Actividad, Conciencia y Personalidad.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación, p.249.

\_\_\_\_\_ (1979): La actividad en la psicología.- La Habana: Ed. MINED, autorizado por CENDA,p. 64 .

Lorente, G. (1977):Matemática.Décimo grado.Orientaciones metodológicas. La Habana.Editorial Pueblo y Educación.

Manual para la Dirección del Proceso Docente Educativo en las EMCC (2001).Dirección de Cuadros del MINFAR.Centro de Información para la Defensa.LaHabana.

Material base, Tema 3(2005):Nociones de estadística aplicada a la investigación educativa.Material en soporte digital.IPLAC,La Habana ..

Majmutov, M. I(1983): La enseñanza Problémica.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación, Capítulos V, VI, VII.

Márquez, A (1993): Habilidades. Proposiciones para su evaluación. I.S.P. "Frank País" Santiago de Cuba, 14P.

MINED (1997) Programa Director de la Matemática, material impreso, La Habana.

MINED (1989) Lineamientos generales para la enseñanza de la Matemática, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

MINED (1989) Programa de Matemática para el 10. grado, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Muller, Horst (1987): El programa heurístico general para la resolución de ejercicios, en Boletín Sociedad Cubana de Matemática, n-9, La Habana.

Muñoz Baños, F.(1985):Ejercitando en la enseñanza de la Matemática Pueblo y Educación,59,39-49.

Nocedo de León (2001): Metodología de la investigación educativa. Segunda parte. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Orellana Pérez, Ela y Cuello G, S (2000): Nuevo enfoque para obtener procedimientos algorítmicos en la Matemática escolar.Revista Pedagogía y Sociedad. ISP.Silverio Blanco.Nov.

Petrovski, A (1978): Psicología General.La Habana.Editorial Pueblo y Educación.

Petrovski, A. V (1982): Psicología General.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación, p.240-365.

Rebollar Morate, A (2000): ¿Cómo dirigir el proceso de formación de habilidades de la Matemática? Curso 62.La Habana.

Rico Montero, Pilar (1996): Reflexión y aprendizaje en el aula.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación, p.51.

Rico, P (2003): La zona de desarrollo próximo. Procedimientos y tareas de aprendizaje, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Rodríguez Palacios, Albarina (1989): Consideraciones teóricas y metodológicas sobre el principio de la relación intermateria a través de los nexos de conceptos I.S.P."Félix Varela".- Villa Clara. Material mimeografiado.

Rojas, R (1993): La metodología de la investigación P7-10.- En revista Pistas Educativas.- No.60- México, mar-may.

Rosental, M. N (1981): Desarrollo del pensamiento en el escolar.- La Habana: Ed. Política.

Rubinstein, S. L. (1966): Psicología del pensamiento .Editora universitaria. La Habana.

Santos Marín, Norma (1992): Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la Matemática de las ciencias técnicas. Tesis de grado. Universidad Central de las Villas.

Silvestre M. y J. Zilberstein (2002): Hacia una Didáctica desarrolladora. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.

Silvestre Oramas, Margarita (1999): Aprendizaje, Educación y Desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Skardakov, M. N (1978): Desarrollo del pensamiento en el escolar.- La Habana: Ed. Libros para la Educación, p.284.

Suárez, C (1993): Fundamentos Psicológicos del Proceso Docente – Educativo. Monografía. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran”. Universidad de Oriente.

Smirnov, A. N (1961): Psicología... [Et-al].- La Habana: imprenta Nacional, p. 559.

Talizina, Nina F (1987): La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares. Universidad de la Habana. MES.

\_\_\_\_\_ (1982): Procedimientos esenciales del pensamiento lógico.- La Habana. MES.

\_\_\_\_\_ (1988): Psicología de la enseñanza.- Moscú: ED. Progreso, p. 365.

Torres, P. (2000): La instrucción heurística de las Matemáticas escolares, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, Ciudad de La Habana.

Torres, Paúl (1986): El método heurístico en la enseñanza general, en Revista Educación, n-60, La Habana, enero-marzo, p p.114-120.

Valdés (2005): Sistema de tareas docentes con enfoque interdisciplinario para la formación laboral de los alumnos en la secundaria básica. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas.

Vigostki, L.S. (1981): Psicología General .La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Vigostky, Lev. S (1982): Pensamiento y lenguaje.- La Habana: Ed. Pueblo y Educación, p. 38-54.

Shuroriev, V. I (1990): La vinculación de la Psicología con las demás ramas del conocimiento cinético.- P.105.- En Revista Sapietskaia Pedagógica.- No.4.- Moscú.

Zilberstein, J (2000): Aprendizaje, enseñanza y desarrollo, en ¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje? de M. Silvestre y J.Zilberstein, Ediciones CEIDE, México.

