

**UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS**  
**CAPITÁN “SILVERIO BLANCO NÚÑEZ”**  
**SANCTI SPÍRITUS**

TESIS EN OPCIÓN AL GRADO ACADÉMICO DE MASTER EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.

**MENCIÓN EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIO**

**EL DESEMPEÑO DE LOS ALUMNOS Y ALUMNAS DE PREUNIVERSITARIO  
ANTE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS**

**Autor:** Lic. Carlos Félix Cuevas Jiménez.

**2012**

**UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS**  
**CAPITÁN “SILVERIO BLANCO NÚÑEZ”**  
**SANCTI SPÍRITUS**

TESIS EN OPCIÓN AL GRADO ACADÉMICO DE MASTER EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.

**MENCIÓN EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIO**

**EL DESEMPEÑO DE LOS ALUMNOS Y ALUMNAS DE PREUNIVERSITARIO  
ANTE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS**

**Autor:** Lic. Carlos Félix Cuevas Jiménez.

**Tutor.** Dr C. Úrsula Cristina Pomares Ortega.

MS c. Osvaldo Tardío Ruedas.

**2012**



**“Un futuro incomparablemente superior al de hoy depende por entero del éxito que la revolución tenga educando a la nueva generación”**

**Fidel Castro Ruz.**

## **Dedicatoria**

- ❖ **A mis alumnas y alumnos, porque para ellos trabajamos.**

## **Agradecimientos**

- ❖ **A mis tutoras, la Dr.C. Ursula Cristina Pomares Ortega y a la MS.c Osvaldo Tardío Ruedas por la ayuda y apoyo incondicional brindado.**
- ❖ **A la MS.c Nora Isabel Rodríguez Márquez y a la MS.c Caridad Bécquer Muñoz, por su gran colaboración.**
- ❖ **A mis padres por haberme guiado por el camino correcto.**
- ❖ **A mi esposa por su paciencia y comprensión.**

## **SINTESIS**

La tesis tiene como título, el desempeño de los alumnos y alumnas de preuniversitario ante la resolución de ecuaciones trigonométricas, para favorecer la solución de las principales dificultades en la resolución de ecuaciones trigonométricas se propone como objetivo de esta investigación: aplicar actividades docentes que contribuyan a que los alumnos y alumnas de 11. grado del IPU Frank País García del municipio Trinidad puedan resolver ecuaciones trigonométricas. El tema es de gran actualidad, pues se inserta en la línea temática: principales problemas del aprendizaje en los distintos niveles educativos específicamente en la Educación Preuniversitaria. Se emplearon métodos del nivel teórico: análisis y síntesis, inducción y deducción, histórico y lógico. Del nivel empírico: la observación pedagógica, entrevista, prueba pedagógica y el pre-experimento. Del nivel matemático-estadístico: procedimientos de la estadística descriptiva (tablas de frecuencias). Los resultados del pre-experimento demostraron la efectividad de la propuesta de ejercicios para contribuir al desarrollo de habilidades en el trabajo con la resolución de ecuaciones en estudiantes de once grado.

## Indice

<b>INTRODUCCIÓN:</b> .....	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1: CONCEPCIONES TEÓRICAS QUE SUSTENTAN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA Y LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN ONCENO GRADO</b> .....	
<b>1.1 El estudiante de la Enseñanza Media Superior. Comportamiento de sus habilidades cognitivas</b> .....	<b>8</b>
<b>1.2 . La Matemática, una potencialidad para contribuir al desarrollo del pensamiento</b> .....	<b>10</b>
<b>1.3. La efectividad en el tratamiento de la trigonometría en el preuniversitario</b> .....	<b>16</b>
1.4. La enseñanza de la trigonometría desde una perspectiva desarrolladora.....	28
<b>CAPÍTULO 2: ACTIVIDADES DOCENTES PARA CONTRIBUIR A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS, FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA Y RESULTADOS ANTES, DURANTE Y DESPUÉS DE APLICADA LA PROPUESTA</b> .....	
....	<b>31</b>
<b>2.1 Resultados del diagnóstico inicial</b> .....	<b>31</b>
<b>2.2 Fundamentos que avalan las actividades docentes propuestas.</b> .....	<b>32</b>
<b>2.3 Propuestas de actividades docentes</b> .....	<b>37</b>
<b>2.4 Constatación final. Resultados.</b> .....	<b>43</b>
<b>CONCLUSIONES:</b> .....	<b>46</b>
<b>RECOMENDACIONES.</b> .....	<b>47</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>48</b>
<b>ANEXOS</b> .....	

## INTRODUCCIÓN

La sociedad cubana está inmersa en la Batalla de Ideas con el propósito de que en los primeros diez años de este siglo todo el pueblo alcance una Cultura General Integral, la que plantea a la educación enormes desafíos. El Sistema Nacional de Educación protagoniza una profunda Revolución Educativa que despliega a todos los ciudadanos aprendizajes de calidad a lo largo de toda la vida.

Los cambios que se producen en la educación cubana exigen la formación del hombre nuevo sobre la base de los principios marxistas-leninistas y le presta especial atención al logro de su finalidad esencial: el desarrollo multilateral y armónico de la personalidad de las nuevas generaciones.

Desarrollo multilateral y armónico que reclama el despliegue de las potencialidades creadoras de todas las fuerzas y sectores sociales, destacando la relación de la educación con la ciencia, la tecnología y la sociedad de forma tal que contribuyan al progreso social en medio de los constantes cambios que impera la sociedad, para lograr un equilibrio entre la formación científico-técnica y el pleno desarrollo espiritual del hombre. (Ballester, S. 1997: 42)

Constituyendo dicho equilibrio un propósito esencial de la política educativa cubana mediante la conjunción integral de una educación intelectual, científico-técnica, política ideológica, física, moral, estética, politécnico-laboral y patriótico-militar.

Como parte de la educación intelectual se concibe, en el sistema de educación dentro de los programas de los diferentes niveles de educación, el aprendizaje de la Matemática como asignatura, ocupando un lugar primordial la de preuniversitario, puesto que es a este nivel que las alumnas y alumnos muestran los niveles de desempeño alcanzados.

En el desarrollo del programa de octavo grado en el preuniversitario, se estudia la unidad Ecuaciones y funciones trigonométricas. Esta unidad juega un papel central en el estudio de las Matemáticas en la escuela; en efecto es en esta unidad, donde se amplían las razones trigonométricas a ángulos cualesquiera y se introducen las funciones trigonométricas, además se introducen y fijan las operaciones básicas que conforman las habilidades de cálculo trigonométrico; es donde se desarrollan las habilidades en la resolución



de ecuaciones trigonométricas y donde se hace un aporte al desarrollo de la capacidad de demostración de los alumnos mediante el tratamiento de las identidades trigonométricas.

Lo antes expuesto permite afirmar que dominar el trabajo con las ecuaciones trigonométricas a través de actividades variadas y amenas, facilita el desarrollo de habilidades en torno al cálculo trigonométrico con lo que se contribuye a profundizar y estimular el interés por el conocimiento de una de las líneas directrices en la matemática que se estudia en el preuniversitario.

El conocimiento de las ecuaciones trigonométricas permite acercarse al tercer nivel de desempeño puesto que las alumnas y los alumnos de manera creativa desarrollan la capacidad de demostración y la convierten en una habilidad, pudiéndose extrapolar este desarrollo a la solución de situaciones de la vida diaria.

Se requiere entonces de contribuir a la resolución de las ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos, para que se apropien de conocimientos sólidos sobre este contenido y ayudarse desde esta arista a la formación integral de bachilleres.

En este sentido y durante la revisión bibliográfica realizada, se consultaron diferentes trabajos donde se aborda la enseñanza de la Matemática en la formación integral de los bachilleres, tales como: (Abreu, 2003); (Ferrer, 1999), (González, 2005), (Pérez, 2008), (Ruíz, 2007) y (Santana, 1999), estos investigadores señalan la urgencia de brindarle tratamiento al conocimiento de la asignatura Matemática para un buen desempeño.

Se coincide con estos investigadores al considerarse que este conocimiento debe constituir un elemento importante, se tiene el criterio que se debe iniciar desde la enseñanza primaria, y sin embargo, no existe hasta donde ha sido posible la búsqueda ninguna investigación sobre el tema dirigido a las ecuaciones trigonométricas en el preuniversitario, en la forma de presentación de las actividades por el autor; por lo que hay falta de conocimiento en las alumnas y los alumnos.

En la actualidad este tema reviste importancia por la vigencia que tiene la enseñanza de la matemática, abordándose en este, una línea directriz de la

asignatura (resolución de ecuaciones) y dentro de estas las trigonométricas. Los contenidos teóricos y prácticos expuestos en él contribuyen a enseñar como resolver ecuaciones de este tipo permitiendo incrementar la formación integral de los estudiantes en cuanto a: adquisición de conocimientos, habilidades, valores, actitudes y sentimientos, lo cual permite a las alumnas y los alumnos un nivel de integralidad, que los hace aptos para enfrentar cualquier situación en la vida, logrando con esto el fin de la educación.

En la sistematización de la práctica educativa y basado en los 6 años de experiencia del autor, en diferentes enseñanzas con mayor incidencia en la Enseñanza Media Superior, en lo referido al tratamiento de los contenidos de la trigonometría se detectó en los estudiantes del Instituto Preuniversitario Urbano "Frank País García" del municipio Trinidad.

- Poco dominio del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas.
- Poco dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.
- Poco dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función.
- Poco dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
- Poco dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.

En correspondencia con lo anteriormente expuesto se plantea el siguiente **problema científico**: ¿Cómo contribuir a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad?

En tal sentido se precisa como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática y el **campo de acción** la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Al respecto se traza como **objetivo**: Aplicar actividades docentes que contribuyan a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad.

Se plantean entonces las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cuáles son los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y la resolución de ecuaciones trigonométricas?
2. ¿Cuál es el estado real que presenta la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad?
3. ¿Qué características deben tener las actividades docentes que contribuyan a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad?
4. ¿Qué resultados se obtendrán con la aplicación práctica de las actividades docentes que contribuyan a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad?

Se plantearon las siguientes **tareas científicas**:

1. Determinación de los aspectos teóricos y metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y la resolución de ecuaciones trigonométricas.
2. Diagnóstico del estado real que presenta la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad.
3. Estructuración de las actividades docentes que contribuyan a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad.
4. Validación de la efectividad originada con la aplicación de las actividades docentes que contribuyan a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad.

Sobre la base de las exigencias del método materialista dialéctico se utilizaron los siguientes **métodos científicos**.

### **Del nivel teórico:**

**Analítico - sintético:** se aplica durante todo el trabajo, es decir tanto en la determinación de los antecedentes para posiciones teóricas, así como en la selección de los ejercicios para cada actividad docente.

**Inductivo - deductivo:** se aplicó durante todo el trabajo, pues este método permitió enriquecer la teoría ya conocida y además resolver los ejercicios propuestos por diferentes vías de solución.

**Histórico y Lógico:** se aplica en el desarrollo de todo el trabajo, lo histórico está relacionado con el estudio de cada la teoría ya existente sobre la resolución de ecuaciones trigonométricas y lo lógico permitió utilizar el procedimiento para determinar la solución de los ejercicios a resolver.

### **Del nivel empírico:**

**Observación pedagógica:** Se utilizó en el diagnóstico inicial, durante la investigación y en el diagnóstico final para constatar el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas en el desarrollo de las clases.

**Prueba pedagógica:** se aplicó una prueba inicial antes de aplicar las actividades docentes y otra después de aplicadas estas, con el objetivo de constatar el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

**El experimento Pedagógico:** (Pre - experimento): se utilizó el diseño con prueba al inicio y final en un solo grupo (G).

Consiste en aplicar una prueba (medición) al inicio ( $M_1$ ), después se le administra el tratamiento nuevo (actividades docentes) (T) y finalmente se le aplica una prueba ( $M_2$ ).

Esquema: G –  $M_1$  – T –  $M_2$ .

Del nivel **estadístico o matemático:** Tablas de distribución de frecuencia.

Se utilizaron para recolectar, organizar, resumir, presentar y analizar datos relativos al estado real del nivel de las alumnas y los alumnos del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

### **Población y muestra**

La población está compuesta por 30 alumnos del 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad.

Se tomó una muestra intencional conformada por los 30 alumnos del grupo 11. grado, de los cuales 12 son varones y 18 son hembras. Mantienen buena asistencia y puntualidad al centro. El 100% de las alumnas y los alumnos están aprobados en la asignatura por lo que vencen los objetivos concebidos en el programa para el grado pero les falta alcanzar un segundo y tercer nivel de desempeño en la resolución de ecuaciones trigonométricas. El rendimiento académico es promedio.

### **Conceptualización y operacionalización de las variables:**

**Variable independiente:** Actividades docentes asumida por el autor de este trabajo como el proceso de interacción sujeto – objeto, dirigido a la satisfacción de las necesidades del sujeto como resultado del cual se produce una transformación del objeto y el propio sujeto. Addine, F (2005:53).

**Variable dependiente:** nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad en la resolución de ecuaciones trigonométricas. Entendido por el autor de esta tesis como el dominio teórico y la aplicación del contenido sobre ecuaciones trigonométricas para llevar a cabo el sistema de pasos a seguir para determinar las soluciones, utilizando las transformaciones adecuadas comprobarlas y escribir el conjunto solución.

Teniendo en cuenta las características de la población seleccionada se determinaron los **indicadores** siguientes:

1. Dominio del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas.
2. Dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.
3. Dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función.
4. Dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
5. Dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.

La escala evaluativa para medir los indicadores se encuentra en el Anexo 1.

La **novedad científica**: Radica en la concepción de las actividades docentes, las cuales difieren de las demás por su estructura única y común para todas, lo cual permitió que la experiencia adquirida en las primeras facilitara el desarrollo de las últimas, también se tuvo presente un ordenamiento y contenido de los ejercicios, la cual asegura una proyección lógica del tratamiento de la resolución de ecuaciones trigonométricas a las alumnas y los alumnos del preuniversitario.

**Contribución a la práctica**: Se concreta en el diseño y aplicación de las actividades docentes para contribuir a la resolución de ecuaciones trigonométricas, estas constituyen una herramienta de trabajo en manos de las alumnas y los alumnos en el contexto educativo donde se desempeña profesionalmente el autor de este trabajo.

La tesis está estructurada sobre la base de una **introducción**. El **Capítulo I** referido a los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y la resolución de ecuaciones trigonométricas, una caracterización de la enseñanza preuniversitaria. El **Capítulo II** dedicado a la fundamentación de la propuesta, propuesta de solución y resultados obtenidos antes, durante y después de aplicadas las actividades. Ofrece también **conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos**.

# **CAPÍTULO 1: CONCEPCIONES TEÓRICAS QUE SUSTENTAN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA Y LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN ONCENO GRADO.**

## **1.1 El estudiante de la Enseñanza Media Superior. Comportamiento de sus habilidades cognoscitivas.**

El ingreso al nivel medio superior ocurre en un momento crucial de la vida del estudiante, es el período de tránsito de la adolescencia hacia la juventud. Se sabe que los límites entre los períodos evolutivos no son absolutos y están sujetos a variaciones de carácter individual, de manera que el profesor puede encontrar en un mismo grupo escolar, estudiantes que ya manifiestan rasgos propios de la juventud, mientras que otros mantienen todavía un comportamiento típico del adolescente.

