UNIVERSIDAD DE SANCTI SPIRITUS “JOSÉ MARTÍ PÉREZ”

Alternativa metodológica para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en los estudiantes talentos en Matemática.

TESIS PRESENTADA EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MASTER

EN EDUCACIÓN SUPERIOR.

MENCIÓN MATEMÁTICA

AUTOR: Ing. Enrique José Carbonell Cabarga.

TUTORES: Dr. Armando Boullosa Torrecilla.
Msc. María Catalina Rodríguez Felipe.

AÑO: 2010.

UNIVERSIDAD DE SANCTI SPIRITUS

“JOSÉ MARTÍ PÉREZ”

Alternativa metodológica para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en los estudiantes talentos en Matemática

TESIS PRESENTADA EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MASTER EN EDUCACIÓN SUPERIOR

AUTOR: Ing. Enrique José Carbonell Cabarga

2010

DEDICATORIA

A mi esposa, hijos y nieta

AGRADECIMIENTOS

A todos los que de una forma u otra me han ayudado en la culminación de este trabajo y en especial a mis tutores Catalina y Boullosa por el apoyo brindado

RESUMEN

La Matemática está presente en la vida cotidiana, dada la necesidad del hombre de solucionar los problemas aritméticos y geométricos que se suscitan. En consecuencia, deben cultivarse las habilidades y conocimientos matemáticos y por ello el objetivo del trabajo de investigación consiste en diseñar una alternativa metodológica que contribuya a la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes talentos, en correspondencia con las condiciones actuales de la enseñanza de la Matemática en la provincia Sancti Spiritus. Para su ejecución se utilizaron los métodos histórico-lógico, análisis-síntesis, inducción-deducción y análisis documental. En el sistema educacional en Cuba, los planes de estudio no contemplan con profundidad las desigualdades matemáticas y el fondo bibliográfico no ahonda en este tema; lo que conlleva a que los estudiantes talentos presenten dificultades en la habilidad demostrar y por ende en la realización de los ejercicios de las Olimpiadas y Concursos que si abordan esta temática. Como respuesta a esta situación se propone una alternativa metodológica consistente en cartas docentes con ejercicios bajo los principios de la racionalidad y potenciación del trabajo independiente, que precisan la habilidad demostrar desigualdades para el desarrollo del talento en los estudiantes de la provincia. La propuesta fue validada por el criterio de expertos, los cuales coincidieron en que posee rigor científico y es posible su aplicación.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La presencia predominante de la Matemática en los currículos escolares se remonta a las épocas más tempranas de la civilización, no solo por el notable interés práctico relacionado con la necesidad del hombre de enfrentarse a cálculos aritméticos y geométricos en las más disímiles actividades de su vida laboral y doméstica, sino también por favorecer el desarrollo de cualidades como la constancia, perseverancia, organización y la responsabilidad; así como de habilidades intelectuales como el análisis, la síntesis, abstracción, concreción y la creatividad.

La Matemática como lenguaje del pensamiento racional y por su papel al servicio de las demás ciencias ha constituido piedra angular en el desarrollo de la sociedad desde sus orígenes. El rol se agiganta en la era actual, la sociedad del conocimiento y las comunicaciones donde no existe esfera de la vida en que no tengan lugar cambios originados por el avance de la ciencia y la tecnología. Particular interés cobra entonces hoy, la aplicación de las técnicas y métodos matemáticos en la toma racional de decisiones en empresas y la administración en general.

Los hombres y mujeres que en el futuro próximo tendrán sobre sus hombros la responsabilidad de trabajar, investigar, dirigir, administrar y vivir en la sociedad, permanecen hoy en las aulas escolares. Precisamente desde tempranas edades deben cultivarse los conocimientos, métodos y técnicas matemáticas que unido a la consolidación de las habilidades y hábitos en esta disciplina y en el resto de las concebidas en los planes de estudio se traducirán en ciudadanos capaces de pensar creativamente, aptos para vivir y trabajar en la era del conocimiento y las comunicaciones.

En consecuencia, para consolidar este futuro las universidades deben continuar formando profesionales que dominen el método científico y sean investigadores. Para ello es necesario que se apropien de métodos y formas de pensar propias de la Matemática por su valor desarrollador y formativo, especialmente para tener éxito en las ramas más afines a esta disciplina, se requieren sujetos talentos que dominen sus interioridades.

En relación al proceso de formación, la principal fuente de ingreso a las carreras de Ciencias en la Universidad son los Institutos Preuniversitarios de Ciencias Exactas (IPVCE). Estos desde su creación han brindado la posibilidad de una preparación superior a alumnos sobresalientes en el estudio; representando un respaldo en hombres de ciencia para el desarrollo del país. Pero ese énfasis en el perfil científico de la formación de sus bachilleres cedió terreno a las humanidades; siendo necesario en la actualidad restaurar el objetivo para los que fueron creados, en relación a ello Fidel Castro durante la inauguración de la Escuela Lenin el 31 de enero de 1974 expresó:

"los egresados de esas escuelas se dedicarán fundamentalmente a carreras científicas y técnicas" (Castro, 1974, p 3).

Lo cual se encuentra en concordancia con lo manifestado también por el Comandante en Jefe en la clausura del Congreso Internacional Pedagogía 90:

"el objetivo que buscamos indiscutiblemente, es darle mayores posibilidades de tener una máxima preparación a aquellos alumnos que son destacados en el estudio. Los programas de las escuelas de Ciencias Exactas y los demás preuniversitarios son iguales, solo que los de Ciencias Exactas tienen asignaturas en las cuales reciben un número superior de horas de estudio." (Castro, 1990, p 7).

Si se analiza el desarrollo del trabajo de los IPVCE se aprecia que la especialización de los primeros tiempos fue perdiéndose. Continuaban ingresando estudiantes mediante un proceso selectivo, pero podían hacerlo igualmente ganando concursos de Historia o Español. Los jóvenes ya no veían en los IPVCE la posibilidad de profundizar en estudios de las Ciencias Exactas y en particular en la Matemática. Actualmente se trabaja por retomar en estos centros la razón original de su existencia, pero este objetivo está sujeto a un grupo de cambios y transformaciones que tomarán determinado tiempo. Aunque en Cuba el desarrollo del talento no es elitista, se necesita de elementos motivadores y ayudas educativas para el normal desarrollo de las dotes excepcionales de los talentos, se requiere de docentes que conozcan bien sus habilidades, talentos, necesidades educativas y dispuestos a colaborar con ellos.

Estos profesores no necesariamente tienen que ser especialistas, pero deben estar abiertos a ideas nuevas y distintas, dispuestos a permitir que los estudiantes, a veces, sigan adelante con independencia y tener la habilidad de dirigir los esfuerzos individuales de los estudiantes hacia su máxima realización. (Verhaaren, 2007)

Para enseñar apropiadamente a un alumno talento, se le debe ayudar a encontrar y utilizar los recursos, abrir nuevas puertas y derribar obstáculos en su aprendizaje. El profesor orienta al estudiante, no necesariamente es su fuente de conocimiento. La búsqueda de alternativas eficaces y sostenibles para la identificación y atención a estos sujetos constituye uno de los desafíos y prioridades socioeducativas actuales. Ello supone también determinados retos a la investigación sobre el desarrollo del talento en estas condiciones de riesgo y la lucha, en el terreno teórico, contra aquellas concepciones de talento que aún permanecen aferradas a los ideales del elitismo.

La identificación y desarrollo del talento matemático en los jóvenes entre los 12 y 14 años, edad mayoritariamente aceptada como la idónea para identificar e iniciar el estímulo del mismo, constituye una urgente necesidad. (De Guzmán, 1996). En las condiciones actuales de la enseñanza media en Cuba, particularmente en Sancti Spiritus, esta tarea constituye un gran reto a enfrentar por las instituciones responsables de esta actividad y en consecuencia se requieren acciones alternativas que permitan tener éxito en esta importante tarea.

Sobre esta realidad en la Universidad José Martí Pérez de Sancti Spiritus se concretó la idea del "Proyecto Gauss para la identificación y desarrollo del talento matemático espirituano" con el objetivo general de: incrementar la motivación y preparación de los jóvenes espirituanos para la profundización en temas de la ciencia Matemática y su predisposición al estudio de carreras relacionadas tanto en el MES como en los ISP, expresado en la mejora de indicadores de la provincia tales como resultados en los concursos nacionales y presencia de estudiantes en la preselección nacional de la asignatura.

El proyecto está dirigido a la identificación y desarrollo del talento matemático en los jóvenes de la provincia de Sancti Spiritus, creando espacios de intercambio y facilitando las posibilidades de preparación y entrenamiento.

El aporte fundamental de este proyecto es una estrategia alternativa para la identificación y desarrollo del talento matemático en los jóvenes espirituanos como una actividad insertada en el modelo pedagógico cubano actual. Tiene en cuenta las características sicológicas y pedagógicas de los estudiantes en las diferentes edades, sus intereses y preferencias. Aprovecha las potencialidades específicas de cada entorno en que se desarrollan los jóvenes, en particular la existencia de los Centros Universitarios Municipales.

Entre las tareas de investigación del proyecto, a las cuales tributa esta investigación, se elaboraron materiales de apoyo didácticamente organizados para estudiantes y entrenadores, para brindar la posibilidad de profundización en los diferentes temas de la ciencia Matemática que no se estudian en la escuela y constituyen de interés para las Olimpiadas en los diferentes niveles.

Dentro de la Matemática, la demostración de desigualdades ocupa un lugar importante, lo cual está determinado, en primer lugar, por el hecho de que la medición de magnitudes continuas en los fenómenos de la naturaleza nunca es exacta sino aproximada. Sin embargo, esto no es un impedimento para el estudio de las leyes de la naturaleza, ni para la solución de los problemas prácticos y teóricos que se abordan en la ciencia y la técnica, porque es en la práctica donde se decide, en última instancia, qué grados de precisión son aceptables en las mediciones y los resultados relacionados con los problemas que se intenta resolver.

En segundo lugar, las desigualdades tienen múltiples aplicaciones en aritmética, en la resolución de ecuaciones, el cálculo de límites, la solución de problemas de extremos, el cálculo aproximado y la teoría de las probabilidades entre otras. Sin embargo, a pesar de la importancia señalada anteriormente, el tema de las desigualdades es prácticamente desconocido por muchos estudiantes.

En el análisis de los programas de Matemática se aprecia que no abordan elementos indispensables para la demostración de desigualdades tales como la desigualdad fundamental y otras que se derivan de ella, la relación que existe de las desigualdades entre las medias, las que por su utilización e importancia llevan nombres como la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Desigualdad de Chebyshev, Desigualdad de Jensen, entre otras.

Sobre la base de lo precitado, existen serias dificultades que se presentan en los alumnos talentos en relación al tema desigualdades matemáticas y por ende ante la resolución de ejercicios de Concursos y Olimpiadas, que si abordan esta temática con profundidad. En consecuencia se plantea como **problema científico** de la presente investigación: ¿Cómo contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes talentos en Matemática, en las condiciones actuales de la provincia Sancti Spiritus?

Para ello se asume como **objetivo** diseñar una alternativa metodológica que contribuya a la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes talentos, en correspondencia con las condiciones actuales de la enseñanza de la Matemática en la provincia Sancti Spiritus.

En la presente investigación el **objeto de estudio** es el proceso de desarrollo del talento matemático en adolescentes y jóvenes, el **campo de acción** es el proceso de formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes con talento matemático en la provincia Sancti Spiritus.

Con el propósito de que cada paso y acción realizada se ajusten al objetivo expuesto se plantearon las siguientes **preguntas científicas:**

1. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el desarrollo del talento matemático y la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades?
2. ¿Cuáles son los antecedentes y el estado actual de la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en adolescentes y jóvenes con talento matemático en la provincia Sancti Spiritus?
3. ¿Qué alternativa metodológica permite favorecer la formación y el desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en adolescentes y jóvenes talentos en Matemática de Sancti Spiritus?
4. ¿Qué validación requiere la alternativa metodológica propuesta?

Para dar respuesta a las preguntas anteriores, se ejecutaron las siguientes **tareas científicas:**

1. Determinación de los fundamentos teóricos que sustentan la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en adolescentes y jóvenes talentos en Matemática.
2. Diagnóstico del estado actual de la habilidad demostrar desigualdades en adolescentes y jóvenes con talento en Matemática en la provincia Sancti Spiritus.
3. Diseño de una alternativa metodológica para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en adolescentes y jóvenes talentos en Matemática de la provincia Sancti-Spiritus.
4. Validación de la alternativa metodológica por el criterio de expertos.

La **significación práctica** de la investigación se refleja en las cartas docentes propuestas para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes talentos en Matemática, que contribuye a facilitar el acceso a materiales didácticos sobre este tema.

La **novedad científica** de la propuesta radica en que constituye un conjunto coherente de actividades científicamente fundamentadas que favorecen la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades. Incluye cartas docentes con un enfoque integrador del tema desigualdades donde se plantean ejercicios variados e integradores, no redundantes, que entrelazan conocimientos del tema.

Se define como variable independiente: la alternativa metodológica y como variable dependiente nivel alcanzado en la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en los estudiantes talentos en Matemática.

Para la realización del trabajo se consideró la **población** compuesta por los 22 estudiantes que participaron en el entrenamiento para concursos de Matemática en el IPVCE Sancti Spiritus en el curso 2008-2009, de los cuales se seleccionó la **muestra** de manera no probabilística o intencional conformada por 19 estudiantes de los grados décimo y onceno.

En el proceso de ejecución de las tareas planteadas, se utilizaron, principalmente, los siguientes **métodos de investigación:**

Del nivel teórico:

1. Histórico-lógico: para conocer los antecedentes y la evolución en el tiempo del desarrollo del talento, así como de la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades matemáticas hasta la actualidad, lo que permitió la determinación de los fundamentos necesarios de la propuesta.

2. Análisis – síntesis: para el estudio de los diferentes criterios imperantes sobre el proceso de identificación de los estudiantes talentos y cómo desarrollarlos, siendo preciso la consulta bibliográfica y especializada en la materia para resumir las tendencias y analizar sus ventajas y desventajas en el proceso de investigación.

3. Inducción- deducción: se parte de la premisa de lo efectivo que resultaría la aplicación de las cartas docentes para el desarrollo del talento matemático en los estudiantes y para la formación de los futuros profesionales de las ciencias que exige la sociedad actual.

Del nivel empírico:

Análisis documental: se utilizaron los programas de Matemática de diferentes niveles, ejercicios de Olimpiadas y bibliografía para el análisis de los temas tratados sobre desigualdades, consultándose 96 textos y materiales bibliográficos que fueron básicos para abordar el tema de la investigación. Se emplearon libros de texto y documentos que establecen en Cuba el trabajo con los talentos.

Se emplearon como **técnicas de recopilación de información** una encuesta y el test que fueron aplicados a los estudiantes para conocer acerca de la motivación hacia la Matemática y sus conocimientos sobre desigualdades.