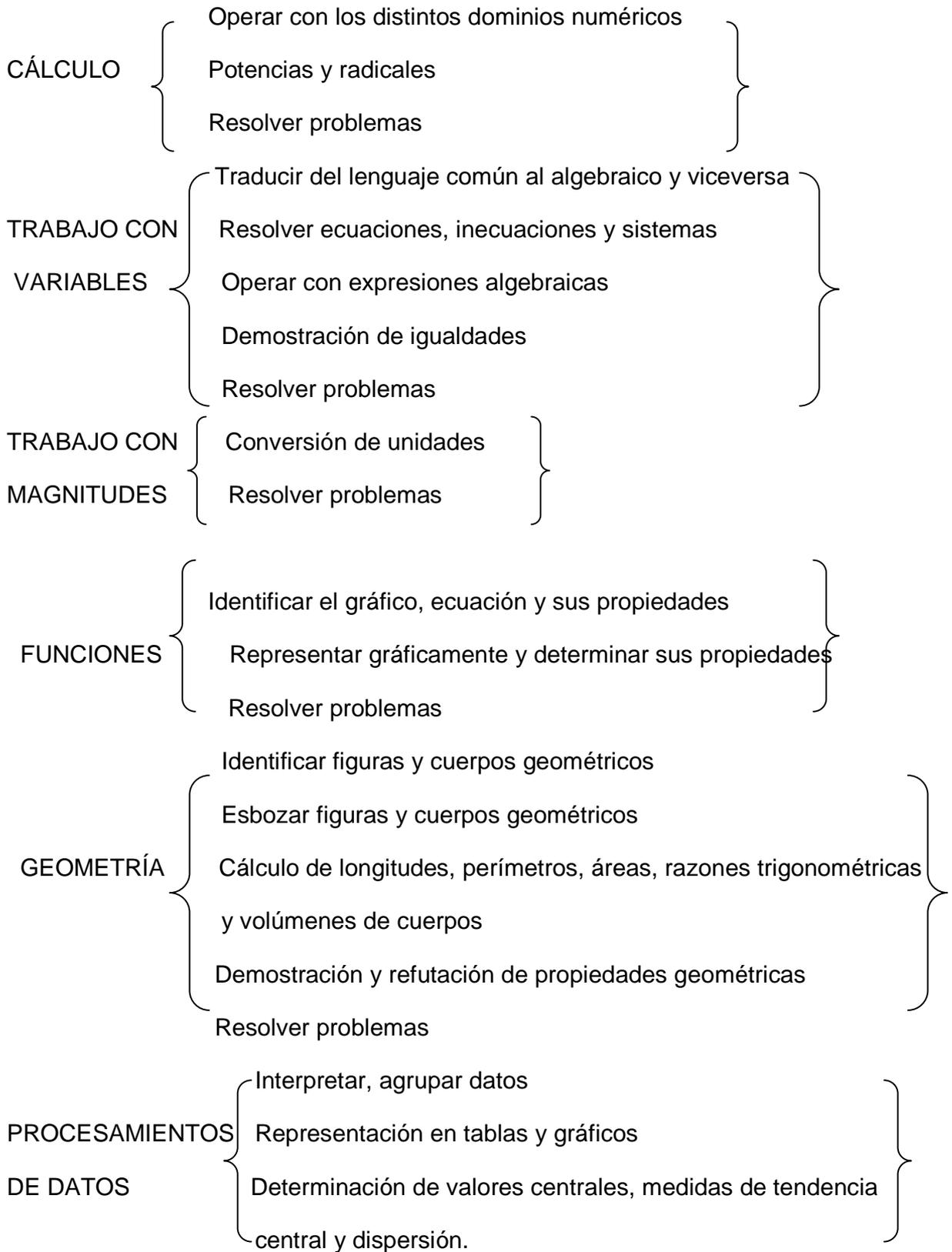
Zilberstein, J (1997): A debate...Problemas actuales del aprendizaje escolar ¿Enseñamos a los alumnos a reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje?, en revista Desafío escolar, Revista Iberoamericana de Pedagogía, noviembre-diciembre.

Zilberstein J. y R. Pórtela (2002): Una concepción desarrolladora de la motivación y el aprendizaje de las ciencias (ponencia), IPLAC, La Habana.

Zillmer, W. (1990): Complementos de metodología de la enseñanza de la matemática, editorial Pueblo y Educación, La Habana.

## ANEXO 1:

### LOS DOMINIOS COGNITIVOS A TRAVÉS DEL PROGRAMA DE DÉCIMO GRADO.



**Anexo 6: Caracterización de los niveles de formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales.**

| B   | M   | A  |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- No identifica el cálculo</li> <li>- No conoce todos los conceptos y propiedades</li> <li>- Hay errores en la selección de la regla</li> <li>- Cálculo no correcto</li> <li>- No hace comprobaciones</li> <li>- No hace valoraciones</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identifica</li> <li>- Identifica conceptos y propiedades</li> <li>- No puede seleccionar la regla de cálculo</li> <li>- Calcula manifestando inseguridad, algún error de cálculo y emplea más tiempo que el necesario</li> <li>- No llega a comprobar</li> <li>- No hace valoraciones</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identifica</li> <li>- Identifica conceptos y propiedades asociadas</li> <li>- Selecciona la regla</li> <li>- Calcula con seguridad, exactitud y rapidez</li> <li>- Comprueba el resultado</li> <li>- Hace valoraciones de los resultados</li> </ul> |

## **Anexo 2: Guía de observación al desempeño durante una clase de cálculo.**

**Objetivos:** Valorar el desempeño de los alumnos en el desarrollo de habilidades de cálculos aritméticos, algebraicos y con radicales.