Esta diversidad de rasgos se observa con más frecuencia en los grupos de décimo grado de la Enseñanza Media Superior, pues en los estudiantes de años posteriores comienzan a revelarse mayoritariamente las características de la edad juvenil.

Muchos consideran el inicio de la juventud como el segundo nacimiento del hombre; entre otras cosas, ello se debe a que en esta época se alcanza la madurez relativa de ciertas formaciones y algunas características psicológicas de la personalidad.

En la juventud se continúa y amplía el desarrollo que en la esfera intelectual ha tenido lugar en etapas anteriores. Así, desde el punto de vista de su actividad intelectual, los estudiantes del nivel medio superior están potencialmente capacitados para realizar tareas que requieren una alta dosis de trabajo mental, de razonamiento, iniciativa, independencia cognoscitiva y creatividad. Estas posibilidades se manifiestan tanto respecto a la actividad de aprendizaje en el aula, como en las diversas situaciones que surgen en la vida cotidiana del joven.

Resulta necesario precisar que el desarrollo de las habilidades intelectuales de los jóvenes no ocurre de forma espontánea y automática, sino siempre bajo el efecto de la educación y la enseñanza recibida, tanto en la escuela como fuera de ella.

En el desempeño del aprendizaje, generalmente, los educandos del nivel medio superior deben alcanzar índices superiores a los del estudiantado de niveles anteriores, lo que significa, desde luego, que ya pueden presentar dificultades ante tareas de carácter intelectual, ante la resolución de un modo correcto los problemas lógicos, ante situaciones que exigen la aplicación de procedimientos racionales y el control consciente de su actividad. No obstante, cuando la enseñanza se organiza de forma correcta, pueden superar muy rápido sus deficiencias, gracias a las reservas intelectuales que han desarrollado.

Debe tenerse presente que, por su grado de desarrollo, los alumnos de la Enseñanza Media Superior pueden participar de forma mucho más activa y consciente en este proceso, lo que incluye la realización más cabal de las funciones de autoaprendizaje y auto educación. Cuando esto no se toma en consideración para dirigir el proceso de enseñanza, el papel del estudiante se reduce a asimilar pasivamente, el estudio pierde todo interés para el joven y se convierte en una tarea no grata para él. Gozan de particular respeto aquellas materias en que los profesores demandan esfuerzos mentales, imaginación, inventiva y crean condiciones para que el estudiante participe de modo activo.

El estudio solo se convierte en una necesidad vital, y al mismo tiempo es un placer, cuando el joven desarrolla, en el proceso de obtención del conocimiento, la iniciativa y la actividad cognoscitiva independiente.

De gran importancia para los educadores es su creatividad y preparación en el desempeño de la didáctica del proceso de enseñanza a fin de que puedan ejercer una influencia positiva sobre el aprendizaje de los jóvenes por lo cual resulta importante que el maestro tenga una representación más objetiva de cómo son sus alumnos, que pueda aumentar el nivel de interacción con ellos y, al mismo tiempo, ejercer la mejor influencia formadora en las diferentes vertientes que los requieran, que siempre esté consciente del contexto histórico en el que viven sus educandos.

En este período el joven manifiesta y canaliza sus preocupaciones. Solo a partir de su toma de conciencia en relación con las dificultades existentes en el proceso docente educativo y de su participación activa en la toma de decisiones es posible lograr las transformaciones que se aspiran en este nivel



de enseñanza. Un objetivo esencial a lograr será la auto - dirección por parte de los propios jóvenes.

Todo esto exige del educador plena conciencia de su labor orientadora y la necesidad de lograr buenas relaciones con el joven, basadas en el respeto mutuo, teniendo en cuenta que este es ya un individuo cercano al adulto con criterios relativamente definidos.

En este proceso el adolescente y el joven, necesitan una adecuada dirección. Corresponde a los profesores ofrecer todo lo que esté a su alcance en forma conveniente, para que redunde en beneficio de su personalidad en formación y con ello se logre uno de los objetivos centrales de la educación socialista: la formación comunista de las nuevas generaciones.

### **1.2 La Matemática, una potencialidad para contribuir al desarrollo del pensamiento.**

La enseñanza de la Matemática en la escuela cubana tiene la tarea de contribuir a la preparación de los jóvenes para la vida social y laboral. Se trata de que los jóvenes dispongan de sólidos conocimientos matemáticos, que les permitan interpretar los adelantos científicos; que sean capaces de operar con ellos con rapidez, rigor y exactitud, de modo consciente; y que puedan aplicarlos, de forma creadora, a la solución de problemas de diversas esferas de la vida en la construcción del socialismo en nuestro país. Así mismo persigue que los estudiantes adquieran una concepción científica del mundo, una cultura integral, competencias y actitudes necesarias para ser hombres y mujeres plenos, útiles a nuestra sociedad, sensibles y responsables ante los problemas sociales, científicos, tecnológicos y ambientales a escala local, nacional, regional y mundial.

Para conocer el significado de la Matemática y su enseñanza, hay que conocer su desarrollo histórico, lo cual muestra que los conocimientos matemáticos, surgidos de las necesidades prácticas del hombre, tiene un gran valor para la vida.

La importancia de la enseñanza de la Matemática está fundamentada en tres elementos básicos: (Ballester Pedroso, S. et al., I: 4) - El reconocido valor de los conocimientos para la solución de los problemas que el pueblo debe enfrentar en la edificación de la sociedad socialista.

- Las potencialidades que radican en el aprendizaje de la Matemática para contribuir al desarrollo del pensamiento.

- La contribución que puede prestar la enseñanza de la Matemática al desarrollo de la conciencia y la educación de las nuevas generaciones.

Esta disciplina contribuye a la formación filosófica y a la consolidación de la concepción científica del mundo. No se trata de desarrollar un curso de Filosofía a través de las clases de Matemática. Se trata más bien de aprovechar oportunamente las potencialidades del contenido de las clases para consolidar la educación ideológica y filosófica de los alumnos. Mediante las clases de Matemática se puede contribuir a formar la idea de que: el mundo es cognoscible; la Matemática se originó por la abstracción de la realidad objetiva; hay nexos entre el desarrollo de la Matemática y el desarrollo de la sociedad; la Matemática se desarrolla dialécticamente.

El estudio de la Matemática ofrece múltiples posibilidades para contribuir, de manera decisiva, al desarrollo multilateral de la personalidad y exige hábitos de disciplina, persistencia y trabajo ordenado, entre otras cualidades.

La enseñanza de la Matemática en la escuela socialista tiene, entre sus principales funciones: (Ibidem: 11) - Proveer a los alumnos de sólidos conocimientos acerca de importantes conceptos, teoremas, reglas, relaciones y procedimientos.

- Desarrollar en los alumnos habilidades sólidas en el trabajo con algoritmos o cálculos elementales, métodos y procedimientos indispensables.

- Hacer comprender la importancia creciente de la Matemática en la vida social.

- Contribuir al desarrollo de capacidades intelectuales, formas de trabajo y razonamiento y hábitos de trabajo intelectuales.

La enseñanza de esta ciencia contribuye al desarrollo del pensamiento en general, mediante la realización de operaciones mentales tales como: analizar y sintetizar, comparar y clasificar, generalizar y concretar y abstraer y particularizar.

En la concepción desarrolladora de enseñanza-aprendizaje de cualquier disciplina y en especial de la Matemática, desempeña un papel esencial el trabajo independiente.

Una dificultad que se aprecia en los docentes en su auto preparación es en lo referente a qué hacer y cómo hacerlo. Lo más importante es que estén bien

orientados, que a la hora de trabajar sepan qué camino recorrer, por dónde van a empezar, qué deben buscar y cómo deben hacerlo.

Para lograr la independencia se debe desarrollar el pensamiento y aprender a utilizar la información para obtener nuevos conocimientos. Los tipos de trabajo independiente se intercondicionan estrechamente y responden a los diferentes niveles de desempeño.

“El desempeño está determinado por el uso que del conocimiento hace cada persona. Cuando se habla de desempeño cognitivo se refiere al cumplimiento de lo que se debe hacer en un área del saber de acuerdo con las exigencias establecidas para ello, de acuerdo con la edad y el grado. Cuando se habla de niveles de desempeño cognitivo se refiere al grado de complejidad con que se quiere medir el desempeño cognitivo y al mismo tiempo a la magnitud de los logros del aprendizaje alcanzado en una asignatura determinada”. (Valdés, H. 2004: 3).

Uno de los criterios a tener en cuenta en la planificación del trabajo independiente es el nivel de desempeño cognitivo alcanzado por los estudiantes.

Se asume que los niveles de desempeño cognitivo, expresan la complejidad con que se quieren medir los niveles de logros alcanzados en una asignatura dada.

Para medir los niveles de desempeño cognitivo en cada una de las asignaturas se consideran tres niveles.

Primer nivel. Capacidad del estudiante para utilizar las operaciones de carácter instrumental básicas de una asignatura dada, para ello deberá reconocer, identificar, describir e interpretar los conceptos y propiedades esenciales en los que esta se sustenta.

Segundo nivel. Capacidad del estudiante de establecer relaciones conceptuales, donde además de reconocer, describir e interpretar los conceptos deberá aplicarlos a una situación planteada y reflexionar sobre sus relaciones internas.

Tercer nivel. Capacidad del estudiante para resolver problemas, por lo que deberá reconocer y contextualizar la situación problemática, identificar componentes e interrelaciones, establecer las estrategias de solución, fundamentar o justificar lo realizado.

En Matemática estos niveles se expresan:

Nivel I: En este nivel se consideran los estudiantes que son capaces de resolver ejercicios formales eminentemente reproductivos (saber leer y escribir números, establecer relaciones de orden en el sistema decimal, reconocer figuras planas y utilizar algoritmos rutinarios usuales), es decir, en este nivel están presentes aquellos contenidos y habilidades que conforman la base para la comprensión matemática.

Nivel II. Situaciones problemáticas, que están enmarcadas en los llamados problemas rutinarios, que tienen una vía de solución conocida, al menos para la mayoría de los estudiantes, que sin llegar a ser propiamente reproductivas, tampoco pueden ser consideradas completamente productivas. Este nivel constituye un primer paso en el desarrollo de la capacidad para aplicar estructuras matemáticas a la resolución de problemas.

Nivel III. Problemas propiamente dichos, donde la vía de solución, por lo general, no es conocida para la mayoría de los estudiantes y donde el nivel de producción de los mismos es más elevado. En este nivel los estudiantes son capaces de reconocer estructuras matemáticas complejas y resolver problemas que no implican necesariamente el uso de estrategias, procedimientos y algoritmos rutinarios, sino que posibilitan la puesta en escena de estrategias, razonamientos y planes no rutinarios, que exigen al estudiante poner en juego su conocimiento matemático.

En la Matemática el método de enseñanza ocupa un lugar importante en la cadena lógica objetivo, contenido, método, medios, evaluación. Para su selección se deben tener en cuenta dos importantes exigencias, que en la enseñanza de la Matemática adquieren una significación especial:

- Seleccionar métodos que al aplicarlos hagan un importante aporte al logro de los objetivos de esta enseñanza.
- Seleccionar métodos que tengan en cuenta las particularidades del contenido matemático, para que puedan determinar el modo de proceder.

Al abordar el problema del método de enseñanza hay que hacer referencia a los procedimientos y establecer las diferencias entre ambos. El procedimiento "es un detalle del método, es decir, es una operación particular práctica o intelectual de la actividad del profesor o de los alumnos" lo cual complementa la

forma de asimilación de los conocimientos que presupone determinado método. (Labarrere, G. 1988:106).

El contenido a enseñar en el preuniversitario a partir del curso 2001- 2002 ha sufrido algunas transformaciones con relación a cursos anteriores, debido a los cambios curriculares operados en la Secundaria Básica. Esto ha traído como consecuencia que en la actualidad existan nuevos programas docentes para ese nivel de enseñanza y que se tengan que utilizar libros que fueron hechos para otros grados, en el desarrollo de algunos temas. Además hay contenidos que aparecen tratados con un enfoque diferente al que se pretende utilizar y las orientaciones metodológicas para el desarrollo de los mismos son muy limitadas.

Dentro de los objetivos generales de la asignatura Matemática en el nivel medio superior se encuentran:

- Adoptar decisiones responsables en su vida personal, familiar y social sobre la base de la comprensión de las necesidades vitales del país, la aplicación de procesos del pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo y la utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva, la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría.

- Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve. Y dentro de los objetivos generales de la asignatura Matemática en onceno grado se definen:

- Representar situaciones de la práctica, la ciencia o la técnica mediante modelos analíticos y gráficos y viceversa, extraer conclusiones a partir de esos modelos acerca de las propiedades y relaciones que se cumplen en el sistema estudiado, aplicando para ello los conceptos, relaciones y procedimientos relativos al trabajo con los números reales, las magnitudes, las ecuaciones algebraicas y trascendentes, las funciones elementales, la geometría sintética y analítica del plano, la estereometría y la trigonometría.

- Realizar ejercicios de búsqueda y demostración de proposiciones matemáticas, utilizando los recursos aritméticos, algebraicos, geométricos y

trigonométricos, que le permitan apropiarse de métodos y procedimientos de trabajo de las ciencias.

- Utilizar técnicas para un aprendizaje individual y colectivo eficiente y para la racionalización del trabajo mental, con ayuda de los recursos de las tecnologías de la información y la comunicación.

En tal sentido se precisa el trabajo con las ecuaciones, funciones y otros recursos trigonométricos, que constituyen parte fundamental en el desarrollo de habilidades y capacidades en la enseñanza de la Matemática como ciencia.

### **1.3 La efectividad en el tratamiento de la trigonometría en el preuniversitario.**

La materia de enseñanza se puede ordenar atendiendo a aspectos principales de la trasmisión de conocimientos, el desarrollo de habilidades y capacidades generales y específicas y de la educación de los alumnos, según las líneas directrices. Estas son lineamientos que penetran todo el curso escolar con respecto a los objetivos a lograr, los contenidos y los métodos a elegir.

Dentro de la materia de enseñanza de la línea directriz Geometría se enmarca el contenido trigonométrico.

En la concepción de la asignatura Matemática, el estudio de la trigonometría (rama de la Matemática que estudia las relaciones numéricas entre lados y ángulos de figuras geométricas planas o esféricas) es una parte esencial sin la cual no es posible realizar plenamente las funciones de la asignatura en la escuela media. En efecto la trigonometría forma parte del arsenal mínimo de conocimientos del ciudadano, numerosas actividades prácticas se fundamentan en los conceptos y procedimientos trigonométricos; además, las funciones trigonométricas constituyen un grupo de funciones, cuyos gráficos y propiedades son de obligatorio conocimiento para los estudiantes de un gran número de carreras universitarias.

La palabra “trigonometría” es una combinación de dos palabras griegas que significan “medida - triángulo”, su estudio tiene una historia continua, desde su origen en la Antigua Grecia hasta nuestros días.

La trigonometría, tuvo su origen hace más de 2000 años en Egipto y Grecia, con la aplicación de principios geométricos a los problemas de deslindamiento de terrenos, así como a la astronomía. Los matemáticos que participaron en su fundación como estudio sistemático fueron Hiparco de Nicea (griego, siglo II

ane) y Claudio Ptolomeo (griego, 150). El desarrollo de los principios trigonométricos en una teoría coherente mediante la cual se podía resolver problemas más complicados se atribuye a Hiparco.