Se utilizó además la Estadística Descriptiva para organizar, clasificar e interpretar los indicadores cuantitativos obtenidos en la investigación.

La tesis consta de introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

En el **Capítulo 1**: se hace un tratamiento de algunas consideraciones teóricas acerca de la superdotación, y el talento en el estudiante y el conocimiento de las desigualdades en el desarrollo del talento matemático, abarcando temas de análisis y aspectos abordados por diferentes autores y tomando en cuenta los antecedentes del desarrollo del talento matemático en Cuba y otros países. Se aborda el sistema de habilidades en la enseñanza de las matemáticas y algunas consideraciones generales planteadas en el Informe Central al Tercer Congreso del PCC, así como las etapas que conforman el proceso de formación del sistema de habilidades matemáticas.

En el **Capítulo 2**: se exponen los resultados del diagnóstico del estado actual de los estudiantes seleccionados como talentos en Matemática, así como las particularidades del trabajo con este tipo de estudiantes en la provincia de Sancti Spiritus y de los resultados alcanzados por estos en los últimos años.

Se analizan los programas de Matemática de los distintos niveles de enseñanza en cuanto al tema desigualdades y la bibliografía sobre temas tratados en Olimpiadas Internacionales.

Se proponen cartas docentes como alternativa metodológica para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en los estudiantes seleccionados como talentos y como elemento final se valora la propuesta por los expertos consultados.

Se arriban a conclusiones y se realizan recomendaciones como expresión de los resultados obtenidos en el proceso de investigación, del análisis y valoración de los resultados. También se incluye la bibliografía consultada y 9 anexos.

CAPITULO I. CONSIDERACIONES TEÓRICAS ACERCA DE LA IDENTIFICACIÓN Y DESARROLLO DEL TALENTO MATEMÁTICO Y LA FORMACION Y DESARROLLO DE LA HABILIDAD DEMOSTRAR DESIGUALDADES.

En este capítulo se hace un análisis general de las características de los superdotados y talentosos, de su ritmo de aprendizaje más rápido que el resto de sus coetáneos y la influencia de la escuela y la familia en el desarrollo del talento creativo. Se caracterizan las habilidades y se abordan las etapas de su formación.

1.1 Referente histórico.

Con el desarrollo de la ciencia y la especificidad de las disciplinas que comienzan a producir conocimiento sobre el sujeto, aparecen las técnicas de medición de la inteligencia y con éstas la noción de superdotación. En 1869 con la publicación “Talento hereditario y carácter” de Galton y con posterioridad con Catell en 1890, Binet y Simón en 1904 y Terman en 1916 aparece el rótulo de “inteligencia muy superior” y con éste el de superdotado, describiendo a esta población a partir de un cociente numérico. (De Guzmán, 1996).

Antes de 1950, la inteligencia era medida a través del coeficiente intelectual, pero posterior a los estudios de Guilford, Torrance, se considera que las medidas normales del coeficiente intelectual no tienen en cuenta elementos muy importantes de la inteligencia humana, tales como la creatividad.

En 1972, Marland propuso diferenciar los tipos de inteligencia a través de sus posibles orientaciones concretas y líneas de acción específicas. Los trabajos de Renzulli se han centrado también en la creatividad y persistencia en la tarea. (De Guzmán, 1996).

La atención sobre los superdotados no fue constante a lo largo del tiempo, influyeron factores históricos que hicieron de este tipo de educación poco interesante por el contexto histórico del momento. Fue posterior a la Segunda Guerra Mundial y el lanzamiento por Rusia del primer satélite (El Sputnik) en 1957, que despertó en políticos y educadores de los Estados Unidos la necesidad de potenciar la adquisición del talento, especialmente en el terreno de la Tecnología y la Ciencia. Esto trajo consigo que en EEUU sólo se incorporaran a los programas los superdotados de la clase pudiente conformada por la élite blanca dominante.

De nuevo con la llegada de los rusos a la Luna se pondrían en entredicho el sistema americano de Educación y con ello renacería de nuevo el interés por los superdotados y la caza de talentos.
En la actualidad el desarrollo de concursos y premios promovidos por las grandes industrias atraen a los talentos en potencia y descubre a otros ocultos por la estructura social de los países más desarrollados. Sin embargo, sólo potencia el acceso a este tipo de programas a los que tienen más medios y pueden pagarse una matrícula en las instituciones que tratan de ayudar al desarrollo de este tipo de educación.

1.2 Superdotación y talento.

Definir la superdotación intelectual no resulta fácil. Actualmente la definición más aceptada es la del Dr. Joseph Renzulli, del Instituto de Investigación para los Alumnos Superdotados, en su "teoría de los tres anillos" (Renzulli, 1992). Según la teoría de los tres anillos de Renzulli, la Superdotación Intelectual está formada por tres factores: Alta Capacidad Intelectual, Motivación y Creatividad que están estrechamente relacionadas. Considera a un alumno como superdotado cuando posee una capacidad intelectual muy superior a la media (generalmente por encima del cociente intelectual 130) y que presenta al mismo tiempo una fuerte motivación en la realización de las tareas y un alto nivel de creatividad. (Ver figura 1)

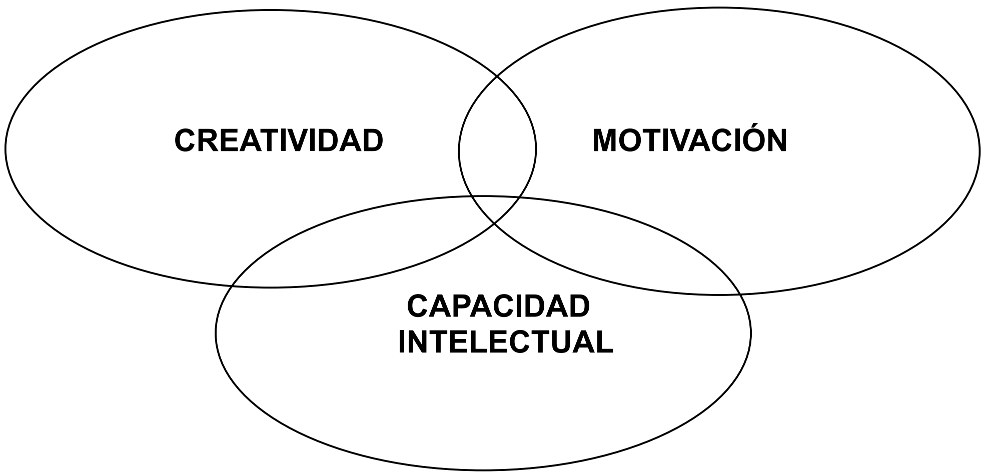


Fig.1 Modelo de la teoría de los tres anillos.

Evaluar la creatividad es difícil por lo que es conveniente ofrecer oportunidades para que los alumnos puedan realizar variadas actividades, donde la observación de estas características pueda dar un indicador fiable de la creatividad.

Un alto coeficiente intelectual no resulta suficiente para considerar a un alumno como superdotado, los tradicionales test que miden el cociente intelectual (CI) no llegan a determinar quien es digno de llamarse superdotado o como también se les conoce, niños excepcionales. En el libro “El mito de la inteligencia y los peligros del cociente intelectual” se critica el hecho de que esta prueba no evalúa los aspectos escolar, social y científico del niño. (De Zubiría, 2006).

No hay una definición única aceptada de superdotación y la definición de Renzulli (1978) también ha recibido críticas. Monks y Van Boxtel, aunque reconocen que el modelo propuesto por Renzulli constituye una ampliación importante y una corrección de las definiciones anteriores, argumentan en su contra que las características descritas tienen una naturaleza estática y no tienen en cuenta las experiencias y los procesos de socialización, aspectos cruciales para el desarrollo. Ambos incluyen los factores externos, planteando que los modelos tradicionales no consideran el papel de la familia y de la sociedad como aspectos favorables o desfavorables para su desarrollo. Monks y Boxtel llaman la atención sobre un hecho crucial: no es posible que un niño o una niña muestre habilidades superiores a la media si su entorno más cercano no le es favorable.

El concepto de superdotación, poco a poco y a partir de los desarrollos teóricos, se ha ido reemplazando por la nominación de personas con capacidades excepcionales. (De Zubiría, 2003).

Hasta el momento se aborda el tema de los superdotados, sin embargo, es conveniente distinguir entre estos y los talentos específicos pues aunque para muchos autores la palabra superdotado se utiliza como sinónimo de talento, también existen diferencias. Sánchez distingue entre sobredotación y talentosos, señalando que la sobredotación es una capacidad general compuesta de una serie de factores intelectuales significativamente más alto que en el grupo promedio y el talento es considerado como una capacidad particular, focalizada en un determinado aspecto cognitivo o destreza conductual. (Betancourt, 2004)

Tanto lo niños superdotados como los talentosos son capaces de un alto rendimiento y cuentan con aptitudes excepcionales, no marcando una seria diferencia entre unos y otros. Por otra parte Genovard y Castelló (1990), afirman que “la superdotación parece relacionada con la posibilidad de competencia general, en oposición al talento, que se caracteriza por su especificidad”.

Una definición de superdotación ofrecida por Landau , plantea que el niño superdotado se caracteriza por la confluencia de: -nivel de funcionamiento cognitivo, -capacidad creativa, -persistencia y empuje. Además afirma que la superdotación puede ser educada y desarrollada en su plenitud. (De Zubiría, 2003)

Según los diccionarios especializados consultados, se señala una distinción entre superdotados y talentosos, los primeros cuentan con habilidades generales altas y los segundos con habilidades específicas excepcionales en un área **(**Diccionario de la Real Academia Española, 2000).

Hacia los 80 Gardner propone su teoría de las Inteligencias Múltiples y ofrece una clasificación de siete tipos de inteligencias: lingüística, lógico-verbal, musical, viso-espacial, cinestésico-corporal, inter e intra personal, que más tarde amplía a ocho introduciendo la naturalista referida al talento científico. El autor plantea que la característica propia del talento es su especificidad, dominando una serie de recursos intelectuales, que le permite manejar con gran maestría la información relacionada con un ámbito específico del conocimiento. (De Zubiría, 2007)

Gardner, en su obra titulada “Mentes Creativas” trata de analizar diferentes perfiles de individuos que se han destacado en algunas de las ramas del saber y cuyos aportes al mundo han sido extraordinarios y por tanto, considerados por los expertos como talentos. Según lo investigado por este autor los diferentes talentos y sus características quedan resumidas de la siguiente manera:

<u>Talento verbal</u>: se suele manifestar por su capacidad para utilizar con claridad las habilidades relacionadas con el lenguaje oral y escrito.

<u>Talento artístico</u>: propio de los individuos que demuestran una gran capacidad para percibir imágenes internas y externas, transformarlas, modificarlas y descifrar la información gráfica. Ejemplos de ellos han sido Picasso, Dalí y Leonardo da Vinci.

<u>Talento psicomotor</u>: propio de las personas que poseen una gran capacidad para el deporte

y el arte. Suelen ser personas con una buena inteligencia corporal-cinestésica, que incluye la habilidad para unir la mente y el cuerpo para la ejecución física perfecta. Dentro de la danza española algunas figuras han sido Antonio Gades o Nacho Duato.

Talento musical: las personas que destacan por su inteligencia musical tienen habilidades para apreciar, discriminar, transformar y expresar programas musicales. Son los compositores y cantantes quienes suelen poseer una buena Inteligencia Musical. Mozart o María Callas son algunas de las personas que han destacado por su talento musical.

Talento social: propio de las personas que tienen una gran capacidad para relacionarse e interactuar con los demás. Ejemplo de personas destacadas en la inteligencia interpersonal son: la madre Teresa de Calcuta, Platón, Aristóteles.

Talento científico: estas personas muestran generalmente un gran interés por el mundo y por los fenómenos naturales. Suelen utilizar con gran maestría habilidades referidas a la observación, planteamiento y comprobación de hipótesis. Tal es el caso de Charles Darwin como el mejor ejemplo de inteligencia de este tipo.

Talento matemático: las personas muestran desde su infancia una buena inteligencia lógico-matemática consistente en realizar cálculos, cuantificar, considerar proporciones, establecer y comprobar hipótesis llevando a cabo operaciones matemáticas complejas. Arquímides, Blas Pascal, Galileo Galilei y Einstein son algunos ejemplos de personas que han destacado por sus contribuciones ingeniosas al progreso del saber y de la cultura en el campo de las matemáticas. (Prieto, 2002)

La identificación y desarrollo del talento en las sociedades modernas tiene un matiz elitista, sin embargo, en Cuba adquiere otra dimensión y cae dentro de los planos de la justicia social, ya que se refiere a desarrollar las capacidades intelectuales de los niños, adolescentes y jóvenes e incrementar acciones desde la escuela de acuerdo con sus características.

Algunas de las características identificadoras del talento son: rapidez de aprendizaje, habilidades de observación, memoria excelente, capacidad excepcional verbal y de razonamiento, fácilmente se aburren con las tareas de repetición, poseen una gran potencia de abstracción, son curiosos e interrogantes y se arriesgan con gusto en su exploración con ideas nuevas. (De Guzmán, 1996)

En investigación realizada por la Doctora Mary Ruth Coleman (2008) y publicado en un material del Centro Nacional para la Investigación de los Dotados y Talentosos de Carolina del Norte plantea que las características, aptitudes o comportamientos que caracterizan al talento son las siguientes:

Motivación: se evidencia en el alumno el deseo por aprender demostrando persistencia en la búsqueda y cumplimiento de las tareas que el mismo selecciona, lo cual es evidente en la escuela o en actividades fuera de ella. Es un alumno entusiasta y tiene aspiraciones de ser alguien, para lograr algo.

Intereses: intensos y algunas veces fuera de lo común. Presta una atención especial a actividades, pasatiempos, objetos que tienen valor o significado especial para él. Muestra iniciativa propia dedicándose persistentemente a actividades más allá de lo que hace su grupo.

Destrezas para comunicarse: muy expresivo con palabras, números o símbolos. Presenta una inusual habilidad para comunicarse (oral, silenciosa, física, artística y simbólicamente), utilizando ejemplos, ilustraciones o elaboraciones particularmente adecuadas.

Habilidad para resolver problemas: utiliza estrategias efectivas, a menudo ingeniosas, para reconocer y resolver problemas. Cuenta con una habilidad inusual para crear o seguir una estrategia sistemática para solucionar problemas y/o cambiarla si no está funcionando; crear nuevos diseños.

Memoria: enorme capacidad de memoria, para guardar información sobre temas escolares y variados.

Análisis/Curiosidad: cuestiona, experimenta, explora como método o proceso para adquirir conocimientos, comprensión o información. El alumno hace preguntas inusuales para su edad, tiene comportamientos exploratorios extensos, los cuales dirige hacia la selección de información sobre materiales, mecanismos o situaciones.