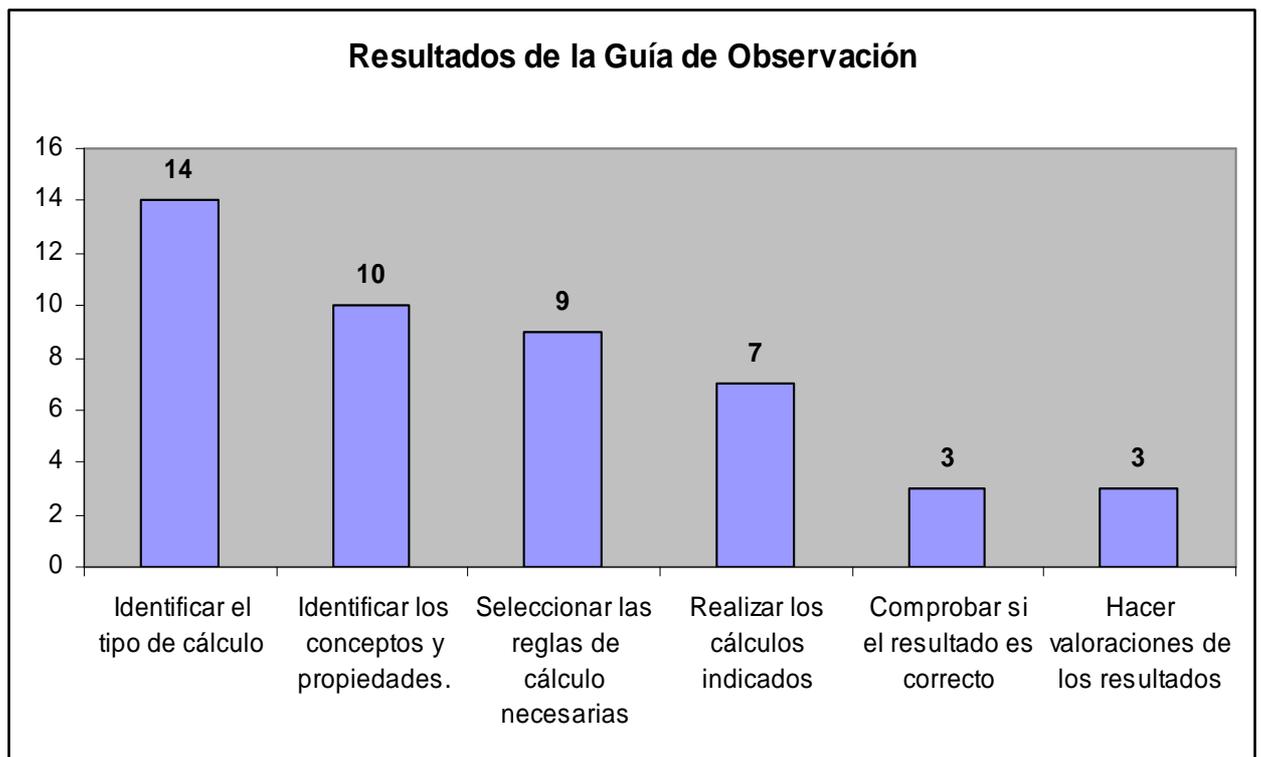
### **Aspectos a observar**

1. Identifique el tipo de cálculo a realizar \_\_\_\_
2. Identifica: Conceptos \_\_\_\_  
Propiedades \_\_\_\_
3. Puedes seleccionar sin ayuda de las reglas de cálculo necesario.
4. Realización del cálculo.  
Correcto \_\_\_\_  
Seguro \_\_\_\_  
Rápido \_\_\_\_
5. Comprueba si el resultado es correcto \_\_\_\_
6. Hace valoración sobre lo logrado \_\_\_\_

### Anexo 3: Tabulación de los resultados de la guía de observación al desempeño durante una clase de cálculo aritmético y/o algebraico.

**Objetivos:** Valorar el desempeño de los alumnos en el desarrollo de habilidades de cálculo aritmético y/o algebraico.

| Resultados de guía de observación            |    |     |
|--|----|-----|
| Identificar el tipo de cálculo               | 14 | 50% |
| Identificar los conceptos y propiedades.     | 10 | 36% |
| Seleccionar las reglas de cálculo necesarias | 9  | 32% |
| Realizar los cálculos indicados              | 7  | 25% |
| Comprobar si el resultado es correcto        | 3  | 11% |
| Hacer valoraciones de los resultados         | 3  | 11% |



**ANEXO 5: Examen de ingreso a las EMCC. Curso 2003-2004 y tabulación de los resultados.**

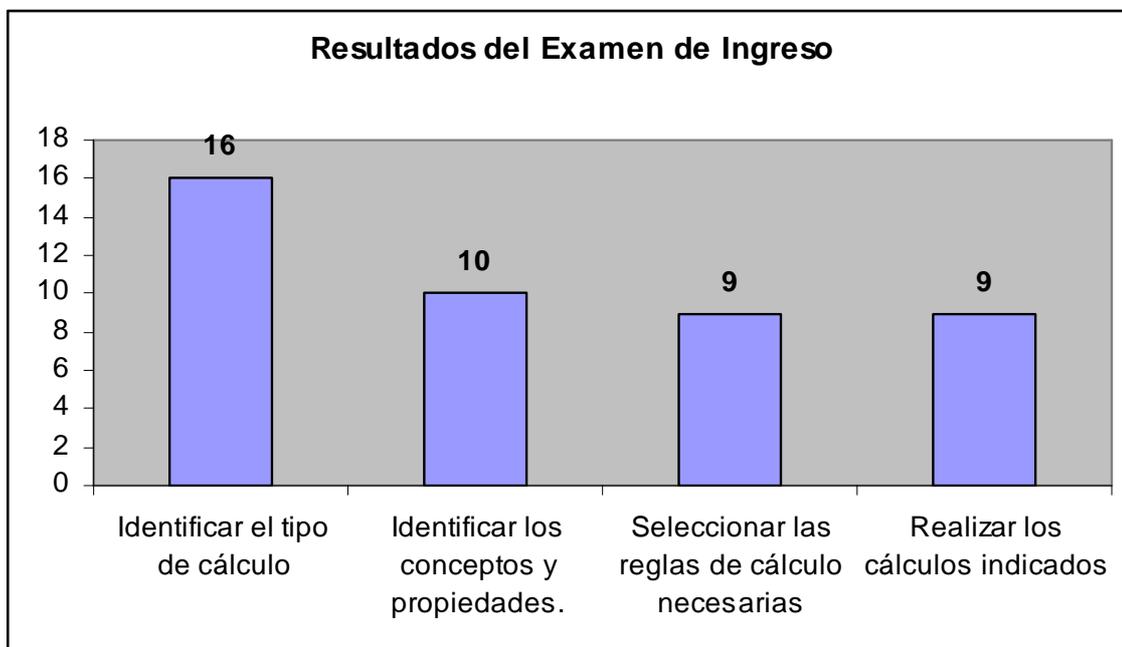
**Objetivo:** Cálculo aritmético y algebraico.

**Pregunta 1.**

Sean  $m = 1,54 : 0,7 - \sqrt[3]{64}$  y  $n = 0,8 - \frac{11}{15}$

- a) Calcule los valores numéricos de m y n.
- b) Escriba dos números racionales que estén entre m y n.