En estos tiempos ya los griegos habían alcanzado un gran desarrollo, habían descubierto que la Tierra era esférica y utilizando geometría y trigonometría habían estimado su diámetro y el de la Luna con una exactitud sorprendente.

Ptolomeo, que fue famoso como astrónomo, perfeccionó la teoría heredada de Hiparco.

En los trabajos del hindú Aryabhata (475 – 550) se encuentran las primeras evidencias del conocimiento de funciones de un ángulo, como consta por sus tablas de valores de senos, expresados en partes del radio. Son las primeras tablas de senos de que se tiene memoria.

Entre los árabes se distinguió Al Battani (845 – 929) correspondiéndole el mérito de haber empleado por primera vez, después de los hindúes, los senos en vez de las cuerdas.

Johan Muller (1436 – 1476), matemático alemán, autor del primer tratado de trigonometría rectilínea y esférica escrito por un europeo. En su obra consta una tabla de senos y tangentes. Este autor es considerado como el creador de la trigonometría moderna.

Otro de los que más se destaca es el notable matemático francés Francisco Viète (1540 – 1603), quien completó el sistema trigonométrico de los árabes. Es el primer autor de las fórmulas analíticas que sirven para la resolución de los triángulos oblicuángulos; da reglas para la construcción de los senos, de las tangentes y de las secantes, expone, en fin, casi todo lo más útil que los modernos conocen.

En un principio la trigonometría se desarrolló sobre el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Sería un error, sin embargo, limitar el estudio de la trigonometría a sus aplicaciones a los triángulos. Modernamente su uso se extiende a muchos campos del conocimiento, tanto teóricos como prácticos. Las funciones trigonométricas muestran su fuerza propia de una manera sorprendente, cuando se estudia el cálculo de ciertas funciones algebraicas. También se pueden encontrar en el estudio del movimiento ondulatorio, de las vibraciones, de la corriente alterna y del sonido, y en ninguna de estas materias aparecen los ángulos de forma natural.

La importancia de la trigonometría se pone de manifiesto cuando en su estudio se trabaja prácticamente todas las directrices de la asignatura, aunque en lo particular se destacan:

- Cálculo con magnitudes y valores aproximados. Se profundiza en el cálculo con valores aproximados, incluyendo el cálculo con los valores de las razones trigonométricas.
- Ecuaciones e inecuaciones. Se resuelven ecuaciones trigonométricas.
- Correspondencia, transformación, función. Se estudian las funciones trigonométricas y sus propiedades.
- Geometría. Se aplican las razones trigonométricas al cálculo geométrico.
- Fundamental, demostrar. Se trabaja en la demostración de identidades trigonométricas.
- Matematizar problemas extramatemáticos. Se resuelvan problemas de aplicación utilizando las razones trigonométricas.

También, se trabaja en el desarrollo de un número considerable de las habilidades, tales como:

- Calcular: Se incluye el cálculo trigonométrico y se ejercita todo el cálculo que han aprendido antes.
- Evaluar: Se evalúan funciones trigonométricas.
- Simplificar: Se simplifican expresiones trigonométricas.
- Resolver ecuaciones: Se resuelven ecuaciones trigonométricas.
- Relacionar gráficos y propiedades de funciones: Se trabaja con las funciones seno, coseno, tangente y cotangente.
- Demostrar: Se demuestran identidades trigonométricas.

En el programa de la asignatura Matemática en onceno grado se estudia la unidad Ecuaciones y funciones trigonométricas con un total de 53 horas clases y que tiene como objetivos:

- Calcular razones trigonométricas de ángulos cualesquiera en el sistema sexagesimal y circular de medida de ángulos, aplicando sus definiciones, las relaciones fundamentales entre ellas, el conocimiento de las razones trigonométricas de los ángulos notables y axiales, las fórmulas de reducción, las tablas trigonométricas y las reglas para el cálculo aproximado.
- Resolver identidades y ecuaciones trigonométricas, aplicando lo aprendido sobre la generalización del concepto de ángulo, para calcular razones



trigonométricas de ángulos cualesquiera y otros recursos algebraicos y trigonométricos, como las identidades trigonométricas fundamentales, las fórmulas de adición y del ángulo duplo.

- Describir e interpretar situaciones de la realidad utilizando el recurso de las funciones trigonométricas  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ , de sus propiedades a su representación analítica, gráfica o descriptiva (en el lenguaje común) y viceversa, aplicando estos conocimientos a situaciones sencillas de la práctica y otras ciencias.

- Resolver problemas y ejercicios de aplicación a la geometría plana, otras ciencias o al cálculo de cuerpos, aplicando los teoremas sobre la resolución de triángulos cualesquiera, en particular, la ley de los senos y los cosenos.

Dentro de las situaciones típicas que están presentes con mayor fuerza en este complejo de materia se tienen:

- Los conceptos y sus definiciones.

- Los procedimientos de solución tanto heurísticos como algorítmicos.

Para el adecuado tratamiento metodológico de la unidad, esta se puede dividir en las siguientes unidades temáticas:

- Repaso y profundización.

- Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera. Identidades y ecuaciones trigonométricas.

- Funciones trigonométricas.

- Aplicaciones de la trigonometría.

En la unidad temática Repaso y profundización se debe recordar como conceptos fundamentales los de seno, coseno y tangente de un ángulo agudo.

Para tratar las definiciones de razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, se debe asegurar como condiciones previas la aplicación del Teorema de Pitágoras, los elementos de un triángulo rectángulo y las relaciones entre ellos, concepto de semejanza de triángulos y teoremas correspondientes.

La motivación debe hacerse con situaciones extramatemáticas, donde no se pueda determinar la vía de solución con los conocimientos adquiridos con anterioridad, por lo que es necesario estudiar nuevas relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo, buscando relaciones entre un ángulo agudo y dos lados cualesquiera. Es aconsejable definir simultáneamente las tres

razones trigonométricas de forma que los alumnos aprendan a distinguirlas unas de otras. Destacar que la razón entre los lados no depende de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, sino de la amplitud del ángulo agudo. Las constantes obtenidas en cada caso son las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno y tangente). Además pueden formarse otras razones recíprocas a las obtenidas. Precisar que el seno del ángulo es un número.

En la fijación de las razones trigonométricas es oportuno considerar ejercicios de cálculo trigonométrico sin tablas y con tablas, ejercicios formales y problemas matemáticos relacionados con la práctica.

En este punto lo fundamental a lograr es que los alumnos memoricen las definiciones de las razones trigonométricas y puedan aplicarlas al cálculo en triángulos rectángulos.

En el tratamiento de los valores de las razones trigonométricas de ángulos notables es esencial que los alumnos memoricen los valores, pues en gran medida el desarrollo de las habilidades en el cálculo trigonométrico depende de dicha memorización, pero no mecánica, sino que es necesario que fijen esos valores de forma consciente y sean capaces de calcularlos, en caso necesario, si los olvidan.

Es importante que los alumnos comprendan por qué son notables los ángulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , destacando las características de los triángulos con estos ángulos y especialmente la relación establecida entre la longitud del lado, de un triángulo rectángulo, opuesto a un ángulo de  $30^\circ$  y la longitud de la hipotenusa. Después de obtenidos los valores de las razones de los ángulos notables de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  se deben obtener los valores de las razones de los ángulos de  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , reconociendo que no es posible con las definiciones dadas, por lo que es necesario ampliarlas, ahora en términos de las coordenadas rectangulares.

En la unidad temática Razones trigonométricas. Identidades y ecuaciones trigonométricas, se trabajan como procedimientos fundamentales el cálculo de valores, la demostración de identidades y la resolución de ecuaciones.

Para introducir el sistema circular de medidas de ángulos, se trata simplemente de establecer la proporcionalidad entre la longitud del arco y el radio y aplicarlo para medir el ángulo. Es recomendable seguir la siguiente vía metodológica:

a) Informar sobre la necesidad de otro sistema para medir ángulos.

- b) Establecer que la razón entre la longitud del arco y el radio, no depende del radio, es decir, es constante para cada ángulo.
- c) Establecer que esa razón es la medida en el sistema circular.
- d) Ilustrar la definición.
- e) Aplicar la definición a la conversión de un sistema a otro.
- f) Tabular los valores notables.

Para dar tratamiento a las fórmulas de reducción, es aconsejable que los tres grupos de fórmulas correspondientes a los diferentes cuadrantes, se presenten de forma simultánea, pues estas sólo exigen conocer el signo de las razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes. Al introducir todas las fórmulas juntas, el alumno está obligado a reconocer, que es la primera operación en cualquier habilidad.

Lo fundamental en este punto es que los alumnos calculen los valores de las razones trigonométricas de ángulos entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ . Para la fijación hay que tener en cuenta dos tipos de ejercicios fundamentales:

- Ejercicios para dada una razón trigonométrica y una información adicional (el signo de otra razón o el cuadrante al que pertenece el ángulo) hallar las restantes razones,
- Ecuaciones, ya que ahora las ecuaciones pueden tener más de una solución.

Un punto culminante en esta unidad es la generalización del concepto de ángulo, que permitirá extender el cálculo trigonométrico a ángulos cualesquiera en ambos sistemas de medidas de ángulos, sobre la base de la comprensión de la ampliación del concepto de ángulo y del concepto de ángulos coterminales.

En el tratamiento metodológico de las identidades trigonométricas, es importante que los alumnos sepan diferenciar entre una ecuación y una identidad trigonométrica, aunque en general no resulta fácil identificarlas. Una ejercitación bien concebida proporciona una guía para la acción, aunque puede ayudar a decidir la siguiente regla práctica:

Si se puede determinar algún valor admisible que no satisfaga la igualdad, esta no es una identidad, aunque esa regla no indica cuando una igualdad es una identidad.

No existen procedimientos de validez general para la demostración de identidades, aunque resulta útil emplear reglas especiales que contienen en sí

las acciones y operaciones a realizar para la búsqueda de los medios que se aplican a la demostración, entre ellas se destacan:

- Decidir el miembro menos complejo para trabajar.
- Descomponer en factores si es posible.
- Simplificar previamente antes de transformar.
- Reducir todas las expresiones trigonométricas a términos de seno y coseno.
- Sustituir una expresión según una identidad.
- Reducir un miembro a una misma razón.
- Transformar la igualdad a una identidad conocida.

Se recomiendan dos procedimientos generales de trabajo para la demostración de identidades: transformar un miembro en otro y trabajar en ambos miembros.

El trabajo con las identidades permite aplicar los conocimientos trigonométricos y contribuir al desarrollo de la capacidad de demostrar. Es necesario que los alumnos memoricen un conjunto de identidades para aplicarlas con seguridad y de forma racional en la resolución de los ejercicios, las mismas se clasifican en tres grupos:

- Identidades fundamentales donde las razones que aparecen se refieren a un mismo ángulo.
- Identidades que relacionan las razones trigonométricas de un ángulo con las del ángulo complementario y también las llamadas fórmulas de reducción de los diferentes cuadrantes.
- Identidades trigonométricas que se establecen para más de un ángulo.

En el trabajo con las ecuaciones trigonométricas se deben resolver ejercicios, que conduzcan a la resolución de ecuaciones de los tipos estudiados con anterioridad, incluyendo las fraccionarias y con radicales, además deben resolverse ecuaciones con dominios restringidos e introducir ecuaciones donde sea necesario realizar transformaciones utilizando las identidades trigonométricas para garantizar su ejercitación, así como el cálculo trigonométrico.

Al introducir los valores numéricos, se hace necesario destacar los procedimientos de cálculo aproximado, recordando la regla fundamental: en la respuesta deben haber tantas cifras significativas como las que tiene el dato que menos cifras significativas tiene.

Para la resolución de ecuaciones trigonométricas no existen reglas generales, pero pueden resultar de mucha utilidad los siguientes procedimientos

- Descomponer en factores.
- Obtener una ecuación algebraica mediante sustituciones.
- Expresar todas las funciones en términos de una sola.
- Aplicar las fórmulas de adición, reducción o del ángulo duplo, si es necesario.
- Al realizar transformaciones no equivalentes, se debe hacer la prueba pues pueden introducirse raíces extrañas.

Resolver ecuaciones trigonométricas usando un procedimiento algebraico requiere del uso de manipulaciones algebraicas, identidades e ingeniosidad.

Sugerencia de procedimiento algebraico para resolver ecuaciones trigonométricas. (Barnett, R. et al. 2003: 486).

1. Considerar una función trigonométrica en particular como una variable y resolverla.

a) Considerar el uso de manipulaciones algebraicas tales como factorización, combinación o separación de fracciones, etc.

b) Considerar el uso de identidades.

2. Después de resolver una función trigonométrica, despejar la variable.

3. Escribir una expresión para todas las soluciones.

Se pueden utilizar sistemas algebraicos computarizados en determinados casos para la solución de ecuaciones.

Las funciones trigonométricas tienen por objetivo ampliar la familia de las funciones conocidas, así como aplicar el cálculo trigonométrico. Para su tratamiento es conveniente recordar el concepto de función:

“Una función  $f: X \rightarrow Y$  es un conjunto de pares ordenados  $(x; y)$  tal que cada  $x \in X$  aparece como la primera coordenada de solo un par ordenado” (Campistrous Pérez, L. et al. 2000: 124) Es recomendable estudiar la definición, representación gráfica y propiedades de cada función por separado, utilizando las siguientes sugerencias metodológicas:

1. Definir la función.

2. Trazar el gráfico. (Realizar el ploteo de algunos puntos y después ajustar la curva, además se deben utilizar asistentes matemáticos como el Derive y el Geómetra).

3. Obtener las propiedades a partir de la interpretación del gráfico. (Libera al alumno de la necesidad de memorizar formalmente las propiedades, teniendo una representación mental de la gráfica y una representación de las propiedades).

4. Aplicar las propiedades, mediante una adecuada selección de los ejercicios por diferentes bibliografías, incluyendo los softwares educativos.

Al tratar las funciones trigonométricas, deben incluirse ejercicios donde los alumnos puedan hacer transferencias entre las distintas formas de representar una función trigonométrica y en los que se aplique en particular la periodicidad de estas funciones. Se definirá la función armónica  $y = a \sin (bx + c)$  analizando los efectos que provocan los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  en el gráfico de la función seno y se obtendrá  $y = a \cos (bx + c)$  por analogía.

En las aplicaciones de la trigonometría lo esencial es que los alumnos apliquen sus conocimientos trigonométricos y geométricos a la resolución de ejercicios con texto y problemas tanto matemáticos como extramatemáticos. Hay que reactivar los conocimientos geométricos sobre el grupo de Teoremas de Pitágoras, concepto de polígono (convexo, no convexo), polígono regular y los cuerpos geométricos estudiados anteriormente.

Para introducir la ley de los senos se puede proponer un problema donde el triángulo que resulta no sea rectángulo pero que se pueda resolver aplicando esta ley, se aprovecha la situación para introducir una propiedad que establece relaciones entre los ángulos y los lados de triángulo cualquiera, con lo que podría resolverse el problema planteado anteriormente.

La ley de los cosenos se enuncia de forma tradicional. Una vez que los alumnos hayan fijado las leyes de los senos y de los cosenos con ejercicios formales, se deben resolver problemas de aplicación.

Es necesario que los alumnos se apropien de una nueva expresión para calcular el área de un triángulo, conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

Debe quedar bien claro que conocido el número de lados de un polígono regular y otro elemento cualquiera, es posible siempre hallar los restantes, así como su área.