Perspicacia: comprende rápidamente los nuevos conceptos; ve conexiones; intuye los significados más profundos. Posee una capacidad excepcional para sacar conclusiones, muy observador con gran capacidad para ver relaciones inusuales o diversas y la integración de ideas y disciplinas.

Razonamiento: enfoques lógicos para sacar conclusiones, capaz de analizar profundamente

y llegar a una respuesta plausible.
Imaginación/creatividad: produce muchas ideas, muy originales e ingeniosas. Es un gran observador con ideas desenfrenadas y aparentemente absurdas. Cuenta con fluidez y flexibilidad para producir ideas; muy curioso.
Humor: habilidad para sintetizar ideas o problemas, en situaciones complicadas, de una manera humorística; excepcionalmente acertado en el uso de palabras y gestos.
Intensidad (“Sobreexcitaciones” personas altamente sensibles): el término sobreexcitaciones proviene del psicólogo polaco K. Dabrowski. Se manifiesta como fuerza de las reacciones, respuestas o comportamientos. Presenta un deseo intenso por experimentar en las áreas “sobre-excitantes”. Emociones fuertes: búsqueda de estímulo intelectual; experiencias sensoriales que evocan respuestas fuertes: movimientos o gestos, repetitivos o constantes; vida fantasiosa intensa: es posible que necesite escapes para la intensidad.
Sensibilidad: reacciones fuertes a estímulos emocionales. Los eventos y situaciones en las áreas afectivas y sociales, provocan una respuesta más fuerte de lo normal. Generalmente con gran sentido de la compasión: sentido agudo de justicia, y empatía: sensibilidad moral y ética; sensación de ser socialmente “diferente”, excesivamente auto-crítico.

1.2.1 Talento matemático.

Existen definiciones de talento matemático entre las que se encuentra la dada por Laurence C. Young, fundador de Wisconsin Mathematics Talent Search “el talento matemático es una combinación de ingenio, perspicacia, deseo de experimentar y persistencia; no solo destreza en la manipulación”, y Richard C. Miller (1990) “el talento matemático se refiere a una habilidad inusual para entender las ideas matemáticas y razonar matemáticamente, en lugar de saber hacer sólo cálculos aritméticos o conseguir calificaciones excelentes en matemáticas”.
Los alumnos con talento matemático disponen de elevados recursos de representación y manifiestan una gran habilidad para realizar cálculos, cuantificar, considerar proporciones, establecer y comprobar hipótesis y llevar a cabo operaciones matemáticas complejas. Los educandos que poseen un buen razonamiento matemático disfrutan con la magia de los números y sus combinaciones, les fascina emplear fórmulas, experimentar, preguntar y

resolver problemas lógicos, emplear materiales y objetos de ciencias para manipular.

El autor comparte el criterio de Irwin y Reilly (2003) a lo que hace alusión en el documento “Configuración cognitiva de los alumnos de altas capacidades” de Cristina Sánchez López, 2006 acerca de que los rasgos más relevantes que caracterizan a los alumnos que poseen un buen potencial matemático son los siguientes: perciben con exactitud objetos y sus funciones en el medio; se familiarizan pronto con los conceptos de cantidad, tiempo, causa y efecto; utilizan símbolos abstractos para representar objetos concretos y conceptos; demuestran una gran habilidad para resolver problemas; suelen percibir y discriminar relaciones y extraer la regla de las mismas; usan con facilidad habilidades matemáticas; disfrutan con las operaciones complejas que implican cálculo, aplicación de principios de la física, la programación de ordenadores o los métodos de investigación; y suelen ser introspectivos cuando estudian un problema y los procedimientos para resolverlo. Los datos procedentes de los trabajos de Krutetskii, The psychology of mathematical abilities in school children”. (1976) han demostrado que los talentos matemáticos son alumnos con un gran razonamiento abstracto a la hora de resolver los problemas; además, utilizan un gran repertorio de estrategias, son alumnos que suelen tomar un tiempo antes de responder (estilo reflexivo) .

V.A Kruteskii, conocido por sus trabajos con los alumnos talentos en la antigua Unión Soviética, en el libro titulado The psychology of mathematical abilities in school children (1976, pp 87-88), enumera nueve características del talento matemático.

- Capacidad para formalizar el material matemático
- Capacidad de generalizar
- Capacidad numérica y simbólica
- Capacidad de razonamiento deductivo
- Economía del pensamiento
- Capacidad de revertir un proceso mental
- Flexibilidad de pensamiento

- Memoria matemática
- Capacidad espacial

No todos los estudiantes talentos presentan la totalidad de estas características, pero pueden servir como señales de que un estudiante aparentemente aburrido pueda poseer una mente matemática en acción.

Como principio general, los profesores deben esforzarse por no presentar la Matemática como un conjunto de normas y procedimientos de la necesidad práctica, sino más bien como un juego intelectual interesante y accesible.

En Matemática sucede que la enseñanza inicial se basa incorrectamente en algoritmos aritméticos rutinarios de modo que no hay lugar para identificar las aptitudes adecuadas para la matemática propiamente: las habilidades de orden superior. Es necesario identificar con cuidado: hay alumnos que son buenos realizadores de ejercicios, van muy bien en las clases, es un placer tenerlos en el aula, hacen con gusto cuanto se les propone... Muy frecuentemente los especialmente dotados para las matemáticas no casan bien en este cliché. Hay que distinguir el estudiante bueno del estudiante especialmente dotado.

A continuación se relacionan con el uso de ejemplos, los resultados de una investigación realizada por Carole Greenes, y a la que hace referencia Miguel de Guzmán en su artículo "El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas", los cuales son propios de estas características especiales del talento matemático en la resolución de problemas. Formulación espontánea de problemas: Marga, de once años, leyendo sobre la Estatua de la Libertad, se entera de que la boca mide casi un metro de anchura. Se interesa por lo que medirá el brazo. La profesora le dice que también lo puede encontrar en otro libro de consulta. A Marga se le ocurre que lo puede hacer ella misma aproximadamente. Mide su boca y mide su brazo...Su brazo es como 18 veces su boca. Así la estatua tiene un brazo de casi 18 metros.

Flexibilidad en el uso de datos: tienden a usar una gran variedad de ensayos y estrategias diversas para resolver problemas con los datos que se les dan. Carol, 12 años, ante la tarea de saber qué fila de la tabla de números siguiente proporciona, al sumar los números de la fila, el número 665:

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

11 12 13 14 15

16 17 18 19 20

"Los números de cada fila suman 5 veces el del centro”. Así, el del centro de la fila buscada será 665/5=133. La fila es 131 132 133 134 135.

Habilidad para la organización de los datos: Dan, 9 años, ante el problema de determinar el número de triángulos que se forman al trazar todas las diagonales de un pentágono regular:"triángulos formados por una región, por dos regiones,..."

Riqueza de ideas**:** Dana, 11 años, ante el problema: ¿Cuántos km por hora viajó la Sra. Johnson si se hizo 360 Km. en 6 horas? "Depende de cómo haya pisado el acelerador..."

Originalidad de interpretación: Randy, 8 años, trabajando la no conmutatividad de la resta con las reglas de Cuisenaire. 5-3 no es 3-5. Para Randy 3-5 no era 2 pero era "2 por debajo". Cuando la maestra le explica que a esto le llaman los matemáticos -2: "Jo, qué listos".

Habilidad para la transferencia de ideas**:** Debbie, 13 años. Problema: ¿se pueden construir triángulos con segmentos de longitud 2,1,4 con segmentos de longitud 3,3,7?." No, yo he aprendido el año pasado que la distancia menor entre dos puntos es la línea recta. Así en un triángulo cualquiera, un lado es menor que la suma de los otros dos".

Otras características interesantes**:**

- Preferencia por la comunicación oral.

- A veces dificultad de explicar sus procesos de pensamiento por las combinaciones complicadas de que son capaces.

• Preferencia por problemas más bien que por ejercicios.

Reconocer estas características es tarea difícil para un profesor. Es necesaria la observación por el profesor y los padres, la realización de pruebas de inteligencia, creatividad y entrevistas con los educandos.

En el desarrollo del talento creativo, el docente, la escuela y el entorno familiar y social juegan un papel importante. Una parte significativa de los años más preciosos de la vida se desarrollan en la escuela y en función de ésta. Entre los expertos existe consenso de que la creatividad es un recurso precioso del que dispone el hombre y el cual requiere ser cultivada. Aún la enseñanza predominante en la gran mayoría de las escuelas de muchos países no estimula la creatividad del alumno y este recurso queda por debajo de sus posibilidades reales. (Alencar, 2008)

A menudo valiosas contribuciones son desechadas por los maestros porque proviene de un estudiante con déficit de atención (Karp y Vogeli, 2002). En ocasiones estudiantes con talento realizan observaciones que parecen estar en contradicción con la tarea que realizan, pueden parecer desorganizados y lamentablemente el aburrimiento y la falta de atención pueden rayar en la indiferencia y en ocasiones bajo rendimiento. Si no se produce una adaptación del programa educativo a sus características y necesidades, es muy probable no solamente que no progrese de acuerdo con su capacidad, sino que puede reaccionar mostrando un comportamiento pasivo o llegando a tener problemas de conducta. La diferencia de este tipo de alumnos es que sus intereses son diferentes, más altos y con fuerte motivación. El rendimiento que tengan estará en función de la motivación específica, del estímulo que reciban y del desarrollo procedimental de sus técnicas de trabajo. A menudo sucede que los intentos de fomentar el talento es demasiado tarde para deshacer años de aburrimiento sostenido y de frustración.

Fundamental resulta la Influencia de la familia en el desarrollo del alumno talento. Monks y Boxtel plantean que las características de un niño talentoso no son todas innatas y deben educarse y desarrollarse.

A partir de la teoría de Vigotsky, R. Feuerstein plantea que el papel mediador de la familia es esencial para los sujetos talentosos ya que en los primeros años de vida se sientan las bases del aprendizaje surgiendo las habilidades del niño en la interacción familiar. (Lorenzo, 2005)
El entorno familiar debe actuar "solidariamente" con el niño en aspectos fundamentales como los que tienen que ver con el afecto, las necesidades físicas y espirituales.

De gran interés resultan las investigaciones que se han realizado sobre la influencia de la familia en el desarrollo del alumno talento. Estudios realizados de la infancia a talentosos ponen de manifiesto, el alto grado de atención sobre el niño a través de medidas educativas y el amor abundante, la estimulación mediante conversaciones, el interés y el tiempo que le dedican los padres a las actividades de los hijos.

En general los niños talentos cuentan con un hogar que estimula el aprendizaje entre los que se encuentran los libros y las revistas. El nivel de escolaridad de los padres y el ambiente cultural de la familia correlacionan en alto grado con los tests y con el rendimiento académico. También se ha observado que las familias de estos sujetos organizan en conjunto el disfrute del tiempo libre (Heller, 1990). Según Freeman, (1993) "los padres que tienen más influencia en los altos resultados de los niños talentosos no son los que le dicen a sus hijos lo que tienen que hacer, sino los que hacen las cosas junto con ellos". (Lorenzo, 2005).

Al igual que la familia puede influir positivamente en el desarrollo del talento del alumno, puede constituir una barrera para el desarrollo del talento. La familia puede no tener un alto nivel de educación, pero si tiene en sus valores una alta estima por el aprendizaje y los logros influirán positivamente en el desarrollo del alumno.

En el proceso de preidentificación de alumnos talentos es fundamental el trabajo de los profesores. Es un proceso riguroso que se realiza sobre la identificación y estudio de las características de estos alumnos. Este procedimiento de identificación aporta una gran información sobre las características propias de los alumnos de altas habilidades.

Comparte el autor de esta investigación el criterio de Chittenden (1991) plasmado en el documento “Configuración cognitiva de los alumnos de altas habilidades” que manifiesta que el maestro es una de las fuentes de información más ricas por cuanto valora las características dentro del ambiente del aula; además, es quien tiene una gran información sobre la vida escolar de los alumnos que pasan la mayor parte del tiempo con ellos.

Los maestros facilitan en todo momento la identificación en función de tres características (alto rendimiento, creatividad y motivación) exigidas en todo proceso de identificación (Renzulli, 1988). Junto a estas primeras evaluaciones y datos el proceso debe continuar con el fin de estudiar y analizar la complejidad cognitiva y emocional de estos alumnos, tal como indican expertos en el tema como son Gardner (1983), Guilford (1977), Sternberg (1985), Torrance (1974) y Treffinger (1982). Todos ellos destacan la necesidad de utilizar métodos rigurosos, aunque flexibles, que nos indiquen el tipo de excepcionalidad y en función de la misma podamos diseñar pautas de acción.

De acuerdo con Prieto “la identificación debe tener como finalidad el conocimiento de las características individuales de todos y cada uno de los alumnos para adaptarnos a ellos, potenciando, al máximo sus posibilidades en el contexto educativo”. (Sánchez, 1997).

En las primeras edades una fuente importante de información para el diagnóstico del talento son los padres. El constante contacto con sus hijos los hace tener datos y anécdotas que son de interés para el diagnóstico. También son importantes los datos que pueden aportar los padres en distintos aspectos, desde el nacimiento, lo que posibilita conocer al sujeto globalmente. Según las investigaciones de Gotzens y González (1995) los reportes que realizan los padres de sus hijos son bastantes acertadas.

También los compañeros de clases se consideran como una fuente fundamental para el proceso de preidentificación del talento, para lograr así una identificación más completa. Son buenos informadores acerca de quienes se destacan o tienen determinadas habilidades que en ocasiones pasan inadvertidas por los padres y maestros.

En Cuba, a través de un proyecto de investigación, la Doctora Doris Castellanos Simons, profesora titular de la Universidad Pedagógica Enrique José Varona de la Habana, junto a un equipo de científicos cubanos estudiaron las aristas biológicas, socio-culturales y psicológicas del desarrollo del talento. De tal manera, crearon una plataforma que se utiliza actualmente en el Ministerio de Educación Superior para identificar a los alumnos potencialmente talentos y desarrollar programas que conciben los propios maestros con ajustes y enriquecimientos curriculares y actividades fundamentalmente con la familia.

El hecho de que la escuela cuente con una estrategia para el desarrollo del talento reporta interesantes beneficios al poderse realizar un trabajo sistemático y diseñado científicamente sobre la base de una correcta definición del talento.

Después de tomar decisiones sobre las problemáticas de la identificación de los alumnos talentos es necesario brindarles atención para desarrollarlos, pero existen polémicas en cuanto a cómo debe ser la atención. Hay quienes plantean que la forma más adecuada es la elitista pero hay quien plantea que debe ser democrática Los defensores de esta primera variante manifiestan que es necesario para no perder a este tipo de alumno talentoso la creación de centros docentes especiales que permitan hacer programas adaptados a este tipo de alumnado y además, se les puedan asignar profesores eminentes. La opción elitista se sugiere como la ideal para los países “en desarrollo” porque es menos costosa. Los detractores del elitismo plantean que es una vía para multiplicar las diferencias sociales, alegando además que las escuelas normales quedan sin estímulo para los estudiantes promedio. Plantean que es justo ofrecer igualdad de oportunidades, porque todos los niños nacen con capacidades intelectuales similares y las diferencias responden a la influencia de los factores ambientales y de esta forma no se correría el riesgo de perder talentos por errores de identificación.