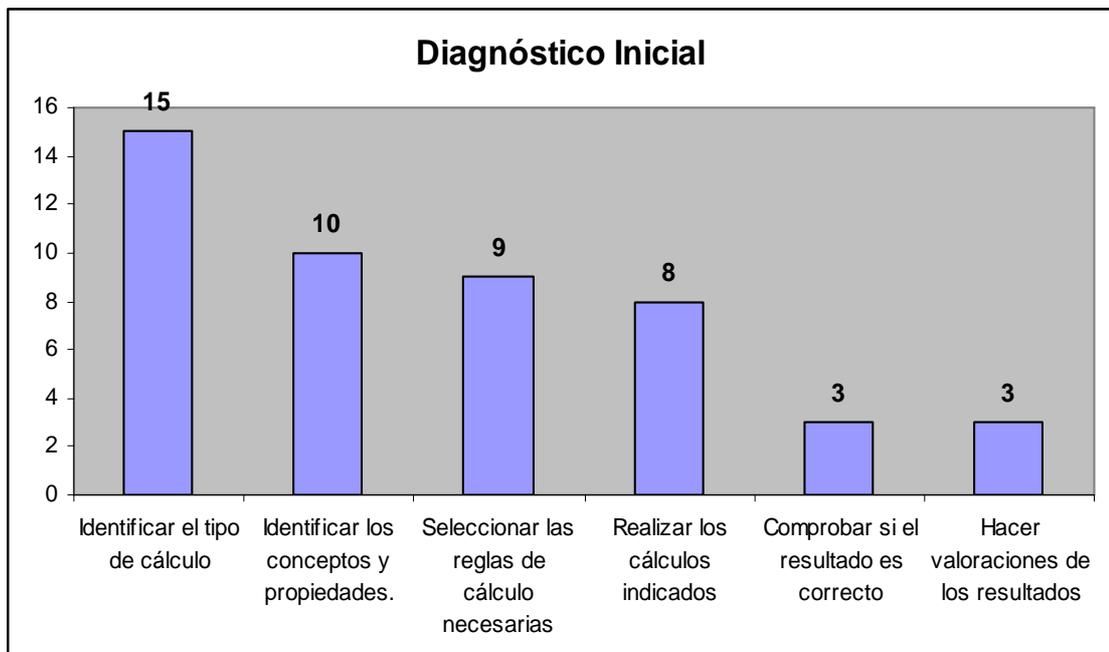
| <b>Resultados del Examen de Ingreso</b>      |    |     |
|--|----|-----|
| Identificar el tipo de cálculo               | 16 | 57% |
| Identificar los conceptos y propiedades.     | 10 | 39% |
| Seleccionar las reglas de cálculo necesarias | 9  | 32% |
| Realizar los cálculos indicados              | 9  | 32% |



## Anexo 5:

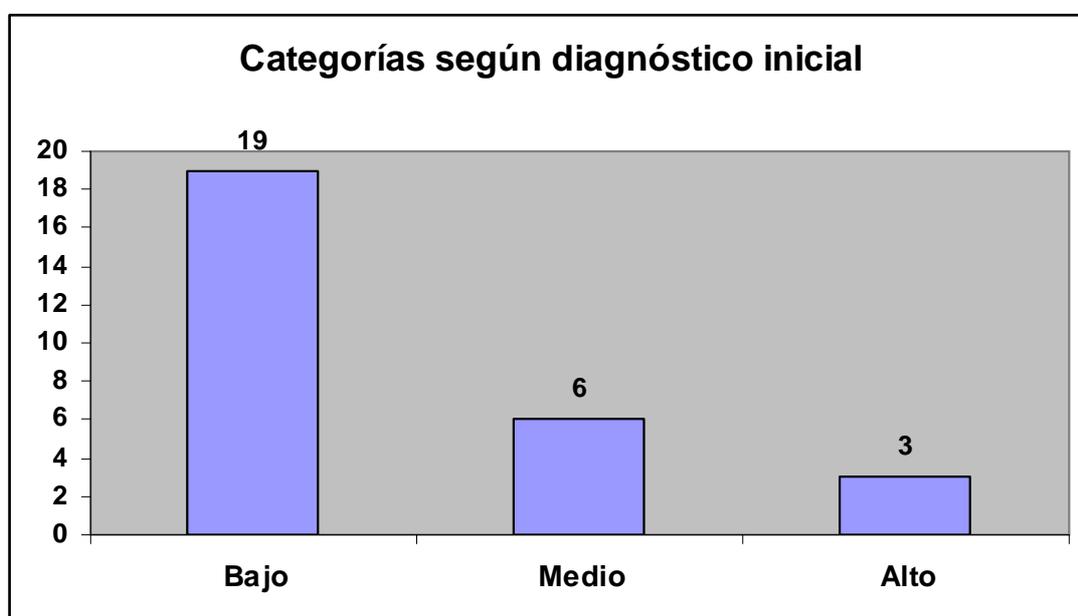
Resultados del diagnóstico inicial (prueba de ingreso y observación al desempeño de los alumnos).

| Diagnóstico inicial                          |               |    |
|--|---------------|----|
| Indicadores                                  | Cdad. Alumnos | %  |
| Identificar el tipo de cálculo               | 15            | 54 |
| Identificar los conceptos y propiedades.     | 10            | 36 |
| Seleccionar las reglas de cálculo necesarias | 9             | 32 |
| Realizar los cálculos indicados              | 8             | 29 |
| Comprobar si el resultado es correcto        | 3             | 11 |
| Hacer valoraciones de los resultados         | 3             | 11 |



**Anexo7: Tabla de frecuencia y gráfico según las categorías en el diagnóstico inicial**

| <b>Categoría</b> | <b>Cdad Alumnos</b> | <b>%</b>   |
|------------------|---------------------|------------|
| <b>Bajo</b>      | <b>19</b>           | <b>68</b>  |
| <b>Medio</b>     | <b>6</b>            | <b>21</b>  |
| <b>Alto</b>      | <b>3</b>            | <b>11</b>  |
| <b>Total</b>     | <b>28</b>           | <b>100</b> |



## Anexo 9: 1. Trabajo de Control. Curso 2004-2005 y tabulación de los resultados.

**Objetivo:** Calcular aplicando propiedades de los radicales.

**B/A**

**B/B**

Calcule y simplifique.