El método a utilizar a través de toda la unidad temática, se sugiere que sea proponer ejercicios sencillos e ir aumentando las dificultades, teniendo en

cuenta los conocimientos que poseen y los que necesitan para resolverlos, utilizando las siguientes preguntas:

- ¿qué queremos hallar?
- ¿qué necesitamos para calcularlo?
- ¿cómo podemos calcular lo que necesitamos?

Al finalizar la unidad Ecuaciones y funciones trigonométricas se aspira que los alumnos alcancen los siguientes niveles de logro:

- Cálculo de razones trigonométricas de ángulos cualesquiera, utilizando correctamente las reglas del cálculo aproximado.
- Resolución de identidades y ecuaciones aplicando las identidades trigonométricas fundamentales, las fórmulas de adición y del ángulo duplo.
- Transferencia de una representación a otra de las funciones trigonométricas  $y=\text{sen}x$ ,  $y=\text{cos}x$ ,  $y=\text{tan}x$ ,  $y=\text{cot}x$ , es decir, de sus propiedades a su representación analítica, gráfica o descriptiva (en el lenguaje común) y viceversa, aplicando estos conocimientos a situaciones sencillas de otras ciencias.
- Resolución de triángulos cualesquiera.
- Resolución de problemas y ejercicios de aplicación a polígonos regulares, otras ciencias o al cálculo de cuerpos.

En esta enseñanza los estudiantes deben lograr un nivel de formalización y rigor en la asimilación de los contenidos, superior a la lograda en años anteriores. Las tareas propuestas para el trabajo independiente deben incluir actividades de búsqueda del conocimiento, donde el estudiante tenga que fichar y comparar definiciones y teoremas, enunciar proposiciones, formular problemas, hacer resúmenes, interpretar gráficas, etcétera.

#### **1.4 La enseñanza de la trigonometría desde una perspectiva desarrolladora.**

Para Vigostki (1987) la enseñanza y la educación son formas universales y necesarias que permiten al hombre apropiarse de la cultura, de experiencia histórico-social de la humanidad. Considera que el papel rector en el desarrollo psíquico corresponde a la enseñanza, de acuerdo con el nivel de desarrollo de la sociedad y de las condiciones de su educación se alcanzará dicho desarrollo, los conocimientos se adquieren a través del desarrollo histórico. Por tanto la enseñanza no necesita esperar a que el estudiante haya alcanzado

determinado nivel de desarrollo para que pueda aprender algo, lo importante es precisar que en el sujeto existen posibilidades para el aprendizaje.

De gran valor metodológico es su concepto de zona de desarrollo próximo, como la distancia entre lo que el individuo es capaz de realizar por sí solo (zona de desarrollo real), esto indica el nivel de desarrollo de las funciones mentales que ya han madurado y lo que puede hacer a través de niveles de ayuda (zona de desarrollo potencial), que indica aquellas funciones que se encuentran en proceso de maduración. Este concepto le permite a los profesores conocer el estado actual del alumno y dirigir su desarrollo, por lo que es indispensable la preparación de los docentes en el dominio de la didáctica y la metodología. La enseñanza debe dirigirse a los alumnos que están en proceso de maduración, lo que permitirá un buen aprendizaje, el intercambio de conocimientos, la reflexión y el debate para lograr una enseñanza desarrolladora. Concibe el aprendizaje como una actividad social y no solo como un proceso de realización individual sino un proceso de construcción y reconstrucción que permite a los alumnos apropiarse de conocimientos, habilidades, actitudes, afectos, valores y sus formas de expresión.

De vital importancia resulta el conocimiento de la teoría de Vigostki para todos los educadores, especialmente para los maestros noveles, ávidos de conocimientos y que requieren de una preparación esmerada y sistemática que les permita alcanzar nuevos peldaños en su desarrollo profesional.

En el tratamiento de los contenidos trigonométricos se deben tener presente dos principios fundamentales:

1. Seguirse el criterio del incremento sistemático de la complejidad de las tareas propuestas.
2. Realizarlo de acuerdo con el criterio del incremento sistemático de la actividad y la independencia.

Si se toma en cuenta la zona de desarrollo próximo sustentada en la teoría histórico cultural de Vigotsky se puede plantear:

Que estos principios reflejan elementos esenciales de una concepción desarrolladora de enseñanza-aprendizaje, donde se parte del nivel de desarrollo actual del estudiante y se le plantean metas cada vez más altas, brindándole los niveles de ayuda necesarios para realizarlos exitosamente, los



cuales deben ir disminuyendo progresivamente, en la medida en que aumenta la independencia y el estudiante alcanza nuevos niveles de desarrollo.

Con relación al contenido del primer principio el maestro espirituano Raúl Ferrer Pérez expresó: “El proceso de enseñanza-aprendizaje es como la relación del perro y la carne. Cuando se tiene un pedazo de carne el perro se acerca y trata de alcanzarlo. Podemos ir poniéndolo a diferentes alturas y el perro saltará cada vez más alto para alcanzarlo, pero si se le pone a una altura inalcanzable, el perro se da vuelta y se marcha. El secreto del conocimiento está en ponerlo a una altura tal que la persona con un esfuerzo pueda alcanzarlo”. (1972:36)

El proceso de enseñanza y aprendizaje no ocurre de forma independiente, debe estructurarse, organizarse y orientarse en correspondencia con los requerimientos de la edad, de las condiciones y situaciones, de las particularidades individuales y del propio proceso.

El estudiante de la Enseñanza Media Superior se encuentra en el umbral de la vida adulta, lo que implica que en esta etapa debe adquirir la madurez necesaria para convertirse en un adulto útil a la sociedad, se encuentran en la edad en que florece el desarrollo de la personalidad sujeto a cambios y transformaciones durante toda la vida. Siente la necesidad de determinar su lugar en la vida, de ahí su preocupación por el futuro, los sentimientos se hacen más estables, profundos y variados, son más reflexivos que los adolescentes pues la sociedad exige de ellos la toma de decisiones importantes. Para el maestro es fundamental conocer las posibilidades de desarrollo del estudiante para detectar las insuficiencias y estructurar un trabajo educativo óptimo.

## **CAPÍTULO II: ACTIVIDADES DOCENTES PARA CONTRIBUIR A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS, FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA Y RESULTADOS ANTES, DURANTE Y DESPUÉS DE APLICADA LA PROPUESTA DE SOLUCIÓN**

### **2.1 Diagnóstico inicial. Resultados.**

Dada la complejidad del objeto de investigación, así como la necesidad de conocer la situación inicial de la muestra seleccionada, en la primera fase de la investigación se aplicó un diagnóstico inicial, para el cual se utilizó la guía de observación a las alumnas y los alumnos (Anexo I) y la prueba pedagógica inicial (Anexo III), donde se pudo constatar la existencia real del problema.

Los instrumentos para la aplicación de cada método se elaboraron teniendo en cuenta los indicadores que se determinaron en la variable dependiente para medir el nivel de desempeño en la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos del preuniversitario Frank País García. Se estableció la escala valorativa (Anexo 2 y 2 A).

Se muestran a continuación los resultados.

Como instrumentos de medición antes de las actividades docentes se aplicó a las alumnas y los alumnos una guía de observación (Anexo I), para constatar en el desarrollo de las clases el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas, se obtuvieron los resultados siguientes:

En el indicador uno se comprobó que solamente tres (10%) alumnas y alumnos, tienen dominio correcto de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas alcanzando un nivel alto, nueve (30%) Domina en parte del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas y 18 (60%) no domina los procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas.

En el indicador dos se comprueba que 10 (33.3%) dominan en parte para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades y 20 (67.7%) no tiene dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con

el mismo ángulo aplicando identidades, alcanzando los primeros un nivel medio y los segundos un nivel bajo.

En el indicador tres se comprueba que nueve (30%) alumnas y alumnos dominan en parte las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función, ubicándose en un nivel medio y 21 (70%) no tiene dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función, ubicándose en un nivel bajo.

En el indicador cuatro se comprobó que 10 (33.3%) alumnas y alumnos dominan en parte del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma), y 16 (53.3%) no tiene dominio para hacerlo. En el indicador cinco se comprobó que 1(3.3%) alumnas y alumnos Domina en parte el trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas y 29 (96.7%) no lo hacen. Alcanzándose la misma ubicación en niveles.

Al ubicar los alumnos en los diferentes niveles según el desempeño demostrado se obtuvo que: 20 (67.7%) alumnas y alumnos se ubican en un nivel bajo puesto que tuvieron menos de tres indicadores evaluados de (A), 10(33.3%) se ubican en un nivel medio, tuvieron menos de tres indicadores evaluados de (A), y ninguno en nivel alto.

Al valorarse los resultados arrojados en las observaciones efectuadas se considera que las alumnas y los alumnos poseen conocimientos mínimos sobre los procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas, la expresión de todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades, las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función, el trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma), las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.

Para constatar el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas se aplicó una prueba pedagógica (Anexo III), se realizó de modo individual, inicialmente se conversó con estos de modo que no se inhibieran, se tuvo presente al realizarla que tuvieran un estado de ánimo positivo, efectuándose en un lugar cómodo, con un ambiente tranquilo y sosegado.

Al resolver la ecuación, en la que se pedía dejar los razonamientos por escrito se constató que: En el indicador uno se comprobó que solamente tres (10%) alumnas y alumnos, tienen dominio correcto de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas alcanzando un nivel alto, nueve (30%) Domina en parte del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas y 18 (60%) no domina los procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas.

En el indicador dos se comprueba que 10 (22%) dominan en parte para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades y 20 (67.7%) no tiene dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades, alcanzando los primeros un nivel medio y los segundos un nivel bajo.

En el indicador tres se comprueba que nueve (30%) alumnas y alumnos dominan en parte las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función, ubicándose en un nivel medio y 21 (70%) no tiene dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función, ubicándose en un nivel bajo.

En el indicador cuatro se comprobó que 10 (33.3%) alumnas y alumnos dominan en parte del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma), y 16 (53.3%) no tiene dominio para hacerlo. En el indicador cinco se comprobó que 1(3.3%) alumnas y alumnos Domina en parte el trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas y 29 (96,7%) no lo

hacen. Alcanzándose la misma ubicación en niveles. Evidenciándose estos resultados en la tabla de distribución de frecuencia de la prueba pedagógica antes de aplicar las actividades docentes (Anexo IV).

La prueba pedagógica aplicada demuestra que existen dificultades en la resolución de ecuaciones trigonométricas. De manera general las alumnas y los alumnos poseen conocimientos mínimos de estas, en correspondencia con lo que se trabaja en el octavo grado, no se encuentran al nivel deseado.

Al ubicar los alumnos en los diferentes niveles según el desempeño demostrado se obtuvo que: 20 (67.7%) alumnas y alumnos se ubican en un nivel bajo puesto que tuvieron menos de tres indicadores evaluados de (A), 10(33.3%) se ubican en un nivel medio, tuvieron menos de tres indicadores evaluados de (A), y ninguno en nivel alto.

Lo anterior se resume en la evaluación por indicadores antes de aplicadas las actividades docentes (Anexo V).

Los resultados arrojados en el diagnóstico inicial permitieron determinar desde el punto de vista cualitativo las siguientes dificultades:

- Las alumnas y los alumnos poseen conocimientos mínimos sobre el proceder a seguir para resolver ecuaciones trigonométricas.
- Existen conocimientos mínimos para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.
- Las alumnas y los alumnos poseen conocimientos mínimos de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función.
- Falta dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
- Las alumnas y los alumnos poseen conocimientos mínimos del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.

La determinación de las necesidades de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas y la existencia en ellos de

potencialidades tales como: saben resolver ecuaciones que son objetivos de grados anteriores, al 100% de estos les gusta prepararse para alcanzar el título de bachiller, muestran interés y disposición para solucionar las dificultades y sus relaciones son correctas, facilitó la precisión de las necesidades del fortalecimiento de la muestra, lo que permitió la elaboración de las actividades docentes para su posterior aplicación, se hace referencia a ellas en el próximo acápite.

## **2.2 Fundamentos que avalan las actividades docentes propuestas.**

La propuesta incluye actividades docentes en la que los alumnos y alumnas transitan por etapas que parten de la creación de una sólida base informativa imprescindible hacia un mayor acercamiento a la resolución de ecuaciones trigonométricas. Su concepción descansa sobre presupuestos teóricos-metodológicos que sustentan la teoría de la actividad, tienen su base en las ciencias como la filosofía, la pedagogía, la sociología y la psicología.

El sustento filosófico de la educación cubana es la filosofía dialéctico – materialista conjugada con el ideario martiano, por lo que se supera así la concepción del marxismo leninismo como una metodología general de la pedagogía, como una filosofía en general. La filosofía de la educación es una de las más importantes tradiciones del pensamiento cubano. Está propicia el tratamiento acerca de la educabilidad del hombre, la educación como categoría más general y el por qué y el para qué se educa al hombre (García Batista, G., 2002: 47).

Para lograr una dimensión científica y humanista del problema se toma como sustento la teoría marxista – leninista, asumiendo las leyes generales de la dialéctica materialista, la teoría del conocimiento, el enfoque complejo de la realidad y la práctica como fuente del conocimiento.

Desde el punto de vista sociológico el objetivo general de la educación se resume en el proceso de socialización del individuo: apropiación de los contenidos sociales válidos y su objetivación (materialización), expresados en forma de conductas aceptables por la sociedad. Paralelamente se realiza la individualización, proceso de carácter personal, creativo, en el que cada cual percibe la realidad de manera muy particular como ente social activo. De esta

forma los individuos se convierten en personalidades que establecen, por medio de sus actividades y de la comunicación, relaciones históricas concretas, entre sí y con los objetos y sujetos de la cultura (Blanco Pérez, A. 2003:89).

Toda categoría pedagógica está vinculada con una teoría psicológica, lo que permite lograr que la psicología llegue a la práctica educativa mediada por la reflexión pedagógica.

En este trabajo en consonancia con el fundamento filosófico que se esgrime, se opta por una psicología histórico – cultural de esencia humanista basada en el materialismo dialéctico y particularmente en los postulados de Vigotsky y sus seguidores, en los que encuentran continuidad las fundamentales ideas educativas que constituyen las raíces más sólidas, históricamente construidas y que permiten ponerse a la altura de la ciencia psicológica contemporánea.

El enfoque histórico – cultural de la psicología pedagógica ofrece una profunda explicación acerca de las grandes posibilidades de la educabilidad del hombre constituyéndose así en una teoría del desarrollo psíquico, íntimamente relacionada con el proceso de preparación y que se puede calificar como optimista, pues hace consciente al educador de las grandes potencialidades que tiene al incidir en el estudiante, de acuerdo con las exigencias de la sociedad en la cual vive y a la cual tiene que contribuir a desarrollar.

Las leyes de la pedagogía han sido tratadas por diferentes autores, entre otros, se puede citar al Colectivo de Especialistas del MINED (1984) Klingberg (1985) y los cubanos en (1988) y (1996). Estos últimos estudios sintetizan la relación que existe entre la sociedad y las instituciones docentes, con el fin de resolver la necesidad de la formación integral de los ciudadanos de esa sociedad y en particular de las nuevas generaciones, a través del establecimiento de dos leyes pedagógicas que son asumidas en el trabajo:

- La relación de la escuela con la vida, con el medio social.
- Relaciones internas entre los componentes del proceso docente-educativo: la educación a través de la instrucción.