La segunda polémica es en cuanto a cual es la vía más adecuada para brindarles atención, la intracurricular o la extracurricular que significa darles atención dentro de la clase. En los antiguos países socialistas se utilizó esta última forma de promover el talento, pero el problema radica en lo difícil que es para el maestro darle un tratamiento diferenciado dentro de la clase. La vía extracurricular abarca diferentes tipos de actividades como las extraescolares y extradocentes, implementándose dentro o fuera del horario escolar e incluyen también las actividades que desarrolla la familia. Tanto la vía intracurricular como la extracurricular tienen sus adeptos y detractores pero a criterio del autor de la presente investigación ambas son válidas y pudieran aplicarse de forma combinada, pero el éxito de la atención a los alumnos talentos no solo depende de estos elementos sino del trabajo del maestro y de la familia.

Otra discrepancia es en cuanto a qué forma utilizar: la aceleración, el enriquecimiento o la segregación.

Los programas de aceleración consisten en adelantar cursos respecto al nivel que le corresponde por su edad cronológica. En cuanto al aprendizaje de contenidos el alumno avanza realmente, pero pueden existir inconvenientes como problemas emocionales, inadaptación social al permanecer en aulas con personas que mantienen diferentes intereses social y afectivo debidos a la diferencia de edad. Hay que tener muy en cuenta si el alumno tiene la suficiente madurez para esta aceleración. También se plantea que para evitar los resultados negativos que pudieran obtenerse por la diferencia de edad, agruparlos. El agrupamiento consiste en juntar a los educandos en grupos de iguales, se superan los problemas de socialización con los demás, pero presenta el inconveniente que puede dar lugar a un alejamiento social al crearse una especie de élite intelectual que domina a los demás.

Los programas de enriquecimiento consisten en dar clases especiales después de las horas normales. Esto da solución a los problemas anteriores, pero puede aparecer otro tipo de problema como sobrecarga para el alumno o en la preparación del profesor que tiene que impartir un programa especial para los alumnos con talento. (Genovard, 1990)

No resulta fácil tomar decisiones en cuanto a qué hacer con los sujetos talentosos, ello debe estar en correspondencia con los objetivos y con el contexto donde se ponga en marcha una estrategia encaminada a su desarrollo. Pero siempre teniendo en cuenta que estas formas seleccionadas no perjudiquen el desarrollo de la personalidad de los alumnos. (Lorenzo, 2002).

En diferentes países existen los programas de atención a los talentos que ofrecen diversas oportunidades educativas, cuyo primordial objetivo es desarrollar las cualidades intelectuales y las aptitudes.

Muchos de los matemáticos más brillantes de la Historia han mostrado su talento desde muy corta edad, como el alemán Carl Friedrich Gauss, quien resolvió durante una clase escolar el teorema de los números triangulares a los diez años de edad ante la incredulidad de su maestro. Situaciones como ésta han motivado a los investigadores determinar la edad idónea para comenzar el trabajo con los talentos en Matemática.

Según Miguel de Guzmán en “El tratamiento educativo del talento especial en Matemáticas” el grupo de edad más adecuado sobre el que se podría iniciar la sesión para el desarrollo del talento matemático con los estudiantes es al comienzo de la Enseñanza Secundaria (12 a 14 años) pues es la etapa del comienzo del razonamiento formal. En distintos países se han hecho ensayos con este tipo de alumno talento y se han tomado los correspondientes a este grupo de edad.

En España, por ejemplo, el proyecto ESTALMAT favorece el aprendizaje de los estudiantes con una aptitud especial para las matemáticas. Es un proyecto de Estímulo del Talento Matemático que se inició en 1998 en Madrid y que a lo largo de esta última década se han ido sumando otras comunidades españolas como Andalucía, Castilla, León, Cataluña, Canarias, Galicia, Valencia y en el pasado curso 2008-2009 se estrenó Cantabria en este proyecto donde cada año participan cerca de 600 estudiantes de estas comunidades autóctonas españolas y donde se pretende a través de sesiones de clases semanales, orientar y estimular a lo largo de dos cursos académicos el talento matemático excepcional de sus participantes.

Estos estudiantes de cada comunidad generalmente de sexto grado y primer año de secundaria se seleccionan mediante una prueba de aptitud con el objetivo de evaluar las ideas brillantes de los alumnos en la resolución de problemas, así como los métodos o estrategias singulares llevadas a cabo para hallar las soluciones y una entrevista personal, no solo al alumno sino también a los padres y tutores.

En Cuba, ya en la década del 60, comenzaron a realizarse en los preuniversitarios concursos de Matemáticas, cuyos primeros lugares de cada una de las antiguas provincias concurrían a un Concurso Nacional donde se seleccionaban los 3 primeros lugares. Desde su función como Inspector Nacional de Matemática, el Dr. Luis Davidson organizó a partir del 1961 este tipo de concursos, comenzando así lo que pudiéramos llamar el comienzo del entrenamiento de talentos destacados en nuestro país, el trabajo que desplegado, junto a otros profesores valiosos, hizo posible que Cuba participara a partir de 1971 en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas. El Dr. Raimundo Reguera fue otro entrenador de las preselecciones nacionales, prácticamente para todas las Olimpiadas Internacionales e Iberoamericanas, acompañando a nuestra delegación a más de 10 países. Ha prestado asesoría para la preparación de jóvenes talentos de matemática, en varios países latinoamericanos como Argentina, Costa Rica, Panamá y México.

En Cuba los Institutos Preuniversitarios de Ciencias Exactas (IPVCE) han brindado la posibilidad de una preparación superior a alumnos sobresalientes en el estudio; representando un respaldo en hombres de ciencia para el desarrollo del país. Sus programas eran igual que los demás preuniversitarios pero existió en los primeros tiempos una Especialización en las Ciencias Exactas con horas adicionales que se le impartía a los alumnos con el objetivo fundamental de que “los egresados de esas escuelas se dedicarán fundamentalmente a carreras científicas y técnicas” como lo expresó el compañero Fidel, pero esta Especialización se fue perdiendo cediendo terreno a las humanidades, pero ya se vuelve a restaurar el objetivo para lo que fueron creados.

Cuba participa en las Olimpiadas Internacionales de Matemática desde la década del 70 y fue el primero en tomar parte en estas lides por el continente americano. Durante ese tiempo y bajo la inspiración de destacados profesores como el Dr. Luis Davidson San Juan y el Dr. Raymundo Reguera Vilar, se ha desarrollado el talento de muchos estudiantes a través de las aulas y las actividades de entrenamiento, los cuales hoy en día asisten a las aulas universitarias o son destacados profesionales.

La Sociedad Cubana de Matemática y Computación contribuye de forma decisiva a la obtención de estos meritorios resultados, a través de la abnegada labor de los entrenadores de las preselecciones provinciales y nacionales, pero también mediante el desarrollo de conferencias por especialistas propios o invitados especiales y la organización de topes y encuentros de conocimientos.

En las competencias internacionales frecuentemente se aborda el tema de las desigualdades matemáticas, tema que no debe faltar en la ejercitación del talento matemático de los estudiantes.

En la actualidad se observa una tendencia, dentro de la Educación Matemática a desarrollar importantes habilidades matemáticas específicas y al fomento por el gusto de las matemáticas. Según Miguel De Guzmán (1989), la Matemática es sobre todo, saber hacer, es una ciencia donde el método predomina sobre el contenido. Resulta imposible mejorar la calidad de la Educación Matemática, desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos en la resolución de problemas y otras actividades al margen de la creatividad. Según plantea De la Torre (1995): “la creatividad tiene que estar presente en todo planteamiento orientado a la mejora de la calidad”. Igualmente según afirma M. Martínez (1995) “No se puede hablar de calidad al margen de la creatividad”.

Resulta necesario que las matemáticas se encarguen de formar y priorizar en los alumnos formas de razonamiento comprometidas con el comportamiento creativo. Los profesores deben conocer las vías y métodos para el desarrollo de la creatividad de los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

El maestro puede por un lado despertar el interés del alumno sobre un asunto, y por otro lado llevarlo a odiar a determinada materia. Puede concientizar al alumno de sus talentos y posibilidades, pero puede minar su propia confianza sobre su propia capacidad.

Para el éxito de los programas en la atención a los estudiantes talentos resulta indispensable la calidad del personal docente que va a poner en práctica esta tarea. Según la Dra Raquel Lorenzo García en su artículo “El maestro y la familia como promotores del talento” desde hace varias décadas, se hace énfasis en la formación de los profesionales de la educación para atender el desarrollo del talento y de los sujetos talentosos pues en muchos países los maestros no tienen los conocimientos necesarios para acometer este trabajo. (Lorenzo, 2005)

Aún existen algunas interrogantes en cuales deben ser las características generales y específicas que deben reunir los encargados de la educación de los talentos entre las que se destacan:

- Si debe tener un cociente de inteligencia alto.

- Si debe ser un profesor talentoso y qué entrenamiento debe tener para sujetos talentos.

- Extensión que deben tener sus conocimientos.

- Cuáles son las diferencias entre el profesor de talentos y un buen profesor de todos los estudiantes.

- Si son las mismas características las que necesita el maestro de talentos en los diferentes niveles de enseñanza.

1.3 Consideraciones generales acerca de la habilidad.

El concepto de habilidad proviene del término latino habilĭtas y hace referencia a la capacidad y disposición para algo. Según detalla el Diccionario de la Real Academia Española la habilidad es cada una de las cosas que una persona ejecuta con gracia y destreza y el enredo dispuesto con ingenio, disimulo y maña. La habilidad es el grado de competencia de una persona frente a un objetivo determinado. (Diccionario de la Real Academia Española, 2000).

Según A. Petrovsky se define la habilidad como "el dominio de un complejo sistema de acciones psíquicas y prácticas necesarias para una regulación racional de la actividad, con ayuda de conocimientos y hábitos que la persona posee. La habilidad puede ser una aptitud innata o desarrollada. La práctica, el entrenamiento y la experiencia permiten que un sujeto logre mejorar sus habilidades. " (Álvarez, 1997).

Carlos Álvarez define la habilidad como la dimensión del contenido que muestra el comportamiento del hombre en una rama del saber propia de la cultura de la humanidad. Así las define en (1996) "Las habilidades formando parte del contenido de una disciplina, caracterizan, en el plano didáctico, a las acciones que el estudiante realiza al interactuar con el objeto de estudio con el fin de transformarlo y humanizarlo. (Álvarez, 1997).

Existen diferentes habilidades como son: analizar, observar, aplicar, describir, demostrar, entre otras. En el caso de ésta última comprende las acciones que se enuncian a continuación:

1. Caracterizar el objeto de demostración.
2. Seleccionar los argumentos y hechos que corroboran el objeto de demostración.

3. Elaborar los razonamientos, establecer las relaciones y los argumentos que propician la veracidad del objeto de demostración.

1.3.1 El sistema de habilidades en la enseñanza de la Matemática.

En el Informe Central al Tercer Congreso del PCC, su primer secretario Dr. Fidel Castro Ruz, al valorar los logros alcanzados por la Revolución, señaló que todavía existían algunas deficiencias en el orden educacional a las que se debía prestar vital importancia en la labor docente, entre las cuales están el insuficiente desarrollo en los estudiantes de las capacidades para el razonamiento, la falta de adecuados hábitos de estudio y una incompleta formación de las capacidades cognoscitivas, hábitos y habilidades que dificultan el desarrollo del pensamiento lógico. En el documento citado se precisa lo imprescindible que es enseñar y ejercitar al alumno para que por sí mismo analice, compare, valore y llegue a conclusiones en un proceso que cada vez debe ser más activo: el proceso docente educativo y dentro de él, el desarrollo de habilidades matemáticas. La formación de habilidades lógicas, así como su utilización, no son privativas de una disciplina, tienen un carácter general y universal. En cada disciplina hay determinadas habilidades que en mayor o menor grado se forman y desarrollan, lo que hace significar que para cumplimentar dicho objetivo, el proceso docente educativo se tiene que desarrollar sobre la base del empleo de métodos activos en la adquisición del conocimiento por el alumno, tales como: los problémicos e investigativos, los inductivos y deductivos en la orientación de la actividad del alumno por el docente. En esta dirección juega un papel esencial el experimento docente como procedimiento didáctico en un sustrato que tiene como fiel exponente al método experimental de las ciencias en sus principales elementos.

Las habilidades matemáticas, son reconocidas por muchos autores, como aquellas que se forman durante la ejecución de las acciones y operaciones que tienen un carácter esencialmente matemático. La habilidad matemática es la construcción, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, utilizar estrategias de trabajo, realizar razonamientos y juicios que son necesarios para resolver problemas matemáticos.

Las habilidades matemáticas expresan, por tanto, no sólo la preparación del alumno para aplicar sistemas de acciones (ya elaborados) inherentes a una determinada actividad matemática, ellas comprenden la posibilidad y necesidad de buscar y explicar ese sistema de acciones y sus resultados, de describir un esquema o programa de actuación antes y durante la búsqueda y la realización de vías de solución de problemas en una diversidad de contextos; poder intuir, percibir el posible resultado y formalizar ese conocimiento matemático en el lenguaje apropiado. La habilidad se ha formado cuando el sujeto es capaz de integrarla con otras en la determinación de vías de solución, cuando deja de ser un eslabón aislado para ubicarla en un contexto.

1.3.2 Etapas del proceso de formación del sistema de habilidades matemáticas.

Según la Lic. Maribel Ferrer Vicente (2008) en el proceso de formación del sistema de habilidades matemáticas se observan tres etapas que responden a los eslabones didácticos del proceso docente educativo y su dinámica y toman en cuenta las relaciones entre el desarrollo, la educación y la enseñanza y el concepto de "zona de desarrollo próximo" de L.S.Vigotsky; criterios que comparte el autor de la presente investigación y toma en cuenta en la fundamentación de la propuesta. Las tendencias de la enseñanza a través de problemas que tiene sus principales representantes en el paradigma constructivista, permiten describir la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje sobre la base del papel de la resolución de problemas como eje de la formación matemática.

Etapa 1: etapa de planteamiento, comprensión y análisis de los problemas esenciales y sus subproblemas (orientación del sistema de habilidades matemáticas)

Etapa 2: etapa de elaboración, ejercitación y sistematización de las habilidades matemáticas básicas y elementales (ejecución del sistema de habilidades)

Etapa 3: etapa de aplicación del sistema de conocimientos y habilidades en la resolución de problemas variados (perfeccionamiento de la ejecución del sistema de habilidades).