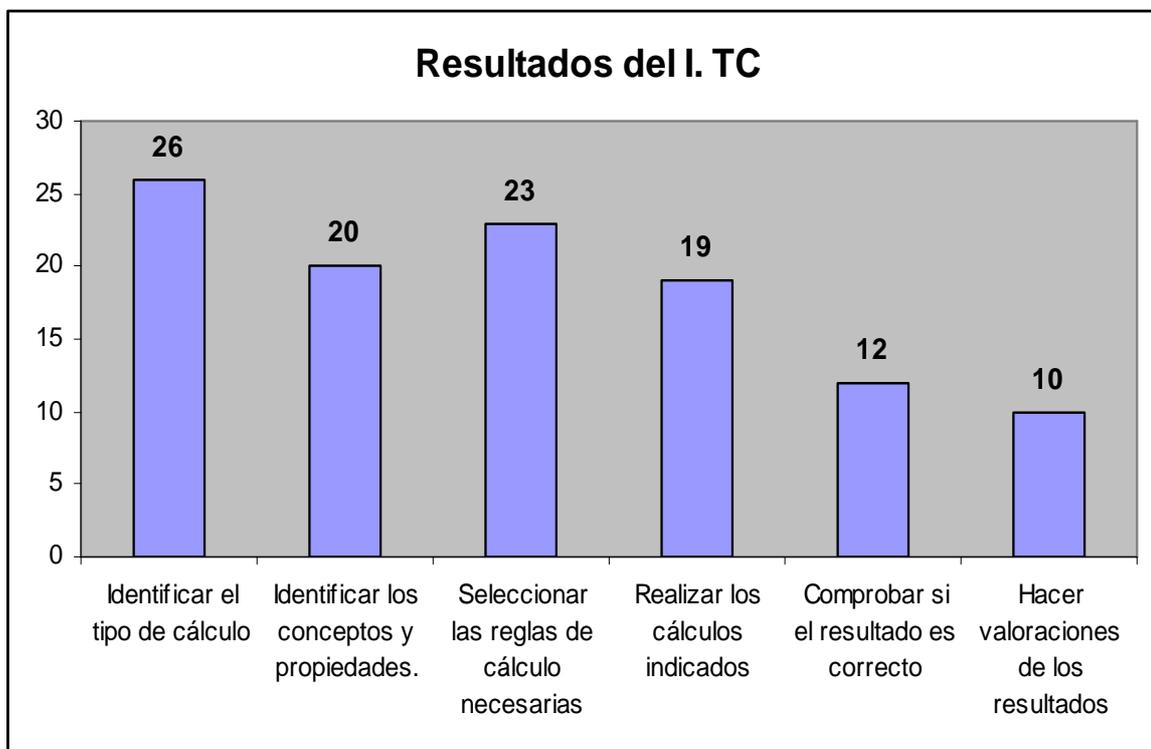
a)  $3\sqrt{18} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt[6]{8}$

a)  $4\sqrt{20} - 3\sqrt{2} + \sqrt[6]{125}$

b)  $\frac{8}{2 + \sqrt{2}}$

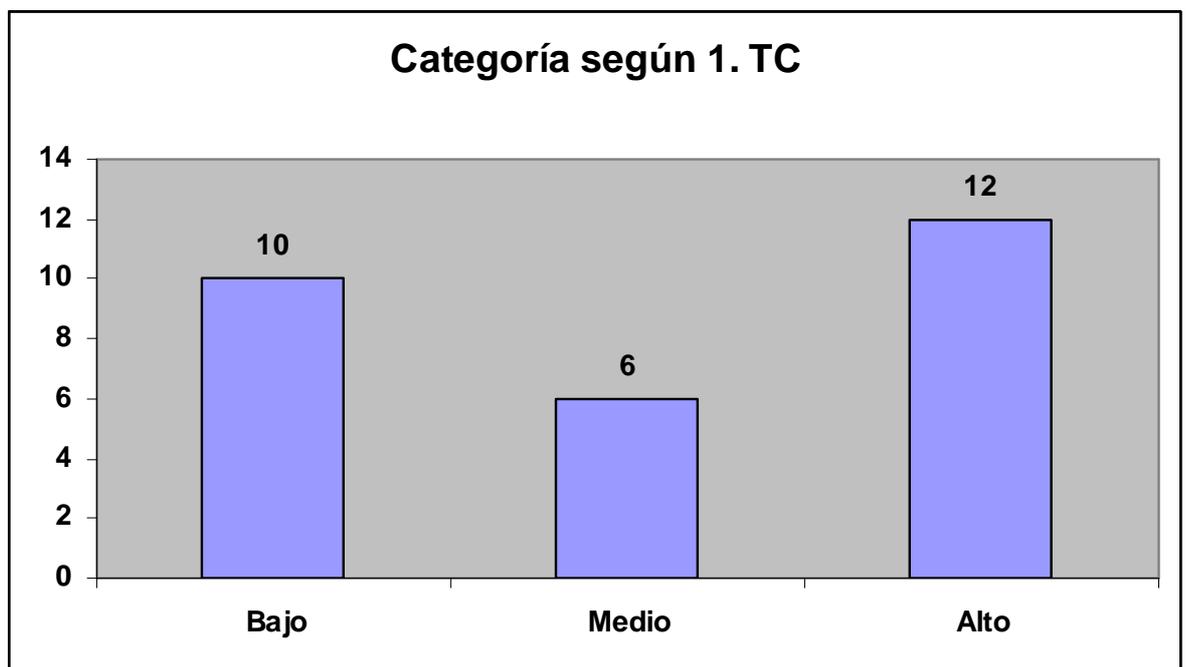
b)  $\frac{6}{\sqrt{3} + 1}$

| Resultados del I. TC                         |    |     |
|--|----|-----|
| Identificar el tipo de cálculo               | 26 | 93% |
| Identificar los conceptos y propiedades.     | 20 | 71% |
| Seleccionar las reglas de cálculo necesarias | 23 | 82% |
| Realizar los cálculos indicados              | 19 | 69% |
| Comprobar si el resultado es correcto        | 12 | 43% |
| Hacer valoraciones de los resultados         | 10 | 36% |