La **primera ley** establece el vínculo entre el contexto social y el proceso pedagógico, concebido éste último como “la organización conjunta de la enseñanza y la educación para los educadores en la escuela, dirigida a la educación de la personalidad en sus diferentes contextos de actuación, en dependencia de los objetivos sociales a través de la interacción recíproca que

se establece entre docentes, alumnas, alumnos y demás componentes personalizados; y de estos entre si y con los demás agentes mediante la actividad y la comunicación". Gutiérrez Moreno (2002). En este sentido, para resolver el encargo social existe la escuela y el proceso que se desarrolla.

La **segunda ley** establece las relaciones entre los componentes que garantizan que se alcance el objetivo, que se pueda enfrentar el problema y resolverlo. El objetivo se alcanza mediante la apropiación de aquella parte de la cultura: el contenido que se ofrece y se alcanza en el método. El objetivo es el todo, el contenido sus partes.

En consecuencia se establece la relación cognitiva – afectiva en el contenido a apropiarse, así como la relación del individuo con el contexto social y por lo tanto educarse. Al explicar los nexos existentes entre la primera y la segunda ley se hace referencia a los principios y categoría ya que el proceso pedagógico en un proceso único, interrelacionado que transcurre como un sistema donde los elementos dependen unos de otros.

A través de la literatura consultada se pudo constatar la diversidad de criterios, enfoques y valoraciones existentes acerca del papel de los principios en la dirección del proceso pedagógico. Los mismos poseen una función metodológica al determinar el camino, la vía para alcanzar objetivos o fines de la actividad humana, actuando como guía de las metas que el hombre debe lograr para su transformación y la del medio, de ahí su carácter rector en el quehacer didáctico.

Se reconocen las categorías educación – instrucción, enseñanza – aprendizaje y formación – desarrollo, sin desconocer el papel que ocupan otras estrechamente vinculadas entre sí. Las categorías educación – instrucción se dan en una unidad, pues todo momento educativo es a la vez instructivo y afectivo. Las actividades metodológicas diseñadas en la investigación guardan entre sí la unidad de lo instructivo y lo educativo.

La enseñanza y el aprendizaje constituyen en el contexto educacional un proceso de interacción e intercomunicación de varios sujetos, ya que se dan en un grupo donde el profesor ocupa un lugar preponderante como pedagogo que lo organiza y conduce, pero en el que no se logran resultados positivos sin el protagonismo, la actitud y la motivación del docente que recibe la actividad. Estas categorías están presentes en las actividades docentes diseñadas,



puesto que las mismas propician un proceso donde los alumnos que interactúan de forma consistente para lograr un objetivo común: la resolución de ecuaciones trigonométricas. También se tuvo en cuenta en el desarrollo de la investigación las principales categorías de la didáctica o componentes del proceso pedagógico:

Personales: profesor – alumno.

Personalizados: objetivo - contenido - método – medios – evaluación - formas de organización.

Específicamente, en los componentes personales, bajo la dirección de un responsable, al igual que el docente que recibe las orientaciones se implica personalmente en el proceso de manera activa, participativa, vivencial y reflexiva. El contenido, lo que debe dominar los alumnos y alumnas, no es más que aquella parte de la cultura que la humanidad ha ido acopiando en su desarrollo histórico – social.

El Marxismo Leninismo le aporta sus propias leyes, manifiesta la dialéctica entre teoría y práctica teniendo en cuenta la relación sujeto-objeto en la que la actividad juega un papel importante. En lo psicológico lo planteado por LS Vigotsky, (1896-1934) que las actividades tienen el carácter mediatizado de la psiquis humana en la que subyace la génesis de la principal función de la personalidad: la autorregulación y su papel en la transformación de la psiquis, función que tiene como esencia la unidad de lo cognitivo y lo afectivo, elementos psicológicos que se encuentran en la base del sentido que el contenido adquiere para el sujeto, de esta forma el contenido psíquico sobre la base de la reflexión se convierte en regulador de los modos de actuación. , además de lo planteado en la Teoría de la Actividad de A.N. Leontiev para retomar la acción y profundizar en su estructura donde la actividad: constituye el proceso subordinado a una representación del resultado a alcanzar, o sea, a una meta u objetivo conscientemente planteado. (Bermúdez Morris, R., 2004: 182).

Su fundamento sociológico estriba en la concepción de la educación como factor de cambio, desde el punto de vista pedagógico se sustenta en la necesaria interrelación entre instrucción, educación y desarrollo, así como en el papel de la práctica y su vínculo con la teoría para lograr la resolución de problemas.

Estas actividades docentes que se realizaron permitieron que los alumnos y alumnas alcanzaran un nivel de conocimientos que les permitiera lograr un mayor grado de desarrollo próximo que garantizara el nivel deseado en un tiempo determinado.

El éxito de las actividades docentes para la resolución de problemas matemáticos de los alumnos y alumnas radica en el nivel de desempeño que adquiriera cada uno de ellos y en el papel activo en el desarrollo de estas.

En las actividades docentes para la resolución de problemas matemáticos para la preparación de los alumnos y alumnas se tuvo en cuenta su carácter **flexible**, ello significa que se puede modificar gradualmente en la propia actividad. Además no se considera como un proceso cerrado y acabado, sino todo lo contrario es susceptible de hacerle cambios, adaptaciones en dependencia de los sujetos y el diagnóstico de los alumnos y alumnas, el carácter **dinámico** de estas actividades se concibieron abiertas al cambio desde la perspectiva de considerar una permanente fluctuación, que va desarrollando su trayectoria a través de sucesiones reorganizativas, teniendo en cuenta las necesidades y potencialidades de los sujetos, el carácter **socializado**, a través de las actividades docentes diseñadas se tuvieron en cuenta los criterios, juicios, opiniones de los que aprenden.

Como puede apreciarse, el estudio evidencia condiciones propicias para la introducción de actividades docentes que permitan el desarrollo en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Las actividades que a continuación se proponen en el desarrollo de las clases entre otras tienen como estructura: título, objetivo, desarrollo, conclusiones, control y evaluación.

### **2.3 Propuestas de actividades docentes para contribuir a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos del preuniversitario.**

#### **Actividad docente 1**

**Título:** Las ecuaciones trigonométricas. Procedimientos para su resolución.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas.

## Desarrollo

Se inicia la preparación pidiéndoles a las alumnas y los alumnos que busquen debajo de sus sillas a ver qué encuentran. Encontrarán tarjetas con palabras y significados que necesitan. En ellas aparecen las palabras: ecuación, ecuación lineal, ecuación cuadrática, ecuación con radical, ecuación exponencial, ecuación logarítmica y diversos significados.

El alumno que tiene tarjeta debajo de su silla, la encuentra, le da lectura y se asocian a los diferentes significados que encuentran otros alumnos. Se les explicará que se van a preparar a través de la actividad en cuanto a las ecuaciones trigonométricas. Se ofrece a la definición teórica de los diversos tipos de ecuaciones y se introduce la de ecuación trigonométrica:

**Ecuación trigonométrica**  
**Son aquellas ecuaciones donde la variable aparece en el argumento de una función trigonométrica.**

-Se realiza intercambio con las alumnas y los alumnos sobre la definición teórica y se presentan ecuaciones para identificar la forma de la ecuación trigonométrica dada y cuáles de ellas lo son.

- $2x + 4 = x - 1$
- $x^2 + 10x + 25 = 0$
- $\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$  Sean las funciones:  $f(x) = 2^{3\sin x - \cos^2 x}$  y  $g(x) = 3x - 4$ . Determina los valores de  $x$  para los cuales se cumple que:  $f(x) = g(4)$
- Halla la abscisa  $x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) del punto donde se cortan los gráficos de las funciones dadas por las ecuaciones

$$f(x) = \sqrt{10 + \frac{9}{2} \cos x} \quad \text{y} \quad g(x) = 3 + \cos x$$

- Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:  $\frac{\sin 2x - 2 \sin x}{\sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2} = 1$

Se les pregunta a las alumnas y los alumnos si conocen cómo resolver la ecuación trigonométrica identificada. Se les presenta el proceder de cómo hacerlo esclareciendo que:

- Para la resolución de ecuaciones trigonométricas no existen reglas generales, pero pueden resultar de mucha utilidad las siguientes recomendaciones:

- **Obtener una ecuación algebraica mediante sustituciones, aplicar las fórmulas de adición, reducción o del ángulo duplo, si es necesario o las transformaciones algebraicas para expresar todas las funciones en términos de una sola y con el mismo argumento si es necesario.**
- **Expresar todas las funciones en términos de una sola y con el mismo argumento.**
- **Descomponer en factores, si es necesario.**
- **Al realizar transformaciones no equivalentes, se debe hacer la prueba pues pueden introducirse raíces extrañas.**
- **Escribir el conjunto solución.**

Además se esclarece que:

- Resolver ecuaciones trigonométricas usando una sucesión de pasos requiere del uso de manipulaciones algebraicas, identidades e ingeniosidad.

Se procede a la resolución de la ecuación trigonométrica a través de las recomendaciones presentadas.

- Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\cos 2x + 4\operatorname{sen}^2 x - 2 = 2(\cos x + 1)^2$$

Las alumnas y los alumnos resuelven ecuaciones presentadas y se insiste en cómo se resolvieron.

**Conclusiones:** Se realizan insistiendo en el proceder que se empleó para resolver las ecuaciones trigonométricas.

**Control y evaluación:** Se realizan a través de las respuestas ofrecidas por las alumnas y los alumnos al resolver los ejercicios.

## Actividad docente 2

**Título:** Expresando en una sola función.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en un término de una sola función.

**Desarrollo:**

Para comenzar la preparación se recuerda lo estudiado en el encuentro anterior. Se orienta el título y objetivo y se presentan tarjetas con las identidades trigonométricas, se explica que se hace necesario memorizarlas:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \sin x / \cos x$$

$$\cot x = \cos x / \sin x$$

$$1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

Se presentan ejercicios a las alumnas y los alumnos para resolverlos. Se ofrece la orientación necesaria.

1. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a)  $\cos 2x + \cos^2 x = 5 \sin^2 x$

b)  $\cos 2x + \sin x = 4 \sin^2 x$

Las alumnas y los alumnos resuelven los ejercicios.

**Conclusiones:**

Se invita a varios alumnas y alumnos a que expliquen lo realizado.

### **Control y evaluación:**

Se realiza evaluando los criterios e intervenciones que ofrecen las alumnas y los alumnos.

### **Actividad docente 3**

**Título:** Aplicando identidades.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.

### **Desarrollo:**

Se inicia presentando la palabra: **identidades** y se pregunta si se conoce su significado. Se invita a que expresen lo que significa para ellos esa palabra.

Escuchados sus criterios se les dice que en la actividad de hoy se les darán identidades que se tendrán que aprender para poder resolver ecuaciones trigonométricas.

#### **Fórmulas del ángulo duplo**

- ❖  $\text{Sen } 2x = 2\text{sen } x \cdot \text{cos } x$
- ❖  $\text{Cos } 2x = \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x = 2\text{cos}^2 x - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 x$
- ❖  $\text{Tan } 2x = \frac{2 \text{tan } x}{1 - \text{tan}^2 x}$

#### **Fórmulas de adición**

- $\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \cdot \text{Sen } \beta$
- $\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta - \text{cos } \alpha \cdot \text{Sen } \beta$
- $\text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{Sen } \beta$
- $\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{Sen } \beta$

Se resuelven los ejercicios siguientes:

1)  $\cos x + 1 = -\cos 2x$

2)  $\sin 2x = \sin x$

El profesor hará aclaraciones en casos necesarios.

**Conclusiones:**

Se resume lo fundamental tratado sobre las fórmulas del ángulo duplo y de adición.

**Control y evaluación:**

Se efectúa a partir de las respuestas ofrecidas por las alumnas y los alumnos y se insiste en el proceder de cómo lo resolvieron.

**Actividad docente 4.**

**Título:** Transformando expresiones trigonométricas.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).

**Desarrollo**

Se orienta el título y objetivo.

Se inicia la actividad presentándose el siguiente ejercicio. Se pide que se resuelva y se controla:

1. Transforma en producto:

a)  $2 \cos^2 x - \cos x$

b)  $\sin^2 x + 9 \sin x + 20$

c)  $\cos^2 x - \sin^2 x$

d)  $\tan^2 x - \cot^2 x$

e)  $\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x$

f)  $\cos^3 x + \sin^3 x$

**Conclusiones:**

Se resume por el profesor lo trabajado y se invita a varias alumnas y alumnos a comentar sobre las soluciones.

	II. CUADRANTE	III. CUADRANTE	IV. CUADRANTE
	$\pi - X$	$\pi + X$	$2\pi - X$
	$180^{\circ} - X^{\circ}$	$180^{\circ} + X^{\circ}$	$360^{\circ} - X^{\circ}$
sen x	sen x	- sen x	- sen x
cos x	- cos x	- cos x	cos x
tan x	- tan x	tan x	- tan x
cot x	- cot x	cot x	- cot x

**Control y evaluación:**

Se realiza a partir de la participación de las alumnas y los alumnos en la actividad.

**Actividad docente 5.**

**Título:** Aplicando fórmulas de reducción.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.

**Desarrollo**

Se inicia la actividad recordando las fórmulas de reducción.

Se orienta el título y objetivo y se invita a las alumnas y los alumnos a resolver:

Determina en qué cuadrante están las soluciones de las siguientes ecuaciones.

Calcule el ángulo. Fundamente su respuesta.

- a)  $\text{sen } x = 1/2$
- b)  $\text{cos } x = - 1/2$
- c)  $\text{tan } x = 1$
- d)  $\text{sen } x = \pm 1$
- e)  $\text{cot } x = -1$
- f)  $\text{sen } x = 0$

**Conclusiones:**

Se resume por el profesor lo trabajado y se invita a varias alumnas y alumnos a comentar sobre las soluciones.

**Control y evaluación:**

Se realiza a partir de la participación de las alumnas y los alumnos en la actividad.