A la primera etapa corresponde el momento durante el cual el alumno se apropia del sistema de problemas que son la expresión de las posibilidades de aplicación de la teoría matemática que estudia y con ellos recibe una orientación y motivación inicial sobre los conceptos, teoremas o procedimientos específicos y generales y las habilidades matemáticas correspondientes que le permiten comprender y fundamentar una o varias vías de solución. La segunda etapa da continuidad a la anterior al elaborar los conceptos, teoremas y procedimientos (se propone la formación de las habilidades referidas a la elaboración y utilización de conceptos, propiedades y procedimientos) a partir de la interpretación como instrumentos para la precisión de una u otra solución de los problemas esenciales (habilidades matemáticas básicas) y los procedimientos específicos que le sirven de base (habilidades matemáticas elementales). En esta etapa se proponen ejercicios que propicien el ordenamiento, integración y estructuración del sistema de conocimientos y habilidades. En la tercera etapa, se parte de que el alumno se haya apropiado del sistema de conocimientos y habilidades matemáticas, es decir, los problemas, los instrumentos y estrategias para su solución y dispone de una amplia variedad de muestras, dadas en los ejemplos analizados y los ejercicios resueltos, que le permiten orientarse de forma independiente en la resolución de los problemas. Este momento debe dedicarse a que el alumno busque vías de solución suficientemente fundamentadas, aplique analogías, generalizaciones, particularizaciones. Las etapas 2 y 3 se entrelazan a lo largo de una unidad de acuerdo con la dosificación del contenido para el cumplimiento del objetivo de formar las habilidades en los tres niveles de sistematicidad planteados. En estas etapas se refleja la unidad de las dos funciones atribuidas al problema en el proceso de aprendizaje: medio y fundamento del aprendizaje y medio para la fijación del saber y poder matemáticos.

A lo largo del tiempo han existido criterios de que los varones poseen habilidades matemáticas superiores a las hembras. En una investigación realizada en la Universidad de Wisconsin-Madison, Estados Unidos por científicos de esa Universidad, los investigadores analizaron un total de 242 trabajos de evaluación de las capacidades matemáticas de 1.286.350 personas, publicados entre 1990 y 2007. Estos trabajos habían sido realizados con niños y jóvenes de todas las edades y niveles educativos.

En todos los casos, señalan los autores de esta investigación, las diferencias en las aptitudes matemáticas entre ambos sexos fueron demasiado mínimas como para resultar significativas. Según los investigadores, la idea de que ambos sexos tienen las mismas capacidades matemáticas está ampliamente aceptada entre los científicos sociales (Martínez, 2002).

1.4 Desigualdades.

Las desigualdades en Matemática aparecieron hace mucho tiempo, se han desarrollado y evolucionado de manera estable en el transcurso del tiempo, y más aún en nuestros días. Como se ha dicho por Richard Bellman en 1978, "... hay por lo menos tres razones para el estudio de las desigualdades: prácticos, teóricos y estéticos, la belleza está en los ojos del que mira la desigualdad." Se añaden dos nuevos motivos a los tres que ya están formuladas por Bellman: la fascinación de crear una nueva desigualdad fuerte y hermosa y la felicidad para probar tal desigualdad de una forma original y agradable. Por todas estas razones, las desigualdades son muy populares en técnicas avanzadas y elementales de Matemáticas, siendo muy útil en el nivel de transferencia de pruebas, en las pruebas de acceso a la universidad y especialmente en concursos nacionales e internacionales para estudiantes talentos.

Hoy en día, muchas personas talentos conocen nuevas ideas y métodos para hacer frente a las desigualdades y una gran cantidad de libros se publican en el mundo. Desde el punto de vista de la investigación, los métodos para resolver las desigualdades son importantes, pero aún resulta más trascendental, aprender a pensar para crear o resolver una desigualdad.

Las desigualdades juegan un rol fundamental en Matemática, permiten establecer que unas expresiones son mayores o menores que otras, así como el cálculo de máximos y mínimos sin recurrir a las derivadas. Existen libros completos dedicados a su estudio y en las competencias internacionales de problemas aparecen con mucha frecuencia, incluso muchas de las desigualdades que aparecen en los problemas de Olimpiadas tienen que ver con las diferentes medias.

Según Carl B. Boyer, las tres medias: aritmética, geométrica y subcontraria (más tarde llamada harmónica), ya eran conocidos por los babilonios. Pitágoras de Samos, matemático griego que vivió alrededor del año 550 A.N.E., sabia de las tres medias en Mesopotamia. Los pitagóricos poseían una manera alternativa de definir las tres medias utilizando la noción de proporción. Papus de Alejandría, géometra griego que vivió alrededor del año 300 A. N. E., describió en su libro III de la Colección una interesante construcción de las medias: aritmética, geométrica y armónica, representando las 3 medias en un único semicírculo.

Los matemáticos suelen usar inecuaciones para aproximarse a cantidades cuyas fórmulas exactas no pueden ser fácilmente computadas. Algunas se usan tan a menudo que se les ha puesto nombre, como: Desigualdad de Azuma, Desigualdad de Bernoulli, Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Desigualdad de Chebyshov, Desigualdad de Jensen, Desigualdad de Márkov, Desigualdad de Wikitopus, entre otros así como desigualdades de las medias como la aritmética y geométrica y la desigualdad triangular.

Es válido acotar, que dentro de la Matemática el estudio de las "Desigualdades" para estudiantes a partir de la enseñanza secundaria, es un tema fundamental para potenciar el talento matemático y de gran utilidad en competencias nacionales e internacionales; así como para la formación y desarrollo del estudiante que pretende cursar estudios superiores que tengan relación con esta rama del saber.

1.5 Actividades docentes para el desarrollo del talento matemático en el tema desigualdades.

Las actividades docentes son un conjunto de acciones planificadas llevadas a cabo por docentes y estudiantes, dentro o fuera del aula, de carácter individual o grupal, que tienen como finalidad alcanzar los objetivos y finalidades de la enseñanza. Para desarrollar el talento matemático en el tema desigualdades se necesitan elaborar actividades que deben reunir las siguientes características:

- Interesantes, amenas y con calidad científica, permitiendo garantizar la participación activa de cada estudiante.
- Tener un propósito educativo de manera que contribuyan eficazmente al mejoramiento de la formación matemática.
- Ser variadas.
- Tomar en consideración las limitaciones de tiempo, de tal forma que el desarrollo de la actividad extraescolar no obstaculice aspectos propios de la vida estudiantil.
- Desarrollarse en un ambiente diferente al que prevalece en los estudios regulares ya que

estos estudiantes deben ser activos con una mayor iniciativa y participación en el desarrollo de las Actividades.

Como ejemplos de actividades se desglosan a continuación:

- Estudio de temas especiales de Matemática:

Consiste en el estudio de tópicos que no aparecen por lo general contemplados como temas básicos de los programas. Estos tópicos pueden ser desarrollados individualmente o por grupos, con la orientación del asesor.

- Grupos de estudio para participar en otras actividades matemáticas extraescolares:

Consiste en la realización de Encuentros de Matemáticas (Olimpiadas) no solo a nivel de escuela sino con otras escuelas donde funcionen grupos semejantes. También pueden realizarse intercambios de experiencias.

- Organización de una Biblioteca:

Es importante poseer una pequeña biblioteca, con libros y revistas diferentes a los textos escolares tradicionales. Se puede utilizar para tal caso publicaciones, materiales de preparación de Olimpiadas, entre otros, donde uno de los miembros se encuentre responsabilizado con el buen uso y funcionamiento de esta biblioteca.

Este tipo de actividades contribuye a incrementar el interés de los estudiantes hacia las ramas científicas y técnicas, al proporcionarles la oportunidad de desarrollar habilidades y destrezas a través de actividades en torno a la Matemática. Permiten además complementar la formación matemática que los estudiantes reciben en la educación formal, al ponerlos en contacto con temas que generalmente, no están incluidos en los programas escolares.

Estimulan la capacidad creativa, el espíritu de investigación y la actitud crítica desarrollando valores como la objetividad, honestidad intelectual y el uso del pensamiento reflexivo y lógico en el análisis de los problemas así como mejoran la formación matemática de los estudiantes, permitiendo rendir mejor en sus estudios regulares y ayudándolos a obtener una adecuada preparación para seguir estudios superiores donde se requieran las Matemáticas.

Como actividades para contribuir al desarrollo del talento matemático en el tema

Desigualdades, en la presente investigación, se proponen cartas docentes como alternativa metodológica que comprenden ejercicios cuya solución permite la apropiación de conocimientos así como la formación y desarrollo de habilidades.

CAPÍTULO II. DIAGNÓSTICO, PROPUESTA Y VALIDACIÓN DE LA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA HABILIDAD DEMOSTRAR DESIGUALDADES EN ESTUDIANTES TALENTOS EN MATEMÁTICA.

"... La esencia activa del proceso de enseñanza garantiza conocimientos sólidos y duraderos... cuando la actividad independiente de los alumnos se organiza con carácter de sistema." (Álvarez, 1997).

En este capítulo se muestra el diagnóstico del estado actual de los estudiantes y se propone la alternativa metodológica dirigida a la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades. Posteriormente, se analiza la pertinencia de la propuesta para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en los estudiantes talentos. A través del análisis del criterio de expertos se valida la propuesta.

2.1 Diagnóstico de las particularidades del trabajo con estudiantes talentos en Matemática en la provincia Sancti Spiritus.

Para constatar el estado actual del problema de investigación se aplicó una encuesta (Anexo 1) a la muestra seleccionada de manera no probabilística o intencional conformada por 19 estudiantes de los grados décimo y onceno de una población de 22, lo que representa el 86.3 % del total. La misma estuvo compuesta por 6 preguntas en aras de determinar características de los estudiantes seleccionados como talentos en Matemática.

En la pregunta 1 relacionada con la preferencia por la resolución de problemas más que por la realización de ejercicios, 18 respondieron que si y 1 que no, para un 94,7% de la muestra.

En el caso de la interrogante 2, los 19 estudiantes encuestados respondieron no preferir conocer de antemano la solución del ejercicio, sino buscarla por si mismos, para un 100% de los encuestados.

En la pregunta 3, 9 estudiantes marcaron que reciben apoyo moral y material (47,4%), 8 adicionalmente realizan trabajos en común con sus padres (42,1%) y 2 reciben solamente apoyo moral (10,5%).

En las preguntas 4 y 5, los 19 estudiantes respondieron utilizar libros de consulta y encontrase motivados en el uso de la computadora, respectivamente, lo que representa el 100% de la muestra tomada.

En la interrogante 6, los 19 estudiantes marcaron afirmativamente la revisión en formato digital de documentación (100%), de ellos 4 en la casa (21,1%) y el resto en la escuela (78,9%).

Como complemento a la investigación, se aplicó un test (Anexo 2) a los 19 estudiantes con el fin de determinar sus conocimientos sobre desigualdades matemáticas y estuvo conformado por 4 interrogantes.

En la pregunta 1, 2 de los educandos respondieron tener algún conocimiento acerca de las desigualdades (10,5%) y 17 señalaron negativamente.

En las interrogantes 2 y 3, de 19 estudiantes, solamente 1 afirmó conocer las desigualdades de las medias y su aplicación en los máximos y mínimos, respectivamente, lo que representa un 5,3% de la muestra.

En la pregunta 4, los 19 estudiantes presentaron desconocimiento de la desigualdad fundamental y dificultades en el completamiento de las desigualdades.

Al realizar un análisis de los programas de Matemática se apreció que carecen de los elementos esenciales para la realización de la demostración de desigualdades como: las relaciones que existen entre las medias, la Desigualdad de Azuma, Desigualdad de Bernoulli, Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Desigualdad de Chebyshev, Desigualdad de Jensen, las desigualdades del reacomodo y la desigualdad triangular, entre otros.

A esto se añade que, al revisar los temas tratados en Olimpiadas de Matemática se pudo determinar que desde el primer evento de este tipo realizado con carácter internacional en 1959 en Rumania, las desigualdades matemáticas han hecho acto de presencia en la mayoría de las competencias. De estas se analizaron la XXXVI Olimpiada Internacional de Matemática efectuada en Toronto, Canadá en 1995, la XXXVII Olimpiada Internacional efectuada en 1996 en Munbai, India, la XXXVIII OIM efectuada en 1997 en Mar del Plata, Argentina, la XXXIX Olimpiada Internacional efectuada en 1998 en Taipei, Taiwán, la 41 Olimpiada efectuada en 1999 en Corea del Sur y la Olimpiada Iberoamericana para

estudiantes universitarios efectuadas en Septiembre de 1998 y en todas éstas están presentes las desigualdades.
También se tomaron en consideración las Olimpiadas Matemáticas Centroamericana y del Caribe de 1999 al 2002, algunas Olimpiadas Iberoamericanas de Matemática (comenzaron en 1985), Olimpiadas de Matemática del Cono Sur, Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, Olimpiada Matemática Ríoplatense, Olimpiadas Mexicana de Matemática (OMM), XXXVII Olimpiada de Matemática Española de Murcia (OME), Olimpiada Matemática de Chile, Olimpiadas Matemáticas Rusas y en la mayoría de las dos últimas décadas prácticamente siempre han estado presentes.
En general de un total de 48 eventos analizados, las desigualdades matemáticas han estado presentes en 40 de ellos para un 83,3 %. Basta comparar los problemas de cualquier fase de la Olimpiada para advertir el gran aumento de nivel experimentado en los últimos años.
Resulta válido agregar que existen pobres resultados de los estudiantes espirituanos en los concursos nacionales de conocimientos de Matemática en los diferentes niveles. Así, desde el año 2000 no se incluyen educandos de la provincia en la preselección nacional de Matemática.
La composición actual de los claustros, así como los modelos pedagógicos actuales de secundaria y preuniversitario no priorizan la profundización en esta ciencia. En la actualidad el trabajo con las desigualdades en los centros docentes se limita a la solución de inecuaciones y a la demostración de contadas desigualdades geométricas, en lo fundamental relacionada con la desigualdad triangular y en todos los casos con un bajo nivel de complejidad.
De acuerdo al diagnóstico realizado se obtienen las siguientes consideraciones:

1. Los estudiantes se encuentran motivados por el estudio de la Matemática y poseen apoyo de la familia en sus estudios, lo cual son elementos importantes para favorecer el desarrollo del talento. Sin embargo, carecen de los conocimientos necesarios sobre desigualdades.
2. Los programas de Matemática no abordan el tema de desigualdades y el fondo bibliográfico existente en las escuelas no satisface las necesidades de profundización en este aspecto.
3. El tema Desigualdades es de suma importancia en las Olimpiadas Matemáticas,

donde frecuentemente se aborda esta temática

4. Un alumno talento en Matemática de cualquier curso, tiene poco que hacer en las pruebas de este tipo sin una preparación complementaria.