## Anexo 10: Tabla de frecuencia y gráfico según las categorías en el 1. TC

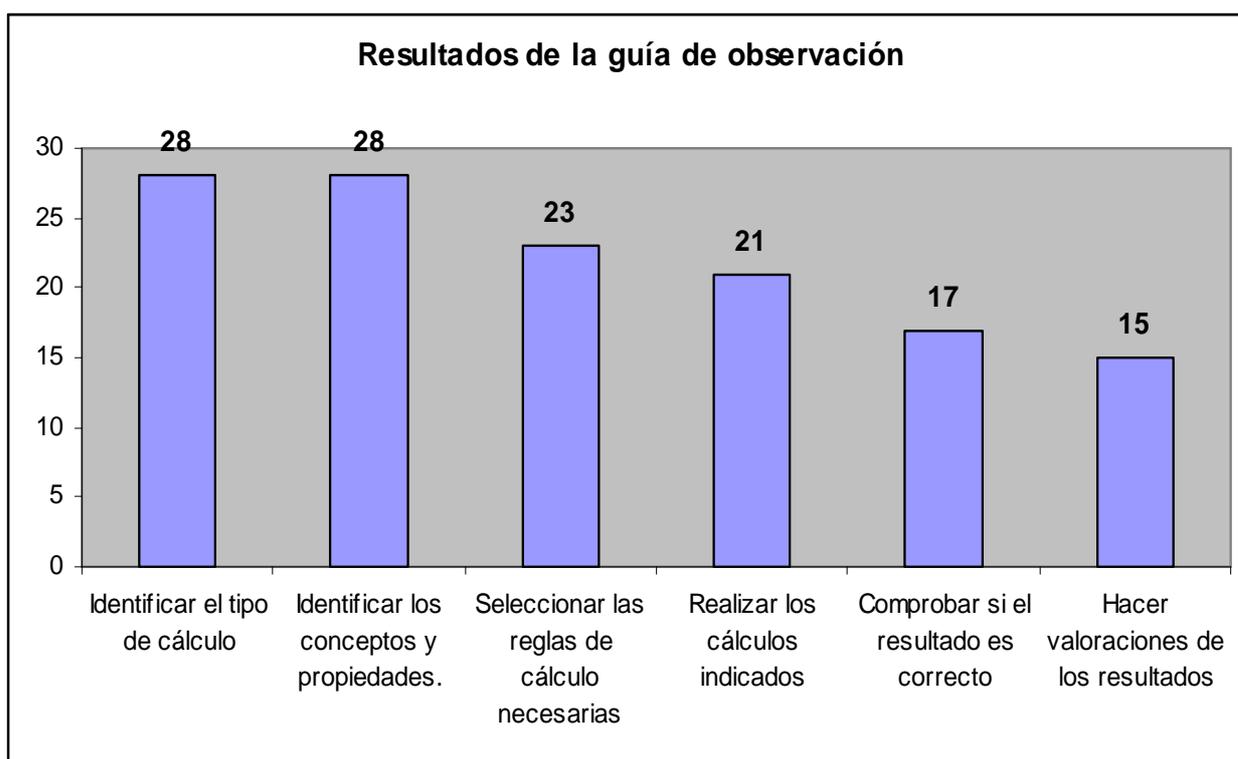
| Categoría | Total | %  |
|-----------|-------|----|
| Bajo      | 10    | 36 |
| Medio     | 6     | 21 |
| Alto      | 12    | 43 |



## ANEXO 11: Tabulación de los resultados de la guía de observación al desempeño durante una clase de cálculo con radicales.

**Objetivos:** Valorar el desempeño de los alumnos en el desarrollo de habilidades de cálculo con radicales.

| Resultados de la observación.                |    |      |
|--|----|------|
| Identificar el tipo de cálculo               | 28 | 100% |
| Identificar los conceptos y propiedades.     | 28 | 100% |
| Seleccionar las reglas de cálculo necesarias | 23 | 82%  |
| Realizar los cálculos indicados              | 21 | 75%  |
| Comprobar si el resultado es correcto        | 17 | 61%  |
| Hacer valoraciones de los resultados         | 15 | 54%  |