### Actividad docente 6.

**Título:** Resolviendo ecuaciones.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

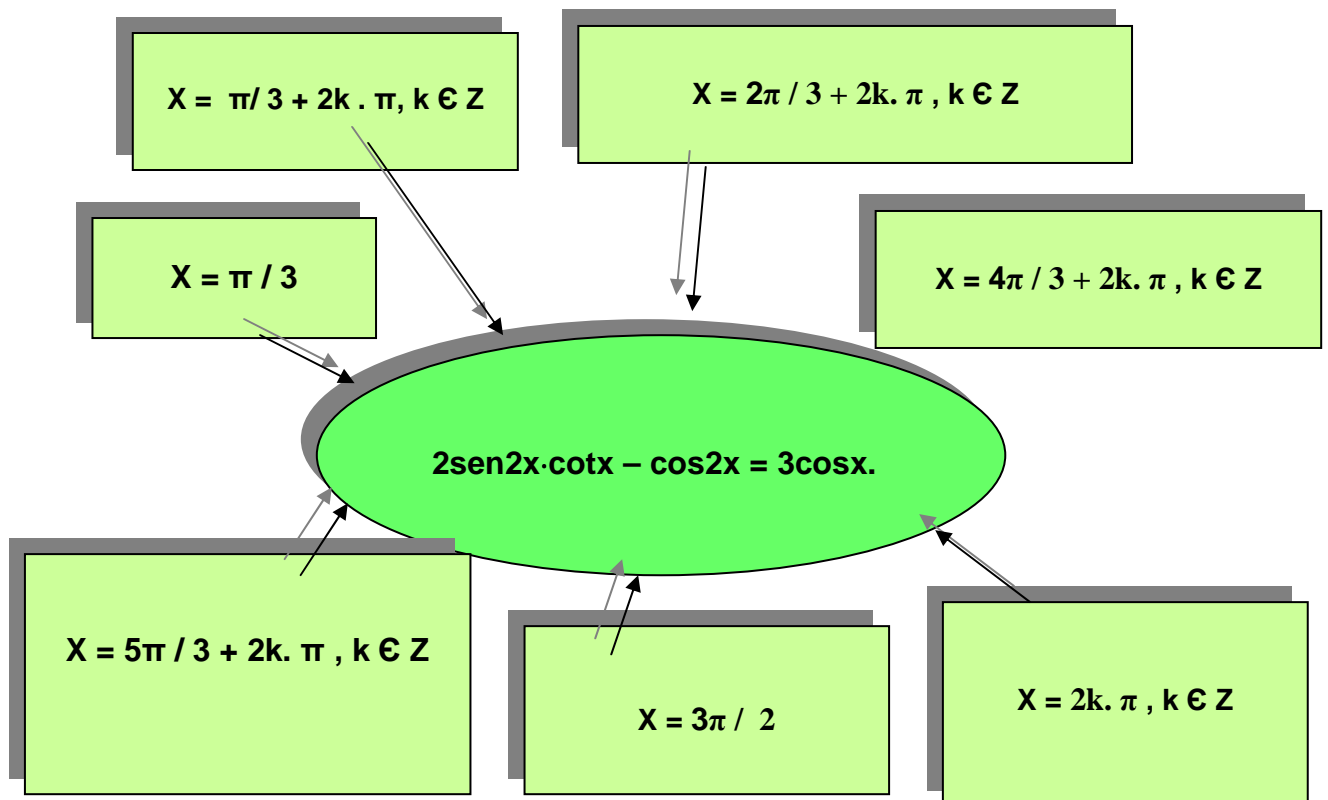
#### Desarrollo

Se comienza la actividad haciéndose un recordatorio sobre las recomendaciones a tener en cuenta para resolver ecuaciones trigonométricas.

Se orienta el título y objetivo.

Se presenta el siguiente ejercicio.

1. Fundamente cuál de las soluciones dada corresponde a la ecuación:



#### Conclusiones:

Se resume por el profesor lo trabajado y se invita a varias alumnas y alumnos a comentar sobre las soluciones.

#### Control y evaluación:

Se realiza a partir de la participación de las alumnas y los alumnos en la actividad.

### Actividad docente 7.

**Título:** Sustituye y resuelve.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

**Desarrollo**

Se inicia la actividad haciéndose un recordatorio sobre las recomendaciones a tener en cuenta para resolver ecuaciones trigonométricas.

Se orienta el título y objetivo.

Se presenta el siguiente ejercicio. Se orienta y se resuelve por parte de las alumnas y los alumnos.

- Sea la ecuación  $4\text{sen}^2x - 2(k + 1)\text{sen}x + 1 = 0$  con  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ .

a) Halla las soluciones de esta ecuación para  $k = \frac{3}{2}$ .

b) ¿Para qué valor positivo de k la ecuación tiene una sola solución?

**Conclusiones:**

Se resume por el profesor lo trabajado y se invita a varias alumnas y alumnos a comentar sobre las soluciones.

**Control y evaluación:**

Se realiza a partir de la participación de las alumnas y los alumnos en la actividad.

**Actividad docente 8.**

**Título:** Resolviendo igualando funciones.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

**Desarrollo**

Se orienta el título y objetivo.

Se inicia la actividad presentándose el siguiente ejercicio. Se pide que se resuelva y se controla:

- Sean  $f(x) = \frac{1 + \text{sen}Ax}{\cos Ax}$  y  $g(x) = \frac{A - 1 + \tan x}{A - 1 - \tan x}$

a) Demuestra que si  $A = 2$  la igualdad  $f(x) = g(x)$  es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

b) Considera  $A = 1$  y resuelve la ecuación  $f(x) = -1$ .

**Conclusiones:**

Se resume por el profesor lo trabajado y se invita a varias alumnas y alumnos a comentar sobre las soluciones.

**Control y evaluación:**

Se realiza a partir de la participación de las alumnas y los alumnos en la actividad.

**Actividad docente 9.**

**Título:** Resolviendo igualando funciones.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

**Desarrollo**

Se orienta el título y objetivo.

Se inicia la actividad presentándose el siguiente ejercicio. Se pide que se resuelva y se controla:

- Sean dadas las expresiones trigonométricas definidas para los valores admisibles de la variable.

$$A = \frac{1 - \cos x}{\cos x \tan x - \operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad B = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} - \cos^2 x$$

a) Comprueba que el valor numérico de la expresión A para  $x = \frac{2\pi}{3}$  es igual a  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

b) Determina los valores de  $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ , tales que  $B = -1$ .

**Conclusiones:**

Se resume por el profesor lo trabajado y se invita a varias alumnas y alumnos a comentar sobre las soluciones.

**Control y evaluación:**

Se realiza a partir de la participación de las alumnas y los alumnos en la actividad.

## Actividad docente 10.

**Título:** Interpretando gráficas.

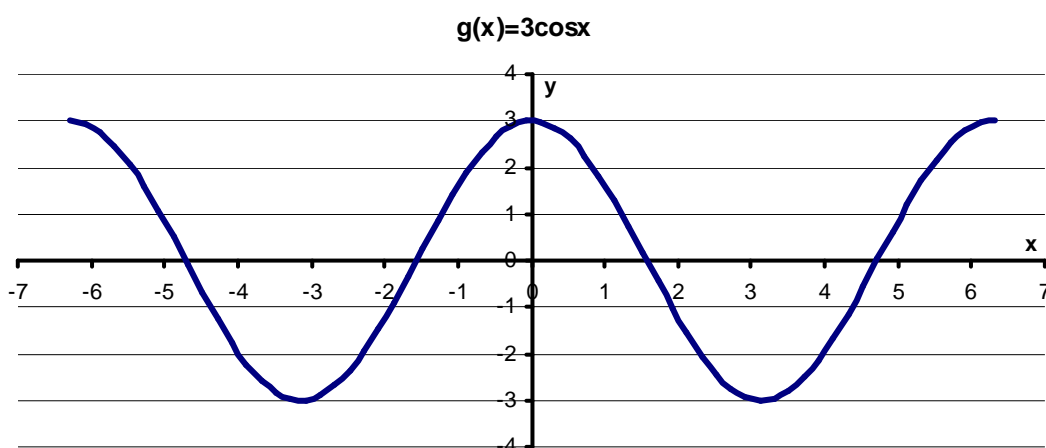
**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

### Desarrollo

Se orienta el título y objetivo.

Se inicia la actividad presentándose el siguiente ejercicio. Se pide que se resuelva y se controla

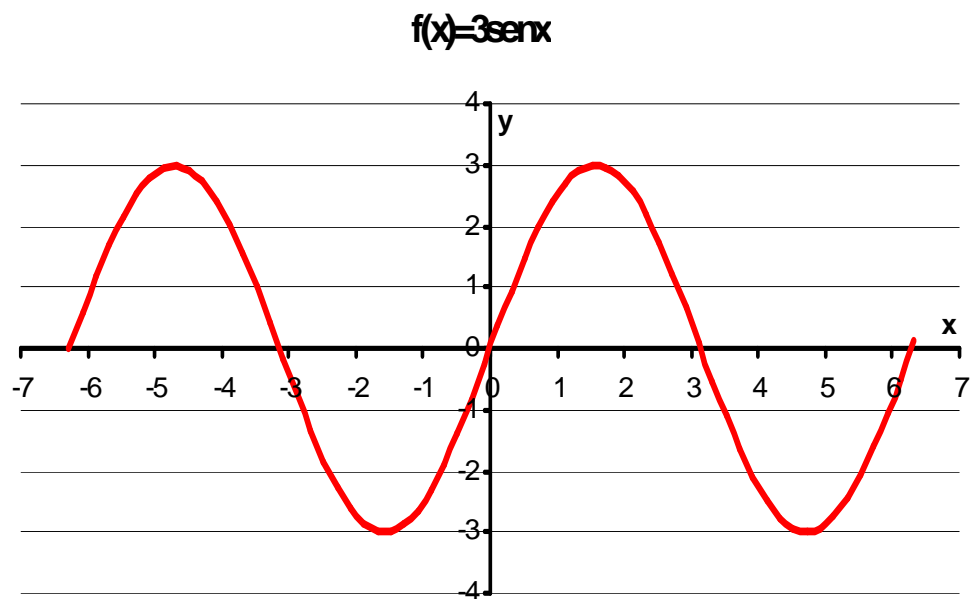
- Las gráficas del seno y el coseno para los valores de  $x$  que se encuentran en el intervalo  $[-2\pi; 2\pi]$ , o sea el intervalo aproximado  $[-6,28; 6,28]$  aparecen en las figuras 1 y 2.



Formular preguntas como las siguientes.

- ¿Cuál es el dominio de la función?
- ¿Cuál es la imagen en el intervalo dado?
- ¿Tiene ceros?. Dé valores aproximado de  $x$  donde la función alcance los ceros.
- ¿Es monótona la función?
- Dé un intervalo aproximado donde la función sea monótona creciente y uno donde sea monótona decreciente.

**Figura 1**



**Figura 2**

- ¿Tiene la función valor máximo y valor mínimo? ¿Cuál es? Dé un valor aproximado de  $x$  donde hayan puntos de máximo y puntos de mínimo.
- ¿Es una función par, o es impar?

La propiedad de la periodicidad de la función puede analizarse a partir de la observación del comportamiento de dicha función en el intervalo de  $[0;6,28]$  y en el intervalo  $[-6,28;0]$ . Se preguntará, ¿es similar el comportamiento del gráfico de la función al aumentar indefinidamente el intervalo donde toma valores  $x$ ?

Se puede orientar a los alumnos una actividad donde mediante el Excel construyan la tabla y el gráfico de estas funciones en el intervalo indicado y

pedir el análisis de algunas propiedades de la función en dicho intervalo, ejemplo:

Utilizando el Excel construir la tabla para los valores de  $x$  que se encuentren en el intervalo  $[-6,28;6,28]$ . (Utilice un incremento de 0,2)

- Determine el seno y el coseno para cada uno de los valores de  $x$ , hallados.
- Represente gráficamente los datos de la tabla. Debe utilizar una tabla para el seno, una para el coseno y una donde estén ambos gráficos.
- Determina si las representaciones gráficas obtenidas son funciones.
- A partir de la gráfica diga:
  - o La imagen de la función.
  - o Los valores aproximado de  $x$  donde la función tenga ceros.
  - o Los intervalos aproximado donde la función sea monótona creciente y donde sea monótona decreciente.
  - o El valor máximo y el valor mínimo.
  - o Un valor aproximado de  $x$  donde haya un máximo y donde haya un mínimo.

**Conclusiones:**

Se resume por el profesor lo trabajado y se invita a varias alumnas y alumnos a comentar sobre las soluciones.

**Control y evaluación:**

Se realiza a partir de la participación de las alumnas y los alumnos en la actividad.

## Actividad docente 11.

**Título:** Sistematizando.

**Objetivo:** Preparar a las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

### Desarrollo

Se orienta el título y objetivo.

Se inicia la actividad presentándose el siguiente ejercicio. Se pide que se resuelva y se controla

1. Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\cos^2 x + 4\sin^2 x - 2 = 2(\cos x + 1)^2$$

2. Expresa las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer  $a$  y  $b$  para que las ecuaciones siguientes tengan solución:

$$a) \sin x = \frac{2a - 3}{4 - a} \qquad b)$$

$$\cos x = \frac{5b - 2}{2 - 3b}$$

### Conclusiones.

Concluida la realización de los ejercicios las alumnas y los alumnos resumirán guiados por el profesor los aspectos fundamentales tratados durante la preparación sobre resolución de ecuaciones trigonométricas.

### Control y evaluación.

El control y la evaluación de las alumnas y los alumnos en esta actividad es a partir de las respuestas que den a las preguntas orales que se realizan.

Se invita a las alumnas y los alumnos a realizar la técnica participativa. “Cómo me sentía, cómo me siento”. Se presenta y explica la misma.

Desarrollo de la técnica participativa.

Se le entregarán a las alumnas y los alumnos tres tarjetas con una pregunta cada una, se les explica que responderán las tres preguntas que tienen las tarjetas, expresando con sinceridad y sin temores, sus criterios.

Las preguntas que aparecen en las tarjetas son las siguientes:

**- ¿Cómo me sentía al comenzar la preparación?**

Deben abordar cómo se encontraban para resolver ecuaciones trigonométricas cuando se inició esta la preparación a través de las actividades.

### - **¿Cómo me sentí durante mi preparación?**

Deben abordar cómo considera transcurrió toda su preparación y lo más significativo para ella en el desarrollo de las actividades.

### - **¿Cómo me siento finalizada la preparación?**

Deben emitir su criterio si se encuentran o no preparados, en qué aspecto consideran se requiere seguir profundizando y sus opiniones en relación con las actividades aplicadas.

El profesor los estimula a seguirse preparando.

## **2.4 Fase experimental y constatación final**

### **2.4.1 Fase experimental**

Para lograr los resultados finales, se procedió primero a la aplicación de la fase experimental, en la misma se crearon las condiciones necesarias para desarrollar las actividades docentes y de esta forma facilitar el cambio entre el estado inicial y final, dando cumplimiento al objetivo general planteando en la misma: contribuir a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de 11. grado del preuniversitario Frank País García, del municipio Trinidad.

Para la implementación de las actividades docentes se procedió siguiendo lo establecido para cada una de ellas. Además se aplicaron controles que permitieron verificar el comportamiento y cumplimiento del objetivo. Esto se realizó para no simplificar los resultados solamente a esta etapa final.

**En la actividad No 1** que consistió en preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas, se corroboró que al inicio de la misma estos no se sintieron seguros al emitir las respuestas pues tenían dudas acerca del significado motivado por el escaso dominio acerca de estas palabras. Luego de la realización del intercambio con las alumnas y los alumnos sobre la definición teórica y la presentación de ecuaciones para identificar la forma de la ecuación trigonométrica se evidenciaron cambios en el conocimiento ya que dominaron con claridad el significado de estas palabras, el 20% de ellos tuvo más dificultad para realizar el ejercicio por lo que se emplearon niveles de ayuda y estrategias para que se dominaran dicho aspecto. La actividad se realizó también socializada lo que motivó el aprendizaje y trajo consigo que en el control de la misma se interesaran por la calificación obtenida.



**En actividad No 2** que consistió en preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función se observó que el 80% de las alumnas y los alumnos presentaron dificultades al inicio, se constató que tenían dificultades en la memorización de las identidades trigonométricas ya después con la práctica cumplieron con el ejercicio y determinaron el conjunto solución de las ecuaciones con menos dificultad respondiendo el 94% las alumnas y los alumnos. De acuerdo a la aceptación del ejercicio y al control realizado se establecieron normativas de tiempo para la realización de los mismos lo que los motivó para la realización de los demás incisos en especial para los más aventajados.