2.2 Fundamentación de la propuesta.

En Sancti Spiritus, la atención a los estudiantes talentos en Matemática tuvo sus mejores momentos en los finales de las décadas de los 80 y 90 del pasado siglo con la creación de las especialidades en el IPVCE, cuando los profesores mejor preparados en Matemática se vinculaban al entrenamiento, desarrollando de manera presencial en las aulas la impartición de un grupo de temas propios de concursos y olimpiadas, se realizaban también algunas acciones dirigidas a la secundaria básica por parte de profesores del ISP y algunos interesados de los diferentes territorios.

Durante esta época se utilizaron también por primera vez las cartas docentes como una forma para atender, desde el nivel central, a los estudiantes que constituían cantera de la preselección nacional y permanecían en sus territorios provinciales.

El Estado ha realizado un esfuerzo en esta dirección con la edición de libros para el entrenamiento y la divulgación de materiales en soporte digital de calidad que abarcan ejercicios y compendios teóricos. Sin embargo, en manos de los estudiantes sin una correcta orientación y guía, constituyen un océano de conocimientos donde naufragan en el intento de seleccionar los problemas adecuados para la preparación.

Ante esta situación, se ofrece una alternativa más adecuada a las condiciones actuales, donde es posible su utilización tanto por profesores en el entrenamiento frontal, como directamente por los estudiantes para su preparación. Su valor fundamental radica en que constituye un instrumento eficaz para trabajar a distancia con los talentos previamente identificados.

La alternativa presentada en la investigación está encaminada a contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes talentos en Matemática en correspondencia con las condiciones actuales de la provincia Sancti Spiritus. Lo cual resulta de vital importancia ya que está presente el tema desigualdades matemáticas prácticamente en casi todos los exámenes de concursos y olimpiadas. Además el trabajo con ellas constituye un elemento importante para desarrollar el pensamiento en esta disciplina. La alternativa tiene como objeto el proceso de desarrollo del talento matemático en adolescentes y jóvenes en la provincia Sancti Spiritus.

La propuesta se sustenta básicamente en el enfoque histórico-cultural de L. S. Vigostky (1896-1934), psicólogo ruso creador de la nueva escuela sicológica, que plantea: "dentro de la actividad de influencias, las intencionales poseen especial importancia para que el individuo desarrolle sus potencialidades como ser social, como persona. La educación y el medio ponen en marcha los procesos de asimilación en relación con el desarrollo del individuo". (Zona de desarrollo próximo).

El precitado psicólogo la definió como "la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz". (Sanz, 2004)

Para definir la alternativa metodológica y los requisitos de su representación el autor comparte el criterio de Hernández al plantear lo siguiente:

"Se asumen los términos de alternativa metodológica como opción entre dos o más variantes con que puede contar el profesor para trabajar con los alumnos, a partir de las características de estos, elaborada en una asignatura con la finalidad de garantizar el empleo cada vez más eficiente de los métodos, las técnicas y procedimientos de que se dispone". (Hernández, 2008, p 3)

Su representación requiere que se explicite:

1. Para qué objeto de estudio ha sido creada, cuál es su objetivo.
2. Para qué variantes de las que posee la ciencia constituye una opción nueva.
3. En qué características individuales del objeto de estudio y para qué particularidades de su entorno ha sido creada.
4. Cuál es la diferencia cuantitativa y cualitativa con las opciones que ya existen, qué es lo novedoso en ella.
5. De qué forma se instrumenta en su aplicación práctica.
6. Por qué es mejor como opción para las condiciones para las que fue creada.

La presente alternativa metodológica ha tenido en consideración las características descritas para los estudiantes talentos, en particular su creatividad e independencia cognoscitiva, como una variante para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estos educandos en las condiciones actuales de Sancti Spiritus.

Es novedosa en esta propuesta la selección minuciosa de un grupo de actividades necesarias para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades, teniendo en cuenta las características propias de los talentos en Matemática, su independencia cognoscitiva y creatividad; debidamente organizadas y presentadas de forma clara, amena, graduada y organizada.

Es válido acotar que el éxito de esta empresa requiere el trabajo concatenado de los funcionarios y profesores de las diferentes enseñanzas, los padres y demás factores para la creación de espacios de intercambio y comunicación de los profesores y facilitadores con los estudiantes, en aras de garantizar que la información les llegue sistemáticamente y la retroalimentación necesaria.

Los principios en que se sustenta la alternativa metodológica propuesta son: la potenciación del trabajo independiente de los estudiantes y la racionalidad en la selección y presentación de las actividades.

La racionalidad en la selección y presentación de las actividades se pone de manifiesto a lo largo de las cartas docentes, ya que se trata en todo momento de optimizar el tiempo de los estudiantes, proponiendo aquellas actividades estrictamente necesarias y suficientes para el logro del objetivo.

La potenciación del trabajo independiente de los estudiantes está presente a lo largo de todo el diseño de la alternativa metodológica al ser concebida ésta, en lo fundamental, para el trabajo con los estudiantes de forma no presencial.

El núcleo y la novedad fundamental de la alternativa lo constituye la organización y presentación del contenido mediante cartas docentes; las que fueron denominadas de esta forma por el autor, sobre la base de los siguientes conceptos:

- Carta: Según el Gran Diccionario de la Lengua Española, Larousse 1996, la define como del latín charta, papel y del griego khartes, papiro, Papel. Escrito que una persona dirige a otra para comunicarse con ella. Medio escrito de comunicación cuyas características pueden variar según las intenciones del emisor. (Larousse, 1996).

- Docente: Según el Gran Diccionario de la Lengua Española, Larousse, lo define como aquel que enseña o que es relativo a la enseñanza**.** La palabra proviene del término latino *docens*, que a su vez deriva de *docēre* **(**“enseñar”**).** (Larousse,1996).

En consecuencia el autor define **cartas docentes** (Ver Anexo 3) como un medio escrito de comunicación, documento que se elabora e implica la presentación de ejercicios, problemas, situaciones de aprendizaje y metas cuya consecución redunde en la apropiación de conocimientos y modelos de actuación.

Por último es válido agregar que la alternativa se diseñó en aras de:

- Dotar a los profesores y estudiantes talentos en matemática de un material didáctico coherente que facilite el aprendizaje independiente de la demostración de desigualdades matemáticas.
- Propiciar, a través de las actividades propuestas en las cartas docentes, el desarrollo de la independencia cognoscitiva y la creatividad en los estudiantes para el aprendizaje y aplicación de los métodos matemáticos.

Para el diseño de la alternativa metodológica propuesta se sigue la vía formal porque se tienen en cuenta los elementos propios de la didáctica de la Matemática y la pedagogía para concebir las actividades en aras de contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes talentos en Matemática.

También está presente la vía no formal al concebir diferentes escenarios para su implementación.

2.2.1. Etapas de la alternativa metodológica propuesta.

A continuación se representa gráficamente la alternativa metodológica diseñada por el autor de la presente investigación: (Ver figura 2)

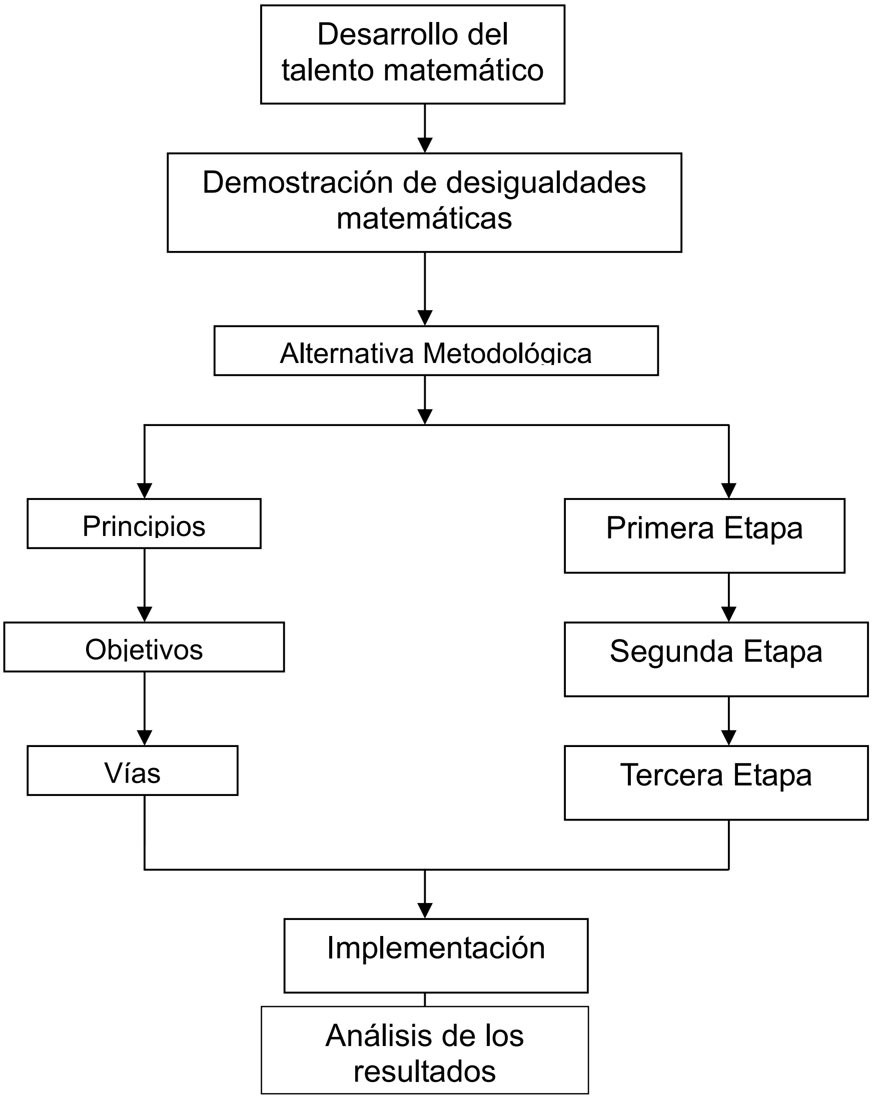


Figura 2. Etapas de la alternativa metodológica.

Como se aprecia en el esquema la alternativa cuenta con tres etapas:

Primera etapa: aproximación a elementos relacionados con el desarrollo del talento matemático.

Segunda etapa: determinación de los elementos esenciales relativos a las desigualdades.

Tercera etapa: Elaboración de las cartas docentes.

Para concebir la propuesta se consideraron, además de los presupuestos antes expresados, la caracterización realizada de los alumnos talentos en Matemática.

Para la determinación de los elementos del conocimiento matemático vinculados a las desigualdades se tiene en cuenta lo siguiente:

- Trabajo con variables:

Polinomios: Reducción de términos semejantes, Introducción y eliminación de paréntesis. Polinomios cíclicos. Divisibilidad de polinomios. División de un polinomio por un binomio de la forma (x – a). Descomposición factorial. Regla de Ruffini. Teorema de Descartes. Relaciones entre coeficientes y cantidad de raíces. Métodos de aproximación de polinomios. Disposición de raíces en un intervalo. Teorema fundamental del álgebra. Teorema del Binomio de Newton. Operaciones con fracciones algebraicas.

- Funciones:

Representación gráfica y propiedades de funciones básicas, entre ellas las polinómicas, racionales, potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, modulares, parte entera, parte fraccionaria, entre otras. Propiedades de las funciones: monotonía, concavidad y convexidad, paridad, periodicidad, signo. Factorial.

- Desigualdades básicas y específicas y sus propiedades.

Relación entre las Media Geométrica, Media Aritmética, Media Armónica y Media Potencial. Las desigualdades de Cauchy-Shwarz, Bernoulli, Hölder, Yensen, Desigualdad del reacomodo. Desigualdad triangular.

- Técnicas matemáticas de demostración.

Trabajo hacia atrás. Demostración de desigualdades con ayuda de la definición. Demostración de desigualdades considerando que se cumple la desigualdad y tratamos de realizar transformaciones hasta obtener una desigualdad conocida.

Método de demostración de desigualdades a la inversa. Método sintético de demostración de desigualdades. Método de inducción matemática para la demostración de desigualdades

- Aplicaciones intra y extramatemática de las desigualdades.
- Aplicaciones al Cálculo Diferencial e Integral.

- Aplicaciones a la solución de ecuaciones, de sistemas de ecuaciones y de problemas de máximo y mínimo.
- Sucesiones y series.

Sucesiones aritméticas, geométricas y armónicas. Sumas de sucesiones aritméticas. Sumas de sucesiones geométricas. Sucesiones recurrentes. Sucesiones módulo-periódicas. Sucesión de Fibonacci. Diferencias finitas.

Determinación de los principales elementos del conocimiento asociados a la demostración de desigualdades.

Definición

La proposición de que una expresión algebraica es mayor que o menor que otra se llama desigualdad.

En Matemática existen dos tipos de desigualdades:

1.- La desigualdad condicional o inecuación

2.- La desigualdad absoluta.

Una desigualdad se llama desigualdad condicional o inecuación si no es verdadera para todos los valores permisibles de las variables que en ella aparece y desigualdad absoluta si es verdadera para todos los valores permisibles de las variables que en ella aparecen.

Ejemplos: Desigualdades Condicionales o Inecuaciones

$3X - 9 > 0$

Ejemplos: Desigualdades Absolutas

$-3 < 2$ $\quad$ $a^2 + b^2 + 1 > 0$

Reglas para las desigualdades

Resolver una desigualdad cómo $3(x + 2) < 6$, significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Esto implica la aplicación de ciertas reglas tales como:

1. Si un mismo número es sumado o restado en ambos lados de la desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica: si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
2. Si ambos lados de una desigualdad son multiplicados o divididos por el mismo número

positivo, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica: si $a < b$ y $c > 0$, de modo que $ac < bc$ y $a/c < b/c$.

3. Si ambos lados de la desigualdad son multiplicados o divididos por el mismo número negativo, entonces la desigualdad tendrá el sentido contrario de la original. En forma simbólica: si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$ y $a/-c > b/-c$

4. Cualquier lado de la desigualdad puede ser reemplazado por una expresión equivalente. En forma simbólica: si $a < b$ y $a=c$, entonces $c < b$

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido contrario de la original.

6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevados cada uno a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

Por tanto $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$

Técnicas para la demostración de desigualdades**.**

Demostrar una desigualdad matemática significa probar que una expresión algebraica es menor o mayor que otra para cualquier valor de las variables que aparecen en la expresión o de acuerdo con determinadas condiciones que se establezcan para los valores que toman las variables. Existen varios métodos o técnicas para la demostración de desigualdades entre las que se encuentran:

a) Demostración de desigualdades con ayuda de la definición.

Por definición se supone que $a>b$ si $a-b$ es un número positivo. A su vez se supone que $a<b$ si $a-b$ es un número negativo. Para demostrar una desigualdad empleando la definición tendríamos que hallar la diferencia y demostrar cual es el signo de la desigualdad.

b) Demostración de desigualdades considerando que se cumple la desigualdad y tratamos de realizar transformaciones hasta obtener una desigualdad conocida.