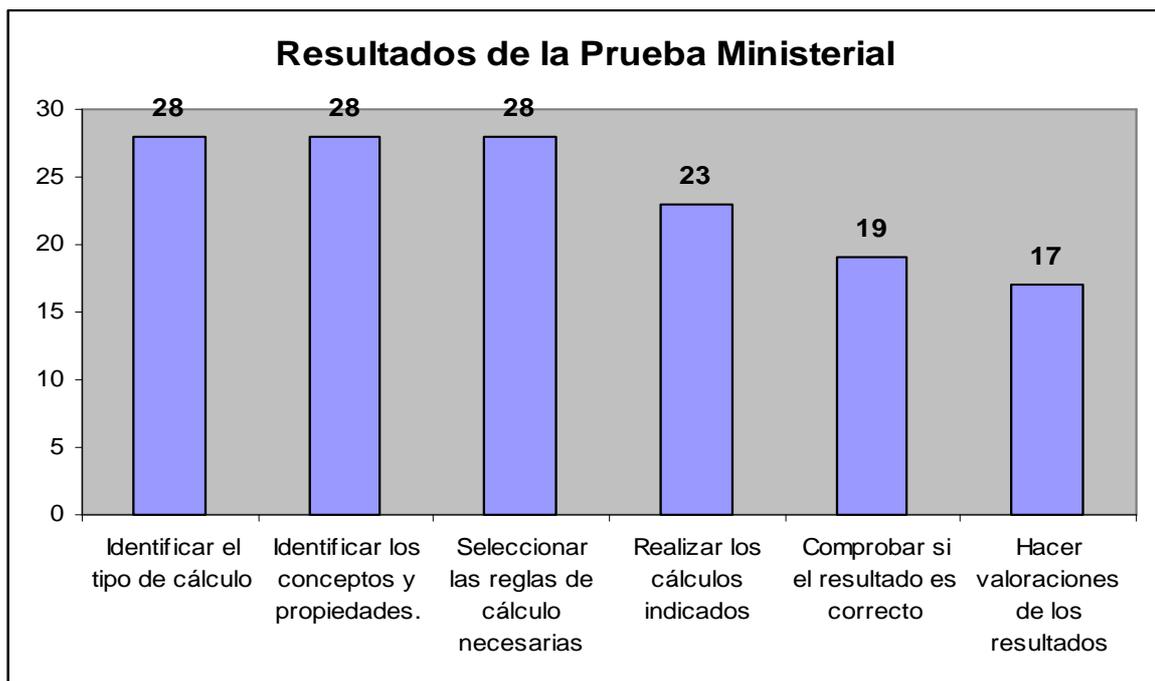


## Anexo 12: Prueba Final Nacional de Matemática. Décimo grado. Curso 2006-2007.

**Objetivo:** Calcular aplicando propiedades de los radicales.

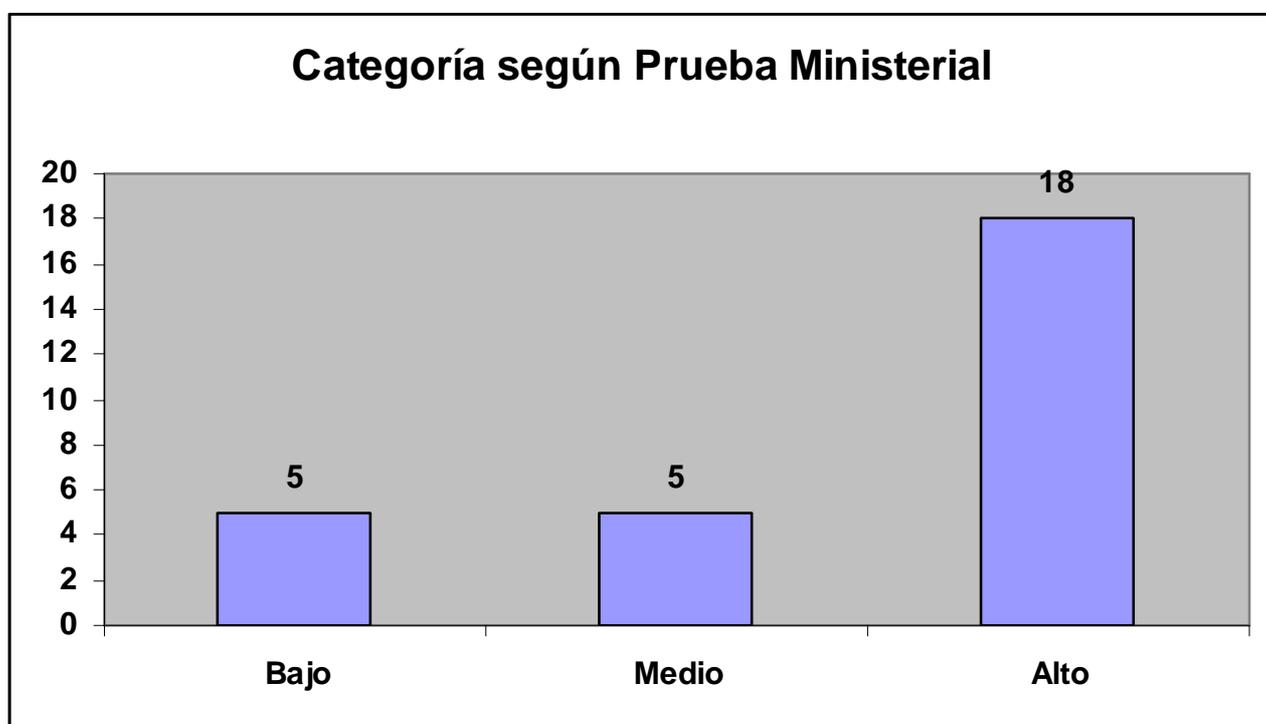
b) Verifique que  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12}}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}$  es un número entero.

| Resultados de Prueba Ministerial             |    |      |
|--|----|------|
| Identificar el tipo de cálculo               | 28 | 100% |
| Identificar los conceptos y propiedades.     | 28 | 100% |
| Seleccionar las reglas de cálculo necesarias | 28 | 100% |
| Realizar los cálculos indicados              | 23 | 82%  |
| Comprobar si el resultado es correcto        | 19 | 68%  |
| Hacer valoraciones de los resultados         | 17 | 61%  |



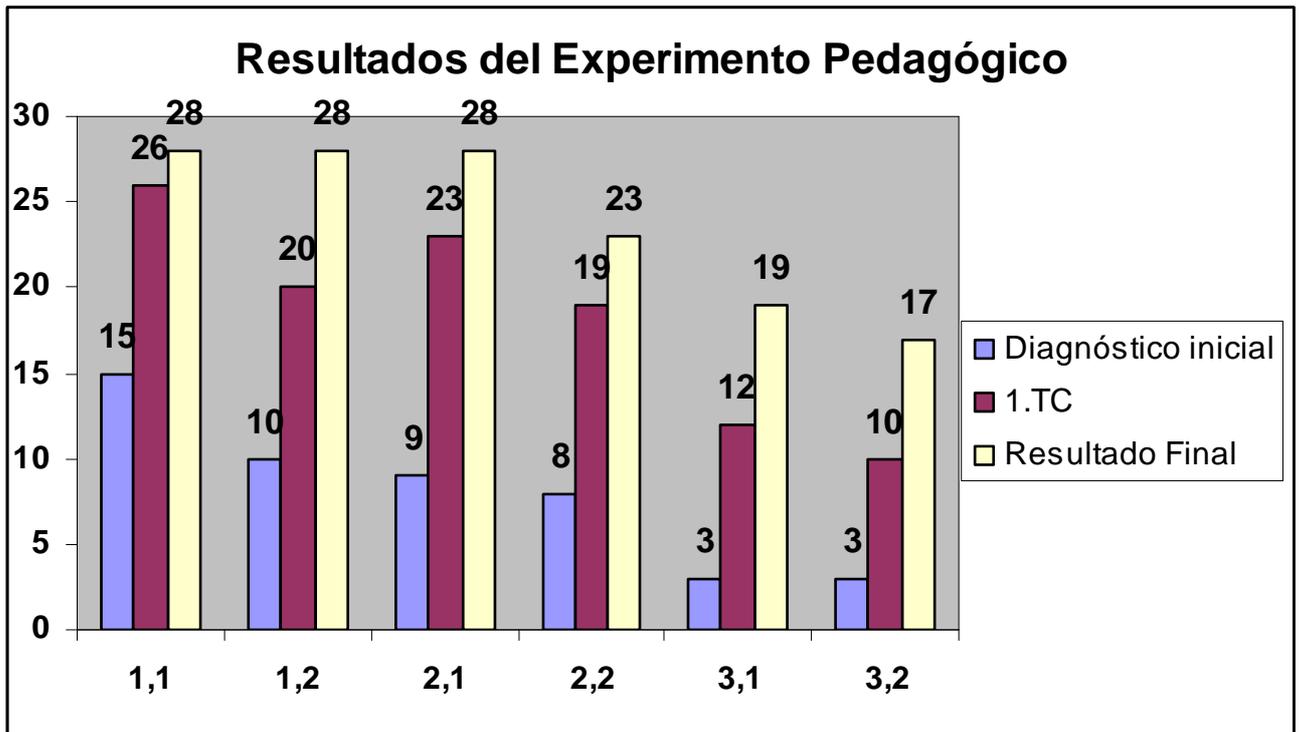
**Anexo13: Tabla de frecuencia y gráfico según las categorías en la Prueba Ministerial.**