**En la actividad No 3** que consistió en preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades. Se evidenció el interés al participar en la actividad ya que se emplearon diferentes alternativas para lograr estados de ánimo favorables en ellos y especialmente se trazaron metas a alcanzar por cada uno de acuerdo a las potencialidades.

Después de concluido el ejercicio se realizó el análisis del mismo con las alumnas y los alumnos para que cada uno conociera los resultados obtenidos de acuerdo al tiempo realizado y se pudo constatar que 20 que representa el 67.7% respondieron acertadamente, solamente 10 el 33.3%, no lo hizo, por lo que se les prestaron niveles de ayuda y se le dio atención diferenciada en este sentido. Las mayores dificultades en este ejercicio se centraron en las fórmulas de adicción, por lo que fue necesario realizar explicaciones claras antes de repetir en otro momento este ejercicio.

**En la actividad No 4** que consistió en preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma), donde había que resolver y controlar transformándose en producto, se corroboró que al inicio del ejercicio se manifestaron mayores dificultades, solamente el 30% de estos tenía dominio del mismo pero con la ejercitación se logro un dominio mayor, sintieron motivación por la realización de este tipo de ejercicio, al tratarse de una actividad colectiva donde los resultados personales se subordinan a los del

colectivo, propiciando una comunicación favorable entre ellos, por lo que el 94% evidenciaron un mayor dominio.

**En la actividad No 5** que consistió en preparar a las alumnas y los alumnos en el dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas desde el inicio se demostró dominio por parte de los escolares se interesaron por cumplir con calidad con el ejercicio, el 96% demostró dominio a través del control realizado, además se evidenció que la puesta en práctica de las variantes del ejercicio surtieron un buen efecto en la calidad de la ejecución del mismo siempre buscando ganar en calidad, que se dominara a la perfección este contenido.

**En las actividades No 6, 7, 8, 9** que consistieron en preparar a las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas, se constató que en la actividad 6 y 7 el 23% tenían dificultades al trabajar completamente independientes luego se fueron familiarizando, se prestaron los niveles de ayuda correspondientes por lo que con el transcurso de las actividades 8 y 9 solamente 1 continuaba presentando dificultades, siendo necesario prestar niveles de ayuda para que cumplieran con la con calidad la realización de los ejercicios. En estas actividades el 100% de las alumnas y los alumnos mostraron interés y se sintieron motivados durante la realización de la misma. Al finalizar se seleccionaron los de mejores rendimientos en los ejercicios, lo cual despertó entusiasmo en ellos, además de reconocerse el esfuerzo realizado por los demás.

**En la actividad No 10** que se dedicó a la interpretación de gráficas, se demostró que al inicio el 84% de las alumnas y los alumnos no realizaban el ejercicio correctamente, por lo que fue necesario prestar niveles de ayuda. Luego con la puesta en práctica de la actividad se demostró las posibilidades que tenían para cumplir con el propósito. A los aventajados se les indicó que realizarán el 1y el 2 y al resto se mantuvo realizando el ejercicio hasta que pudieron resolverlo. Se seleccionaron los mejores.

**En la actividad No 11** que tenía como objetivo sistematizar lo aprendido y concluir con las actividades diseñadas se corroboró que 29 alumnas y alumnos habían vencido los objetivos propuestos, solo 1 alumno se quedó en el nivel bajo por lo que se continuó la actividad diferenciada con él.

Durante el proceso de investigación se constató que el nivel de preparación de las alumnas y los alumnos, la motivación, participación, el grado de independencia cognoscitiva para el desarrollo de las primeras actividades era bajo; a medida que se aplicaron fueron aumentando el nivel en lo referido a los aspectos mencionados. Es importante destacar que en el desarrollo de las tres últimas actividades los estudiantes resolvieron las ecuaciones por diferentes vías de solución y sin una preferencia marcada.

#### **2.4.2 Constatación final.**

Al concluir la aplicación de las actividades docentes se procedió a comprobar la efectividad originada en la práctica educativa y el estado de transformación de las alumnas y los alumnos tomados como muestra, para ello se aplicó nuevamente la guía de observación a estos en el desarrollo de las clases (Anexo I), y la prueba pedagógica final (Anexo VI).

Los resultados cuantitativos en las observaciones efectuadas según guía de observación (Anexo I) se reflejan en la siguiente tabla. Como se puede apreciar, la misma se encuentran divididas en siete partes, en la primera se reflejan los aspectos medidos durante las observaciones, de la segunda a la séptima los resultados alcanzados en cada aspectos según los niveles de preparación en cantidad y significado respecto a la muestra.

**Tabla 1 Resultados de las observaciones efectuadas a las alumnas y los alumnos en el desarrollo de las clases.**

Aspectos a observar	Alto	%	Medio	%	Bajo	%
1	18	60	12	40	0	-
2	21	70	6	20	3	10
3	21	70	7	23,3	2	6.7
4	15	50	12	40	3	10
5	21	70	9	30	0	-

Se pudo constatar, tal como se refleja en la tabla que los resultados mejoraron considerablemente.

Se evidenció cualitativamente un acenso en el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos al resolver ecuaciones trigonométricas, al poseer el 63.3% de la muestra un nivel alto, el 33.3 % un nivel medio y solo el 3.3 % quedó en un nivel bajo, según muestra el anexo VII al evaluar por indicadores y el total después de aplicadas las actividades docentes.

Estos resultados se corroboran con la aplicación de la prueba pedagógica final (Anexo VI) en la que se pedía hallar el conjunto solución y los resultados se evidencian en tabla 2 de distribución de frecuencia que aparece a continuación. Como se puede apreciar, las mismas se encuentran divididas en cuatro partes, en la primera se reflejan los indicadores, en la segunda aparece la escala bajo, medio, alto y el total, en la tercera frecuencia absoluta ( $F_i$ ) y en la cuarta la frecuencia relativa porcentual  $f_i(\%)$ , los resultados alcanzados según los niveles de desempeño en cantidad y significado respecto a la muestra.

Al ubicar los alumnos en los diferentes niveles según el desempeño demostrado se obtuvo que: 19 (63,3%) alumnas y alumnos se ubican en un nivel alto puesto que tuvieron los cinco indicadores evaluados de (A), 10(33.3%) se ubican en un nivel medio, tuvieron los tres primeros indicadores evaluados de (A), y 1 en nivel bajo, al tener menos de tres indicadores evaluados de (A).

Es evidente, al analizar los resultados arrojados en la prueba pedagógica final, que estos son superiores en cantidad y calidad con respecto a los alcanzados en el diagnóstico inicial en el que no se encontraba ningún alumno ubicado en un nivel alto al por no poseer los conocimientos necesarios sobre la resolución de ecuaciones trigonométricas; una vez aplicadas las actividades docentes se observan cambios significativos.

**Tabla 2 de distribución de frecuencia de la prueba pedagógica después de aplicar las actividades docentes.**

Indicadores	Escala	Frecuencia absoluta Fi	Frecuencia relativa porcentual fi(%)
1)	B	0	0%
	M	12	40%
	A	18	60%
	T	30	-
2)	B	3	10%
	M	6	20%
	A	21	70%
	T	30	-
3)	B	2	6.7%
	M	7	23.3%
	A	21	70%
	T	30	-
4)	B	3	10%
	M	12	40%
	A	15	50%
	T	30	-
5)	B	0	0%
	M	9	30%
	A	21	70%
	T	30	-
Total	B	1	3.3%
	M	10	33.3%
	A	19	63.3%
	T	30	-

En la tabla 3 se reflejan los resultados del control de los indicadores antes y después de la aplicación de las actividades docentes. El autor considera necesario explicar esta tabla para una mejor interpretación de los resultados. La misma se encuentra dividida en cuatro partes, en la primera se reflejan los indicadores declarados, en la segunda los resultados antes de la aplicación de las actividades docentes, en la tercera los resultados alcanzados después de la aplicación de las actividades docentes y en la cuarta la diferencia entre una y otra.

**Tabla 3 Resultados del control de los indicadores antes y después de la aplicación de las actividades docentes.**

Indicadores	Antes			Después			Diferencia		
	B	M	A	B	M	A	B	M	A
1	18	9	3	0	12	18	-18	+3	+15
2	20	10	0	3	6	21	-17	-4	+21
3	21	9	0	2	7	21	-19	-2	+21
4	16	10	4	3	12	15	-13	+2	+11
5	29	1	0	0	9	21	-29	+8	+21

Al compararse los resultados es indiscutible el nivel de superioridad alcanzado por las alumnas y los alumnos para resolver ecuaciones trigonométricas. Una vez aplicadas las actividades docentes, se logra que en los cinco indicadores 19 (63,3%) alumnas y alumnos se ubican en un nivel alto puesto que tuvieron los cinco indicadores evaluados de (A), 10(33.3%) se ubican en un nivel medio, tuvieron los tres primeros indicadores evaluados de (A), y 1 en nivel bajo, al tener menos de tres indicadores evaluados de (A). Lo anterior se resume en la evaluación por indicadores después de aplicadas las actividades docentes (Anexo VII).

El análisis efectuado hasta aquí permite considerar la validez de la variable independiente y su influencia en la variable dependiente, ya que contribuyó a la resolución de ecuaciones trigonométricas en las alumnas y los alumnos de onceno grado del preuniversitario Frank País García, del municipio de Trinidad, por los siguientes argumentos:

- Se elevó gradualmente su nivel de desempeño teniendo en cuenta el dominio teórico y la aplicación del contenido sobre ecuaciones trigonométricas para llevar a cabo el sistema de pasos a seguir para determinar las soluciones, utilizando las transformaciones adecuadas comprobarlas y escribir el conjunto solución.
- Se lograron cambios significativos en los resultados en evaluaciones sistemáticas, parciales y finales con relación a la resolución de ecuaciones trigonométricas.
- El acceso a los nuevos conocimientos se logró mediante las actividades docentes elaboradas.

Se considera necesario apuntar que es factible la aplicación de las actividades digitalizadas para los escolares de sexto grado pues se concibieron con la flexibilidad idónea para ser enriquecidas en la práctica y adecuarlas a las condiciones reales concretas. Para su utilización solo se precisa tener presente el carácter diferenciado que deben llevar en correspondencia con las potencialidades y necesidades de los escolares.

## CONCLUSIONES

1. La sistematización de conocimientos fundamentales y de la experiencia del autor de esta investigación en cuanto a la enseñanza de la Matemática en el preuniversitario, en particular en el trabajo con ecuaciones trigonométricas, permite determinar los conceptos, ideas, proposiciones que son fundamentales para conformar los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el desarrollo de habilidades de los estudiantes en la resolución de ecuaciones trigonométricas.
2. El estudio diagnóstico realizado arrojó deficiencias en el desarrollo de habilidades en la resolución de ecuaciones trigonométricas, al apreciarse ciertas manifestaciones relacionadas con las insuficiencias en esta práctica en cuanto a: poco dominio del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas, poco dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades, poco dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función, poco dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma), poco dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen los las ecuaciones transformadas.
3. A partir del estado real que presentan los estudiantes y sobre la base sus potencialidades, además, las condiciones materiales que hoy tienen las escuelas, se diseñan y aplican actividades docentes sobre la resolución de ecuaciones trigonométricas, en su contenido se retoman los elementos básicos adquiridos en los diferentes niveles de enseñanza y se proyectan desde un estilo distinto al que aparece en los libros de texto actuales. Estas actividades provocan en los estudiantes de preuniversitario un esfuerzo cognitivo de mayor compromiso con la solución de los mismos, incluso, con ejercicios que se les puede presentar en la vida profesional.
4. La evaluación de los efectos originados en los estudiantes, demuestra los cambios positivos en los niveles de desarrollo cognitivo, en la motivación y en la actitud de estos hacia la resolución de de ecuaciones trigonométricas.



## **RECOMENDACIONES:**

- Valorar por parte de las estructuras científicas y metodológicas autorizadas del territorio, la posibilidad de divulgar, por diferentes vías, los resultados de esta investigación en el resto de los municipios para abrir nuevas aristas de exploración sobre esta problemática, incluso, en otros niveles de enseñanza.

## BIBLIOGRAFÍA

Álvarez de Zayas, C. et al. (1995). Metodología de la investigación científica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (1996). Hacia una escuela de excelencia. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Anfossi, A. (1955). Curso de Trigonometría Rectilínea. México: Editorial Progreso S.A.

Ballester Pedroso, S. et al. (1992). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. (t.I). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2000). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. (t.II). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Barnett, R. A. et al. (2003). Precálculo. Funciones y gráficas. (V. I). Tercera parte. La Habana: Editorial Félix Varela.

Brigitte, F. et al. (1979). Orientaciones metodológicas Matemática 12 mo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Buenacilla Recio, R. (2006). "Pensamiento filosófico y educativo, latinoamericano, caribeño y cubano". En IPLAC. Maestría En Ciencias de la Educación.

Fundamentos de las Ciencias en la Educación. Módulo II. Primera parte. (pp.7-13). La Habana.

Campistrous Pérez, L. et al. (1989). Orientaciones metodológicas Matemática décimo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (1989). Orientaciones metodológicas Matemática onceno grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (1989). Orientaciones metodológica Matemática duodécimo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (1990). Matemática 11no grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2000). Matemática 10mo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2002). Matemática 12mo grado. Primera parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Capote Bracho, L. (2005). "El docente y la comunicación en el aula. Comunicación didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje". En Pedagogía a tu Alcance. (Soporte Digital).

Carpio Mesa, N. R. y Salvador Jiménez, L. (2007). Trabajo metodológico del docente. Propuesta para el preuniversitario. La Habana: Editorial Academia.

Castellanos Simóns, D. (1982). "Principios del trabajo independiente" En Seminario Nacional a Dirigentes, metodólogos e inspectores de las direcciones provinciales y municipales de educación. (pp 637). La Habana.

\_\_\_\_\_ et al, (2002). Aprender y enseñar en la escuela. La Habana: Editorial Pueblo y Educación,

\_\_\_\_\_ (2006). "Herramientas Psicopedagógicas para la dirección del aprendizaje escolar". En IPLAC. Maestría en Ciencias de la Educación.

Fundamentos de las Ciencias de la Educación. Módulo II. Segunda Parte. (pp. 12-19). La Habana.

Castro Ruz, F. (1981). Discurso en la graduación del Destacamento Pedagógico Manuel Ascunce Domenech. La Habana: MINED.

\_\_\_\_\_ (2001). Discurso pronunciado en el Acto de Graduación del Primer Curso Emergente de Formación de Maestros Primarios, efectuado en el Teatro Carlos Marx, el 15 de marzo del 2001. Disponible en <http://www.cuba.cu/gobierno/discursos/>

\_\_\_\_\_ (2002). Discurso en el acto central por la inauguración del curso escolar 2002-2003/septiembre. Disponible en <http://www.cuba.cu/gobierno/discursos/>

\_\_\_\_\_ (2003). Discurso en el acto de inauguración del curso escolar 2003-2004/septiembre. Disponible en <http://www.cuba.cu/gobierno/discursos/>

\_\_\_\_\_ (2003). Discurso pronunciado en la clausura del Congreso Pedagogía 2003, en el Teatro Carlos Marx. Disponible en <http://www.cuba.cu/gobierno/discursos/>

Chinea Campo, A. (2007). Estrategia metodológica para perfeccionar la labor del jefe de ciclo en el trabajo metodológico. Tesis en opción al título Académico de Máster en Ciencias Pedagógicas

Cerezal Mezquita, J. et al. . (2005). "El diseño metodológico de la investigación". En IPLAC. Maestría En Ciencias de la Educación. Fundamentos de las Ciencias de la educación. Módulo II. Primera parte. (pp.15-19). La Habana.