En la demostración de desigualdades suelen utilizarse desigualdades conocidas, tales como la desigualdad fundamental ($a^2 \geq 0$,) que trae como consecuencias otras desigualdades como:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ donde $a, b \in R$

$(a + b)^2 \geq 4ab$

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ donde a, b, c $\in$ R

$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ donde a, b, c $\in$ R^+

c) Método de demostración de desigualdades a la inversa.

Para la utilización de este método de demostración de desigualdades consideramos que no se cumple la desigualdad para ciertos valores de la variable y si nuestra suposición no es cierta, la desigualdad es válida.

d) Método sintético de demostración de desigualdades.

Este método consiste en la transformación de una o varias desigualdades conocidas hasta obtener la desigualdad que queremos demostrar

e) Método de inducción matemática para la demostración de desigualdades.

Un método para demostrar resultados generales que dependen en algún sentido de los números naturales es conocido con el nombre de Inducción Matemática.

Esta dependencia de los números naturales significa: se sabe que una determinada afirmación es verdadera para algunos casos particulares y surge la pregunta. ¿Sigue siendo verdadera dicha afirmación para los infinitos números naturales restantes?

Principales desigualdades**:**

Mediante el conocimiento de un grupo de teoremas y técnicas pueden resolverse desigualdades de las que típicamente aparecen en las Olimpiadas de Matemática.

a) Desigualdad fundamental

La desigualdad fundamental satisfecha por cualquier número real, y de la cual se derivan todas las demás es: $x^2 \geq 0$, con igualdad sólo si $x = 0$. De forma más general $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 +\ldots + x_n^2 + \geq 0$, con igualdad sólo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Esta desigualdad fundamental trae como consecuencias las siguientes desigualdades:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ donde a, b $\in$ R

b) $(a + b)^2 \geq 4ab$

c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ donde a, b, c $\in$ R

d) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ donde a, b, c $\in$ R^+

b) Desigualdad entre las medias

La desigualdad básica entre las medias relaciona la media aritmética y la media geométrica.

Si x y y son números reales no negativos, entonces $\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{xy}$, con igualdad solo si x = y

Pudiendo generalizarse para n números no negativos.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n}$$

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tiene como consecuencia las siguientes afirmaciones:

- Si la suma de n números positivos es constante, entonces el producto será máximo cuando todos los números son iguales.
- Si el producto de n números positivos es constante, entonces la suma será mínima cuando todos los números son iguales.

De esta desigualdad se derivan también las siguientes consecuencias que pueden generalizarse y que son de gran utilidad en la resolución de problemas con desigualdades.

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$, y en general $x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$ para todo $x > 0$ y $a > 0$

a) $x + \frac{5}{x} \geq 2\sqrt{5}$

b) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ para todo $xy > 0$

c) $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$, para todo $x \in R$

d) $x + \frac{5}{x+1} \geq 2\sqrt{5} - 1$

También pueden demostrarse las desigualdades entre otras medias importantes como la armónica y la media cuadrática.

La media potencial de grado positivo es mayor o igual que la media geométrica y la media potencial de grado negativo es menor o igual. Por lo tanto: la media cuadrática es mayor o igual que la media aritmética, mayor o igual que la media geométrica y mayor o igual que la media armónica.

c) Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Esta desigualdad fue publicada por Bunyakovskii (1804-1889) en una monografía sobre integrales en 1859, veinticinco años antes que Schwarz (1843-1921), sin embargo es más conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz donde se cumple para cualquier número real.

Partiendo de la identidad de Lagrange para tres variables.

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-ay)^2+(cx-az)^2$$

Es evidente que $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$ y la igualdad solo se cumple si $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Generalizando: dados los conjuntos de números reales

$\{a_1+a_2+a_3+...+a_n\}$ y $\{b_1+b_2+b_3+...+b_n\}$, entonces

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]^2 \left[\sum_{i=1}^{n} b_i\right]^2$$

d) Desigualdad de Chebyshev

A Chebyshev se le reconoce como el creador de la escuela matemática de San Petersburgo cuyo eco e influencia ha llegado hasta nuestro tiempo en muchas ramas de la matemática. Esta escuela se distinguía por la tendencia a relacionar los problemas teóricos de la matemática con los problemas de la técnica y de la naturaleza. Según el propio Chebyshev "la unión de la teoría y la práctica proporciona los resultados más provechosos. Con ello, no sólo gana la práctica, sino que también salen beneficiadas las ciencias. También escribió: "La mayor parte de los problemas prácticos se reducen a problemas de máximo y mínimo que son nuevos para la ciencia y sólo su resolución puede satisfacer a la práctica, que siempre busca lo mejor y más ventajoso".

Chebyshev se dedicó desde su juventud a la teoría de probabilidades siendo el objeto de su primera tesis. Escribió en total cuatro trabajos sobre teoría de probabilidades, en los años 1845, 1846, 1867 y 1887. Su contribución más conocida a la teoría de la probabilidad es la llamada desigualdad de Chebyshev:

Considerando que los 2n reales tales que:

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, entonces se cumple que:

$$\left[\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\right]\left[\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}{n}\right] \leq \left[\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n}{n}\right]$$

Si las dos sucesiones se ordenan inversamente cambia el signo de la desigualdad.

e) Desigualdad de Reordenamiento

Dadas dos sucesiones de n reales, siendo cada una $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots b_n$.

Si se llama $a_1', a_2', a_3' \ldots, a_n'$ a una permutación cualquiera de $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, entonces se tiene que:

$a_1b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n \geq a_1' b_1 + a_2' b_2 +, a_3' b_3 + \ldots, a_n' b_n$.

e) Desigualdad de Nesbitt

Para todo a, b, c reales positivos se cumple que:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

f) Desigualdad de Hölder

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots; z_1, z_2, \ldots, z_n$ son secuencias de números reales no negativos, y $\lambda_a, \lambda_b, \ldots, \lambda_z$ son reales positivos que suman 1, entonces:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{\lambda_a}(b_1+b_2+\ldots+b_n)^{\lambda_b}\ldots(z_1+z_2+\ldots+z_n)^{\lambda_z} \geq a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \ldots z_1^{\lambda_z} + \ldots + a_n^{\lambda_z} b_n^{\lambda_b} \ldots z_n^{\lambda_z}$$

g) Desigualdad de Jensen

Si $f : I \longrightarrow R$ una función convexa. Entonces para cualquier $x_1, x_2, \ldots x_n \in I$

y cualquier número real no negativo $w_1, w_2, \ldots, w_n$, entonces:

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \ldots + w_n f(x_n) \geq (w_1 + w_2 + \ldots + w_n) f\left(\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_x}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}\right)$$ h)

Desigualdad de Schur

Sean a, b, c reales no negativos y $r > 0$. Entonces:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0$$

Con igualdad si a = b = c, o dos son iguales y el otro cero.

Sugerencias para la solución de los problemas de desigualdades.

En la solución de cualquier tipo de problema de desigualdades, se debe siempre en primer lugar buscar una solución relativamente fácil, y sólo después tratar de resolverlos con enfoques medianos o más difíciles. Las técnicas para acometer el trabajo con desigualdades "varía mucho de persona a persona”, aunque por lo general muchos consideran analizar en el siguiente orden: las medias potenciales AM-GM, Cauchy, Chebyshev (Reordenamiento), Jensen, antes de trasladarse a técnicas más inteligentes.
Realmente no existe una técnica general que asegure el éxito en los problemas, por lo que se sugiere la ejercitación de las diferentes desigualdades clásicas con ejemplos en los que se pongan de manifiesto los diferentes “trucos”. Es muy importante determinar el ámbito de validez de cada una de ellas. Se sugieren a continuación algunas recomendaciones para demostrar desigualdades:

a) Intente transformar la desigualdad para llevarla a la forma $\sum p_i$, con $p_i \geq 0$, por ejemplo

   $p_i = x_i^2$

b) Recuerde la expresión de las distintas medias y sus relaciones. Analice si mediante transformaciones puede aplicarlas.

c) Analice si puede aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

d) ¿Puede aplicar la desigualdad de reordenación?

e) ¿Es simétrica? En tal caso supóngase $a \leq b \leq \ldots$

f) Puede resultar útil expresar la desigualdad mediante las funciones simétricas elementales.

g) Si se tratara de una desigualdad sobre los lados de un triángulo intente usar la desigualdad triangular. Puede poner $a = x_1 + x_2$, $b = x_2 + x_3$, $c = x_3 + x_1$, donde los números

x_1, x_2, x_3 son números reales positivos.

h) Trate de llevar la desigualdad a la forma f(a,b,…) ≥ 0. Si f es una función cuadrática en una de las variables, puede ser útil considerar su discriminante.

i) Intente realizar estimaciones formando sumas o productos telescópicos:

$a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 + \dots + a_n - a_{n+1} = a_n - a_1$

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_1}$$

j) Si una suma de cantidades positivas esa constante, su producto es máximo cuando todas son iguales.

k) Si un producto de cantidades positivas es constante, su suma es mínima cuando todos son iguales.

2.2.2 Elaboración de las cartas docentes.

Para elaborar las cartas docentes propuestas se determinaron los siguientes aspectos:

a) Una selección de actividades necesarias y suficientes para el desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en los estudiantes que se desglosan en:

Necesarias:

- Ejercicios donde se utilice la relación básica $\left(f(x)\right)^2 \geq 0$
- Ejercicios donde se utilice la relación entre las medias potenciales.
- Ejercicios que contengan las funciones básicas.
- Ejercicios donde se apliquen las diferentes técnicas matemáticas de demostración de desigualdades.
- Ejercicios donde estén presentes las desigualdades clásicas.
- Ejercicios de aplicación de desigualdades a la resolución de otros tipos de problemas como:
  - Determinación de valores máximos y mínimos.
  - Resolución de ecuaciones.

Suficientes:

Teniendo en cuenta los elementos considerados a lo largo de la investigación, se analizaron 128 ejercicios para seleccionar de ellos un grupo a modo de ejemplos y otros para el trabajo independiente.

b) Decidir la forma de organizar el contenido.

Atendiendo a la situación actual de la estimulación del desarrollo del talento matemático en Sancti Spiritus, las características de los claustros de profesores y los objetivos del proyecto al cual tributa la investigación, se decidió elaborar un conjunto de actividades organizadas como cartas docentes contentivas de los conocimientos teóricos imprescindibles así como los ejercicios necesarios y suficientes para el aprendizaje de la demostración de desigualdades en estudiantes talentosos.

Las cartas docentes se han dividido en cuatro, conformándolas en un orden jerárquico atendiendo a los conocimientos que se deben adquirir y a las habilidades que se desean desarrollar.

Una primera carta a modo de introducir las desigualdades haciendo hincapié en las técnicas para la demostración.

En la segunda carta se abordan desigualdades específicas como las desigualdades entre las medias, Cauchy Schwarz, Chebyshev, Desigualdad de Reordenamiento entre otras con ejemplos representativos de cómo abordar estas demostraciones.

En la tercera carta se abordan aplicaciones de las desigualdades a otros tipos de ejercicios como la aplicación de la desigualdad de las medias en la solución de problemas de máximos y mínimos.

La cuarta carta comprende ejercicios de olimpiadas, más integradores y que necesitan ya un determinado nivel de destreza y creatividad para la solución de los mismos.

c) Concebir indicaciones que conduzcan al alumno a una búsqueda activa y reflexiva.

Las cartas docentes deben propiciar en primer lugar la independencia cognoscitiva de los estudiantes en la búsqueda del conocimiento. Cada carta debe ir asegurando el nivel de partida necesario para comprender las siguientes, propiciando que el estudiante le asigne significado a lo que va aprendiendo.

Las cartas deben estimular al alumno a aprender, valorar y ajustar las metas y a estimular la creatividad a la hora de abordar la solución de un ejercicio o problema.
Se deben proponer cartas donde se ponga al estudiante en la disyuntiva de tomar decisiones frente a una determinada situación. Deben proponerse ejercicios que resulten abarcadores del tema que se está tratando y estimulen la creatividad del alumno.
En las cartas se deben presentar ejercicios de Olimpiadas resueltos y abarcadores del tema.

El entrenamiento para la solución de problemas de concurso debe estar enfocado, en la mente del estudiante, de herramientas que faciliten el acceso de una estrategia adecuada para dar solución a los problemas específicos.

Se necesita que el estudiante pueda instalar en su mente mecanismos de reconocimiento y asociación para que se le ocurra, dentro del tiempo disponible para un concurso, esas estrategias que después del concurso le pueden parecer tan sencillas que le resulta difícil imaginar porque no se le ocurrieron ahí. Es necesario tener los conocimientos suficientes dentro del dominio a que pertenece el problema, lo cual es una condición necesaria para el éxito.

Muchas de las herramientas ya están en la literatura y no es necesario diseñarlas sino adaptarlas para los propósitos específicos de entrenamiento. A partir de los conocidos, diseñar otras que podrían llamarse variantes de un mismo método o estrategia.

El estudiante debe reconocer y valorar las estrategias ya conocidas en la comunidad matemática y apropiarse de ellas, redescubrirlas.

En la solución de problemas, hay que seguir la táctica de la sospecha. Es decir, se lee el enunciado bajo la hipótesis de que el creador del problema quiere que se observe lo que debería ser obvio --en este caso, si las dos desigualdades son parecidas entonces eso es un signo que se debería interpretar como que es posible usar la primera para demostrar la segunda.

2.3. Validación de la propuesta de alternativa metodológica.

El presente epígrafe aborda todo el trabajo emprendido para constatar la factibilidad de la alternativa metodológica diseñada por el autor, iniciándose el mismo con el criterio que sobre la misma ofrecen un total de 8 expertos seleccionados por su capacidad y experiencia de trabajo ante la temática objeto de investigación.

2.3.1 Criterio de selección de los expertos con respecto a la factibilidad de la propuesta de alternativa.

La constatación de la factibilidad de la alternativa metodológica se basó en la utilización del Delphi, como uno de los métodos del "criterio de expertos".

La aplicación del método posee ventajas y desventajas. Se citan entre las ventajas:

- Permite tener criterio con mayor grado de objetividad.
- El consenso logrado sobre la base de los criterios de los expertos es muy confiable.
- Las decisiones sobre la base de los criterios de los expertos, obtenidos por este método, tienen altas probabilidades de ser eficiente.
- Permite valorar alternativas de decisión.
- Evita conflictos entre expertos (al ser anónimo) y crea un clima favorable a la creatividad.
- El experto se siente involucrado plenamente en la solución del problema y facilita su implantación.
- Garantiza libertad de opiniones (por ser confidencial).

Como desventajas se citan:

- Muy laborioso y lleva mucho tiempo aplicarlo.
- Se emiten criterios subjetivos, por lo que el proceso puede estar permeado de subjetividad y sometido a influencias externas.

La aplicación del método se inició con la selección de los expertos. Para ello, se aplicó una encuesta (Anexo 4) a un grupo de 14 profesores de Matemática de la Universidad de Sancti Spiritus, el ISP y el IPVCE, con amplia experiencia en la docencia, en particular con estudiantes talentos en Matemática.