| <b>Categoría</b> | <b>Total</b> | <b>%</b>  |
|------------------|--------------|-----------|
| <b>Bajo</b>      | <b>5</b>     | <b>18</b> |
| <b>Medio</b>     | <b>5</b>     | <b>18</b> |
| <b>Alto</b>      | <b>18</b>    | <b>64</b> |



## Anexo 14: Resultados del experimento pedagógico.

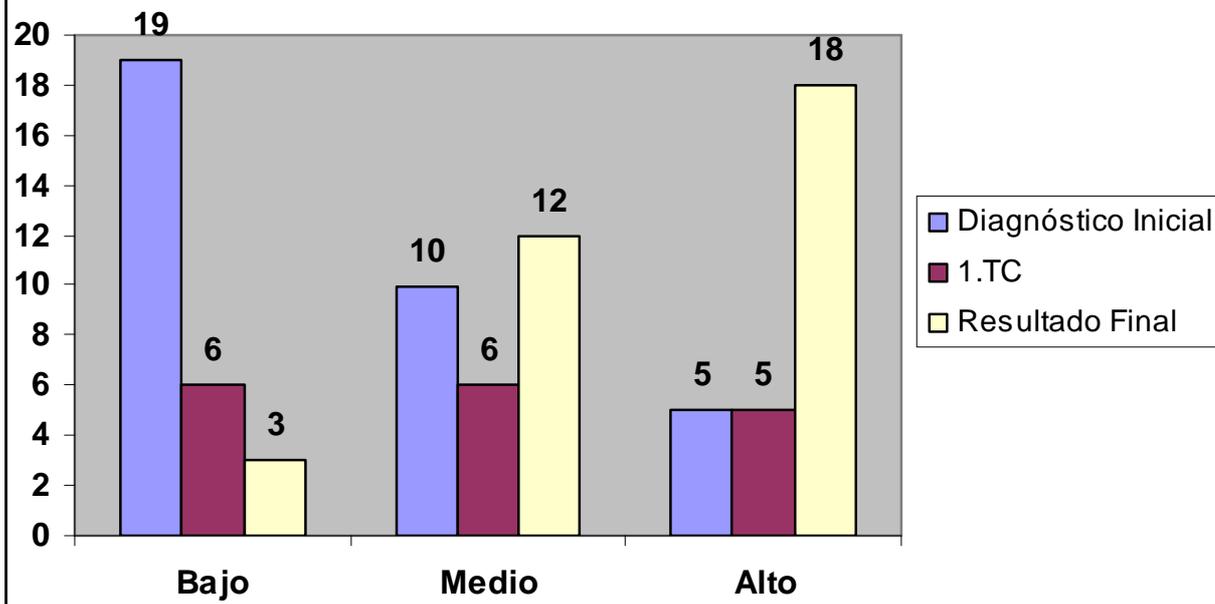
| Dimensiones | Indicadores | Diagnóstico inicial | 1.T.C(intermedio) | Resultado Final | Diferencia Rf-Ri |
|-------------|-------------|---------------------|-------------------|-----------------|------------------|
| 1           | 1,1         | 15                  | 26                | 28              | 11               |
|             | 1,2         | 10                  | 20                | 28              | 10               |
| 2           | 2,1         | 9                   | 23                | 28              | 19               |
|             | 2,2         | 8                   | 19                | 23              | 15               |
| 3           | 3,1         | 3                   | 12                | 19              | 16               |
|             | 3,2         | 3                   | 10                | 17              | 14               |



**Anexo15: Tabla de frecuencia y gráfico según el Experimento Pedagógico.**

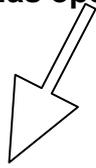
| Categoría | Diagnóstico inicial | 1.T.Control | Resultado final | Diferencia Rf-Ri |
|-----------|---------------------|-------------|-----------------|------------------|
| Bajo      | 19                  | 10          | 5               | -11              |
| Medio     | 6                   | 6           | 5               | -1               |
| Alto      | 3                   | 12          | 18              | 15               |

### Categorías según Experimento Pedagógico



## ANEXO 8: Procedimientos generalizados para realizar operaciones con radicales.

Para realizar las operaciones con radicales debes tener en cuenta que:



En la adición y sustracción los radicales tienen que ser semejantes. Para ello es necesario en ocasiones extraer o introducir factores en el radicando y simplificar o ampliar el índice del radical para obtener radicales semejantes

Ejemplo:

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{3} + \sqrt{3^3} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$



Además debes tener presente las siguientes propiedades:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \quad \text{propiedades:}$$



En la multiplicación y división los índices tienen que ser iguales. Para esto se aplican las propiedades.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}; b \neq 0$$

Ejemplos:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{8} : \sqrt{4} = \sqrt{8 : 4} = \sqrt{2}$$

Si los índices no son iguales se transforma a uno común aplicando la propiedad:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}, \text{ o sea, determina el mcm entre los índices. Ejemplos:}$$

mcm entre los índices. Ejemplos:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} \quad \text{mcm}(2;3)=6$$

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}$$

$$\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{72}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$