Coloma Rodríguez, O. et al.(2005). Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero, Holguín. Eureka (Software). Holguín: CESOFTAD.

Coro, A. (2005). "Informática y comunicaciones". Punto cu, (33). (pp. 4), La Habana.

Cubela González, J. M. y Mariño Castellano, J. T. (2006). "Caracterización general del estudiante de preuniversitario". En IPLAC. Maestría En Ciencias de la Educación. Mención en Educación Preuniversitaria. Módulo III. Primera parte. (pp.37-42). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2006). "Vías para elevar la efectividad del proceso educativo en el preuniversitario". En IPLAC. Maestría En Ciencias de la Educación. Mención en Educación Preuniversitaria. Módulo III. Primera parte. (pp.44-54). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Danilov, M. A. y Skatkin, M. N. (1978). Didáctica de la escuela media. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Durán Jorrín, A. (1985). "Ejemplo de utilización de las computadoras como medio de enseñanza". Sociedad Cubana de Matemática, (5). (pp 40-44). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Expósito Ricardo, C. et al. (2001). Algunos elementos de metodología de la Enseñanza de la Informática. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Fernández Aquino, O. (2004). La clase metodológica. Un modelo instrumental para la formación del profesor universitario. Centro universitario José Martí. Sancti Spiritus. Disponible en orlando@suss.co.cu

Ferrer Vicente, M. y Rebollar Morote, A. (1999). Cómo dirigir el proceso de formación de habilidades matemáticas. Instituto Superior Pedagógico. Santiago de Cuba.

Ferrer Pérez, R. (1972). Conferencia Internacional de la Educación de Adultos. La Habana:

García Batista, G. (comp.). (2003). Compendio de Pedagogía. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ et al. (2005). El trabajo independiente. Sus formas de realización, La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

García González, E. et al. (2001). Curso de informática para niños, metodología y documentación. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

García Otero, J. (2002). Selección de lecturas sobre medios de enseñanza. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

García Ramis, L. et al. (1996). Los retos del cambio educativo. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Gener Navarro, E. et al. (2000). Elementos de informática básica, La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

González, A. M. (2002). "La dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje: un reto para el cambio educativo". En Aprender es crecer .La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

González, C. (1992). El desafío de los nuevos medios de comunicación en México. AMIC.

González Castro, V. (1986). Teoría y práctica de los medios de enseñanza. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

González González, D. (2005). La preparación de los maestros para la enseñanza aprendizaje de la formulación del problema matemático. Instituto Superior Pedagógico. Ciudad Habana.

González Maura, V. et al. (2001). Psicología para Educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Hernández Ávalos, J. (2002) ¿Cómo estás en Matemática?. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Hosfman, J. (1968). Historia de la Matemática. La Habana. Edición Revolucionaria. Instituto Pedagógico Iberoamericano y Caribeño. (2005). Maestría en Ciencias de la Educación. Fundamentos de la Investigación Educativa .Módulo I. (CD). La Habana: EMPROMAVE.

\_\_\_\_\_ (2006). Maestría en Ciencias de la Educación. Fundamentos de las Ciencias de la Educación, Módulo II. (CD). La Habana: EMPROMAVE.

\_\_\_\_\_ (2006). Maestría en Ciencias de la Educación. Mención en Educación Preuniversitaria. Módulo III. Primera, Segunda y Tercera parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Kina, D. et al. (1977). Orientaciones metodológicas Matemática 10mo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Klingberg, L. (1978). Introducción a la didáctica general. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Labañino Rizzo, C. H. (2004). "El software educativo". En V Seminario Nacional para Educadores. (pp. 13-14). La Habana.

\_\_\_\_\_ y del Toro Rodríguez, M. (2005). Multimedia para la educación. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Labarrere Reyes, G. y Valdivia Pairol, G. E. (1988). Pedagogía. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Leontiev, A. N. y Rubestein, S. L. (1961). Psicología. La Habana: Imprenta Nacional de Cuba.

Lima Monteagudo, S. et al. (2005). "Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la Institución educativa". En IPLAC. Maestría En Ciencias de la Educación. Fundamentos de la Investigación Educativa. Módulo I. Segunda parte. (pp.20-29). La Habana.

Manzano Guzmán, R. (2005). El taller educativo. (soporte digital).

Martí Pérez, J. (1976). Escritos sobre Educación. La Habana. Editorial Ciencias Sociales.

Martínez LLantada, M. y Bernaza Rodríguez, G. (2005). Metodología de la Investigación educativa. Desafíos y polémicas actuales. La Habana: Editorial Ciencias Sociales.

Ministerio de Educación. Cuba. (1974). El plan de perfeccionamiento y desarrollo del Sistema Nacional de Educación en Cuba. La Habana.

\_\_\_\_\_ (1979). Resolución Ministerial No. 300. Reglamento del trabajo metodológico de los niveles Nacional, Provincial y Municipal. La Habana.

\_\_\_\_\_ (1997). Programa Director de la Matemática. La Habana.

\_\_\_\_\_ (1999). Resolución Ministerial No. 85. Precisiones para el trabajo metodológico. La Habana.

\_\_\_\_\_ (2000). I Seminario Nacional para el personal docente. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2000). Carta Circular 01. La Habana.

\_\_\_\_\_ (2001). II Seminario Nacional para el personal docente. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2002). III Seminario Nacional para el personal docente. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2003). IV Seminario Nacional para el personal docente. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2004) V Seminario Nacional para Educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2005) Programas séptimo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2005). Programas octavo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2005) Programas noveno grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2005) VI Seminario Nacional para Educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2006) Programas décimo grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2006) Programas oncenno grado. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2006) VII Seminario Nacional para Educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2007) VIII Seminario Nacional para Educadores. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ (2008). Resolución Ministerial No. 119. Reglamento para el trabajo metodológico en el Ministerio de Educación. La Habana.

Moreno Castañeda, M. J. (Comp.) (2003). Psicología de la personalidad. Selección de lecturas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Partido Comunista de Cuba. (1978). "Política educacional". En Tesis y Resoluciones. Primer congreso del PCC. La Habana: Editorial de Ciencias Sociales.

Paz, A. (1968). Trigonometría. Matemática Cuarto Curso. La Habana: Pueblo y Educación.

Pérez Casas, A. E. (2008). La preparación de los Jefes de Departamento de Ciencias en el tratamiento de la resolución de problemas. Tesis en opción al título académico de Máster en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico. Sancti Spíritus.

Pérez Rodríguez, G. et al. (2002). Metodología de la investigación educativa. Primera Parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Pidkasisty, P. I. (1986). La actividad cognoscitiva independiente de los alumnos en la enseñanza. La Habana: Editorial Pueblo y Educación

Programa del Partido comunista de cuba. (1985). Tercer Congreso del Partido. La Habana.

Rangel, Y. L. (2002). Dirección del Aprendizaje y Desarrollo Profesional. Sancti Spíritus: Editorial Luminarias.

Rebollar, A. (2000). Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba.

Rico Montero, P. (2003). La Zona de Desarrollo Próximo. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Rivero Pérez, H., Mesa Carpio, N. y Torres Rivera. R. (2007). La superación de los profesores del preuniversitario en las condiciones de las transformaciones en la educación. (Soporte digital).

Rodríguez Lama, R. (2002). "La informática y la educación", Giga, (2). (pp 22-24). La Habana. ISSN 1028-270X.

\_\_\_\_\_ et al. (2005). Introducción a la informática educativa. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Rojas Arca, C. (1987). "El trabajo independiente de los alumnos. Su esencia y clasificación". Revista Varona. (pp 64). La Habana.

Rubinstein. (1977). Principios de Psicología General. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Ruíz Aguilera, A. (2005). "Bases de la investigación educativa y sistematización de la práctica educativa". En IPLAC. Maestría en Ciencias de la Educación.

Fundamentos de la investigación educativa. Módulo 1 (CD). La Habana: EMPROMAVE.

Ruíz Pérez, A. M. (2007). La integración de conceptos matemáticos a partir de relaciones conceptuales clásicas en la educación preuniversitaria. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico. Sancti Spíritus.

Sandoval Torres, A. (2000). Actividades de Matemática para el Ingreso a la Educación Superior. La Habana: Editorial Fama.

Santana de Armas, H. (1999). La evaluación del aprendizaje de la Matemática. Instituto Superior Pedagógico. Ciudad Habana.

Sharp, H. (1974). Elementos de Trigonometría Plana. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Silvestre Oramas M. et al. (2001). "Problemas en el aprendizaje de los alumnos y estrategias generales para su atención". En II Seminario Nacional para educadores. (pp. 4-12). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

\_\_\_\_\_ y Zilbersteín, J. (2002). Hacia una Didáctica Desarrolladora. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Stewart, J. (2006). Cálculo con Trascendentales Tempranas. Parte II. La Habana: Editorial Félix Varela.



Swokowski, E. W. (2003). "Funciones trigonométricas". En Cálculo con Geometría Analítica. (T,II). La Habana: Editorial Félix Varela.

Torres, P. (2000). La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos. ISPEJV. Impresión ligera.

Valdés Veloz, H. (2004). "Evaluación de la calidad de la educación". En V Seminario Nacional para Educadores. (pp 4). La Habana.

Vigostki, L. S. (1987). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. La Habana: Editorial Científico – Técnica.

\_\_\_\_\_ (1981): Pensamiento y Lenguaje. La Habana: Edición Revolucionaria.

Werner, J. (1982). Conferencias sobre metodología de la enseñanza de Matemática 1. La Habana Editorial Pueblo y Educación.

Wussing, H. (1989). Conferencias sobre Historia de la Matemática. La Habana Editorial Pueblo y Educación.

## ANEXO I

### **Guía de observación a las alumnas y los alumnos en el desarrollo de las clases.**

**Objetivo:** Constatar el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas en el desarrollo de las clases.

#### **Aspectos de la guía.**

1. Demuestran dominio de los procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas.
2. Demuestran dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.
3. Demuestran dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función.
- 4 Demuestran dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
5. Demuestran dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.

## ANEXO II

### Escala valorativa.

**Tabla de criterios para valorar el estado de los indicadores establecidos**

	<b>Alto</b>	<b>Medio</b>	<b>Bajo</b>
Dominio del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas	Dominio correcto del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas	Dominio en parte del contenido y de procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas	No domina el contenido y los procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas
Dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades	Dominio correcto para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades	Dominio en parte para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades	No tiene dominio para expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades
Dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función	Dominio correcto de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función	Dominio en parte de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función	No tiene dominio de las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función
Dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma)	Dominio correcto del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma)	Dominio en parte del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma)	No tiene dominio del trabajo con variables para resolver las ecuaciones haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma)
Dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas	Dominio correcto del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas	Dominio en parte del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas	No tiene dominio del trabajo con las fórmulas de reducción para determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas

## ANEXO II A

### Escala valorativa por indicador:

<b>Categoría</b>	<b>Índice</b>
Alto (A)	Tener los cinco indicadores evaluados de (A)
Medio (M)	Tener los tres primeros indicadores evaluados de (A)
Bajo (B)	Tener menos de tres indicadores evaluados de (A)

## ANEXO III

### Prueba Pedagógica Inicial

**Objetivo:** Constatar el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Resuelve la siguiente ecuación. Deja por escrito tus razonamientos.

Cuestionario:

- Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x + \frac{2}{\cos x} = \cos x$$

## ANEXO V

### Evaluación por indicadores antes de aplicadas las actividades docentes.

Indicadores Muestra	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Total
1	B	B	B	B	B	B
2	B	B	M	M	B	B
3	B	B	B	B	B	B
4	B	B	B	B	B	B
5	M	M	M	M	B	M
6	B	B	B	B	B	B
7	M	M	B	A	B	M
8	A	M	M	A	B	M
9	M	B	B	M	B	B
10	M	M	M	M	B	M
11	B	B	B	B	B	B
12	B	B	B	B	B	B
13	B	B	B	B	B	B
14	B	B	B	B	B	B
15	B	B	B	B	B	B
16	M	B	B	A	B	B
17	A	M	M	M	M	M
18	B	B	B	B	B	B
19	B	B	B	B	B	B
20	M	M	M	M	B	M
21	M	M	B	B	B	B
22	M	B	B	B	B	B
23	B	M	M	M	B	M
24	B	M	M	M	B	M
25	B	B	B	B	B	B
26	B	B	B	B	B	B
27	B	B	B	B	B	B
28	M	B	B	M	B	B
29	B	M	M	M	B	M
30	A	B	B	A	B	M
Total	B - 18	B - 20	B - 21	B - 16	B - 29	B - 20
	M - 9	M - 10	M - 9	M - 10	M - 1	M - 10
	A - 3	A - 0	A - 0	A - 4	A - 0	A - 0

## ANEXO IV

**Tabla de distribución de frecuencia de la prueba pedagógica antes de aplicar las actividades docentes.**

Indicadores	Escala	Frecuencia absoluta Fi	Frecuencia relativa porcentual fi(%)
1)	B	18	60%
	M	9	30%
	A	3	10%
	T	30	-
2)	B	20	66.7%
	M	10	33.3%
	A	0	0%
	T	30	-
3)	B	21	70%
	M	9	30%
	A	0	0%
	T	30	-
4)	B	16	53.3%
	M	10	33.3%
	A	4	13.3%
	T	30	-
5)	B	29	96.7%
	M	1	3.3%
	A	0	0%
	T	30	-
Total	B	20	66.7%
	M	10	33.3%
	A	0	0%
	T	30	-

## ANEXO VI

### Prueba pedagógica final.

Objetivo: Constatar el nivel de desempeño de las alumnas y los alumnos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Cuestionario:

- Halla el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\left(10^{\log 3}\right)^{\cos 2x} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\sin 2x \cdot \tan x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$$



## ANEXO VII

### Evaluación por indicadores después de aplicadas las actividades docentes

Indicadores Muestra	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Total
1	A	A	A	A	A	A
2	A	A	A	A	A	A
3	A	A	A	M	A	A
4	M	B	B	B	M	B
5	M	A	A	M	A	A
6	A	A	A	M	M	A
7	A	A	A	M	A	A
8	A	A	A	M	A	A
9	M	A	A	A	A	A
10	A	A	A	M	M	A
11	A	A	A	M	M	A
12	A	A	A	A	A	A
13	A	A	M	M	M	M
14	A	A	M	A	A	A
15	M	B	M	A	A	M
16	A	A	A	B	M	M
17	M	M	M	M	A	M
18	M	M	A	A	M	M
19	M	A	A	A	A	A
20	A	A	A	A	A	A
21	M	M	A	A	M	M
22	M	B	B	M	A	M
23	A	A	M	B	A	M
24	A	M	M	M	A	M
25	M	A	M	M	M	M
26	A	M	A	A	A	A
27	M	A	A	A	A	A
28	M	M	A	A	A	A
29	A	A	A	A	A	A
30	A	A	A	A	A	A
Total	B - 0	B - 3	B - 2	B - 3	B - 0	B - 1
	M - 12	M - 6	M - 7	M - 12	M - 9	M - 10
	A - 18	A - 21	A - 21	A - 15	A - 21	A - 19