Según el método Delphi, se procedió a continuación de la siguiente manera:

El coeficiente de competencia (K) del experto (Anexo 4) se determinó como:

$K = \frac{1}{2}\,(Kc + Ka)$

Donde Kc es el coeficiente del conocimiento sobre el tema a valorar. Es otorgado por el propio experto según la escala establecida

Este valor, se multiplica por 0,1 y se obtiene Kc.

Por su parte Ka representa el coeficiente de argumentación. Este se autoevalúa en alto, medio o bajo con el grado de influencia de las siguientes fuentes: análisis teóricos realizados por el posible experto, su experiencia obtenida, trabajo de autores nacionales, trabajo de autores extranjeros, su propio conocimiento sobre el problema en el extranjero y su intuición. Los valores de este coeficiente se otorgaron atendiendo a una escala preestablecida.

Debido a que el coeficiente K, teóricamente, se encuentra siempre entre 0,25 y 1, mientras más cercano esté el valor k de 1, mayor es el grado de competencia de la persona.

Se tuvo en cuenta, además, una valoración cualitativa, a partir de algunos indicadores personales como: categoría docente, científica, años de experiencia en la docencia, particularmente como profesor universitario. Otros aspectos de interés considerados fueron los conocimientos acerca de las teorías de diseño curricular y de la ciencia objeto de estudio.

Quedaron caracterizados como expertos los 8 profesores cuyo coeficiente de competencia resultó mayor que 0,70. (Anexo 5, Tabla 2)

De ellos, el 100% son master. Con relación a la categoría docente el 63%, son profesores auxiliares y el resto asistentes. Con respecto a los años de experiencia en la docencia se obtuvo un promedio de 18,7 años. Los resultados de la aplicación de la encuesta a los expertos y sus características generales se recogieron en el (Anexo 5). De los resultados obtenidos pudo asegurarse que la muestra de expertos seleccionada tiene una alta competencia.

Las dimensiones para valorar la propuesta fueron:

1 Evaluar la fundamentación teórica y metodológica de la propuesta.

2 Evaluar la estructura y organización de la propuesta.

3 Evaluar la aplicabilidad y efectividad de la propuesta.

Donde los indicadores por dimensión.

Dimensión 1: Fundamentación teórica y metodológica de la propuesta.

Indicadores:

- o Nivel en que valoran la variedad, uso y manejo de la Bibliografía.
- o Nivel en que valoran los fundamentos teóricos que respaldan la propuesta.

Dimensión 2: Estructura y organización de la propuesta.

Indicadores.

- o Nivel en que valora la graduación de las tareas dentro del sistema de cartas y concatenación entre las diferentes cartas.
- o Nivel en que valora la asequibilidad de los enfoques en la presentación de los ejercicios y la teoría.

Dimensión 3: Aplicabilidad y efectividad de la propuesta.

Indicadores.

- o Nivel en que valora la contribución de la realización de la propuesta la estimulación de la independencia cognoscitiva y la creatividad de los estudiantes.
- o Nivel en que valora la pertinencia de las indicaciones para la puesta en práctica de la propuesta.
- o Nivel en que valora las posibilidades prácticas de aplicación de la propuesta.

Para valorar, en una escala ordinal, cada uno de los indicadores, se utilizó el escalamiento tipo Likert; que consiste en proponer un conjunto de afirmaciones o juicios, ante los cuales se solicitó la opinión de los sujetos a los que se aplica.

Para este trabajo se asumió una escala que se interpretó de la siguiente manera:

M. A	B. A	A	P. A	I
Muy adecuada	Bastante adecuada	Adecuada	Poco Adecuada	Insuficiente

Es decir, se pidió al sujeto que en cada juicio eligiera una de las cinco alternativas de la escala. Cada experto obtuvo una puntuación total que estaba dada por la suma de los valores correspondientes a cada juicio seleccionado. A los expertos, se les aplicó una encuesta (Ver anexo 6) con el objetivo de valorar los distintos indicadores considerados. Los resultados se resumen en una tabla que muestra la valoración dada por cada experto en cada uno de los aspectos (Ver anexo 6).

2.3.2 Constatación de la factibilidad de la alternativa metodológica y análisis de los resultados obtenidos.

El procesamiento estadístico de los resultados obtenidos se realizó mediante el método "Jorgerson" que permite asignar un valor de escala a cada aspecto y determinar límites entre cada categoría para llegar a una escala ordinal en la que cada aspecto corresponda a una categoría semejante a la que se utiliza para recoger la opinión de los expertos.

Las tablas de frecuencia de las categorías por indicador (Ver anexo 7), donde se aprecia que los indicadores 1, 3, 4 y 6 son los más favorecidos por los expertos; ellos son: la variedad y manejo de la Bibliografía, la asequibilidad de los enfoques en la presentación de los ejercicios y la teoría, la graduación de las tareas dentro del sistema de cartas y concatenación entre las diferentes cartas, así como la contribución de la propuesta a la estimulación de la independencia cognoscitiva y creatividad de los estudiantes.

Los indicadores 2, 5 y 7 fueron medianamente favorecidos.

El indicador 5, referido a las indicaciones para la puesta en práctica de la propuesta fue valorado como adecuado por tres de los expertos, bastante adecuado por tres y muy adecuado solo por 2.

Los indicadores 2 referido a los fundamentos teóricos que respaldan la propuesta son valorados como adecuados por 3 de los expertos, el resto los valora como muy adecuado y bastante adecuado.

El indicador 7 referido a las posibilidades prácticas de aplicación de la propuesta son valoradas como adecuados por 4 de los expertos, el resto los valora como muy adecuado y bastante adecuado.

Luego se calcula el promedio de las frecuencias relativas acumuladas por indicador y se obtiene una distribución normal estandarizada donde el intervalo de confianza es (-3,49 ; 3,49). Los puntos de corte se obtienen calculando el promedio de cada categoría, los mismos establecen la escala a utilizar. El valor de cada indicador se obtiene a partir del promedio de los valores otorgados a cada uno de ellos, este número se compara con la escala para determinar una matriz final.

Para los indicadores 1, 3, 4, 6 se obtiene la categoría de muy adecuado, pues sus valores son menores que -0,12 que corresponden a esta categoría.

El indicador 2 bastante adecuado, tiene un valor de 0,49 y se encuentra en el intervalo (-0,12; 2,09) en correspondencia con esta categoría. Los indicadores quinto y séptimo también son bastante adecuados, sus respectivos valores 0,58 y 0,78 así lo expresan.

En general se valoraron como muy adecuada la variedad y manejo de la bibliografía, así como aspectos importantes del sistema de cartas como:

1. La asequibilidad de los enfoques en la presentación de los ejercicios y la teoría.
2. La graduación de las tareas dentro de las cartas y concatenación entre ellas.
3. La contribución de la propuesta a la estimulación de la independencia cognoscitiva y la creatividad de los estudiantes.

El resto de los indicadores se valoraron como bastante adecuados:

4. Los fundamentos teóricos que respaldan la propuesta.
5. Las posibilidades prácticas de aplicación de la propuesta.
6. Las indicaciones para la puesta en práctica de la propuesta.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que los expertos avalan la calidad de la fundamentación teórica y metodológica de la propuesta, así como la estructura, organización, aplicabilidad y efectividad de la alternativa.

Los expertos son del criterio que las cartas docentes resultan pertinentes y factibles de ser utilizadas para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades y el desarrollo del talento matemático en los estudiantes.

CONCLUSIONES

- En los referentes teóricos se aborda la identificación del talento y cómo desarrollarlo, determinando la edad más idónea para ello, así como se hace referencia a las habilidades, el lugar importante que ocupan las desigualdades en la Matemática y las características de las actividades para formar y desarrollar la habilidad demostrar desigualdades, pero no se hace énfasis en actividades que estimulen la creatividad en el estudiante, lo que permitió la fundamentación de la propuesta de alternativa metodológica.

- En el diagnóstico del estado actual se aprecia que los planes de estudio no contemplan la profundización en el tema desigualdades, así como los materiales al alcance de los estudiantes no se encuentran didácticamente organizados, ni brindan adecuada orientación para el desarrollo de la habilidad. La demostración de desigualdades está presente en el 83% de los 48 eventos olímpicos internacionales analizados. Los estudiantes se encuentran motivados y poseen apoyo familiar pero carecen de los conocimientos necesarios sobre desigualdades para triunfar en este tipo de exámenes.

- La alternativa metodológica propuesta se caracteriza por potenciar el trabajo independiente y utilizar cartas docentes que abarcan racionalmente los conocimientos teóricos imprescindibles así como ejercicios suficientes para favorecer la formación de la habilidad demostrar desigualdades con creatividad en las condiciones actuales de la enseñanza de la Matemática en Sancti Spiritus.

- La alternativa metodológica fue validada por los expertos quienes consideran que es factible y asequible, posee rigor científico, sus pasos se explican con claridad y contribuye a la estimulación de la creatividad de los estudiantes.

RECOMENDACIONES

1. Generalizar la propuesta del empleo de cartas docentes a otros temas de las matemáticas.

2. Analizar, la factibilidad de esta propuesta en otras disciplinas de las “Ciencias Puras” tales como la Física y la Química.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alonso, J. A; Renzulli, J. (2003). Manual Internacional de Superdotación, Madrid. España
2. Álvarez De Zayas, Rita Marina (1997).Hacia un curriculum integral y diferenciado. La Habana, Cuba.
3. Álvarez Pérez, Marta (1994). Apuntes sobre la actuación cubana en las Olimpiadas Internacionales de Matemática a partir de 1994. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (No. 1, Vol. 1, Julio 2003, pp. 47-51). Habana, Cuba
4. Arocas Sánchez, Enma, Martínez C., Pilar, Martínez Francés, María Dolores (2001). ¿Qué necesidades educativas tienen los alumnos más capaces?, Valencia, España.
5. Arocas Sánchez, Enma, Martínez Coves Pilar, Martínez Francés, María Dolores, Regadera López, Agustín (2005). La atención educativa al alumnado con altas capacidades. Valencia, España.
6. Arteaga Valdés, Eloy (2002). Calidad y creatividad en Educación Matemática. Artículo de Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas(Año 3 No. 2), Universidad Autónoma de Querétaro,
7. Astigarraga, Eneko (2002). El método Delphi. Universidad de Deusto, San Sebastián. España. Versión digital http://www.echalemojo.org/uploadsarchivos/metodo_delphi.pdf
8. Ballester, P (2001). Las Inteligencias Múltiples. Murcia, España.
9. Barton, Reid (2005). Well-know Inequalities, Estados Unidos.
10. Benavides Simón, Maryorie (2008). Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. Granada, España. http://hera.ugr.es/tesisugr/17349515.pdf
11. Bermejo, Rosario (2002). Excepcionalidad: Los Superdotados. Congreso Regional “Las Necesidades Educativas Especiales: Situación actual y retos de futuro, Universidad de Alicante, España.
12. Betancourt Morejón, Julián (2004). Reflexiones en torno a los niños superdotados, la creatividad y la educación. Centro de Estudios e Investigaciones de Creatividad Aplicada, Guadalajara, Jalisco. México.
13. Bjorn, Poonen (2005). Inequalities. Universidad de California, Estados Unidos. Versión

digital http://mathcircle.berkeley.edu/BMC6/ps0506/inequalities.pdf
14. Borland, Hames H. (2003). Rethinking gifted education. Estados Unidos.
15. Bouza Herrera, Carlos (2000). La enseñanza de la matemática en los preuniversitarios cubanos: resultados y retos, Universidad de la Habana, Habana. Cuba.
16. Carneiro, Emmanuel (2003). Desigualdades - nivel III, Olimpiada Brasileira de Matemática, Brasil.
17. Cañas, A. J (2006). Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. San José, Costa Rica.
18. Castro Ruz, Fidel (1974). Discurso de inauguración de la Escuela Lenin. Versión digital.
19. Castro Ruz, Fidel (1990).Discurso de clausura del Congreso Internacional Pedagogía 90. Versión digital.
20. Correa, Pablo (2008). Promoción del talento en matemáticas para niños (as), adolescentes y jóvenes. Versión digital en: www.usergioarboleda.edu.co/semicirculo/universitariosprematuros.htm, Estados Unidos.
21. Contreras Sepúlveda, Juana y del Pino Ormachea, Claudio (2007). Media Aritmética versus Media Geométrica. Artículo en "Revista del Instituto de Matemática y Física". Universidad de Talca. Chile.
22. Cirtoaje, Vasily, Can, V.Q.B, Anh T. Q. (2009). Inequalities with beautiful solutions, Ho Chi Minh city University of Science .Vietnam.
23. Díaz González, Mario (2007). Problemas de matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. Habana, Cuba.
24. Diccionario de la Real Academia Española (2000). Versión digital.
25. Diccionario de la Lengua Española, Larousse (1996). Versión digital.
26. De Guzmán, Miguel (2002). Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz en la Comunidad de Madrid. Versión digital en: http://www.estalmat.unican.es/documentos/Trabajos_Guzman/programa__talen-to.pdf. La Gaceta de la RSME, vol. 5,1 Revista Educación. Madrid, España.
27. De Guzmán, Miguel (1996). El Tratamiento Educativo del TALENTO Especial En

Matemáticas. Versión digital en http://thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es.estalmat/files/MGUZMAN_TRATAMIENTO_EDUCATIVO.pdf. Madrid, España.

28. De Guzmán, Miguel (1996). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Madrid, España.
29. De Zubiría Samper, Miguel (2003). Educación de excepcionales e informática. Universidad Javeriana de Santa Fe de Bogotá. Colombia.
30. De Zubiría Samper, Miguel (2006). El mito de la inteligencia y los peligros del cociente intelectual. Universidad Javeriana de Santa Fe de Bogotá. Colombia.
31. De Zubiría Samper, Miguel (2007). Psicología del Talento y la Creatividad. Universidad Javeriana de Santa Fe de Bogotá. Colombia.
32. Del Cerro del Valle, Javier (1995). La superdotación en las reformas sociales ¿un fenómeno marginal? Murcia, España.
33. Feldhusen, John F. (1995). Identificación y desarrollo del talento en la Educación (TIDE). Revista Ideación No. 4 de mayo de 1995. Universidad de Purdue, USA.
34. Ferrer Vicente, Maribel (2008). Como dirigir el proceso de formación de habilidades matemáticas. Santiago de Cuba, Cuba.
35. García Capitán, Francisco Javier. (2002). Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas. Priego de Córdova, Córdova, España.
36. García Gual, Jesús & Hernández, Eugenio & Sánchez Benito, Mercedes (2006). Revista ESTALMAT No. 176. Madrid, España.
37. García Rodrigo, Jose Luis. (2005) Taller de Talento Matemático. Zaragoza. España.
38. Genovard, RC y Castelló, T.A (1990). El límite superior. Madrid, España
39. Gil Crisóstomo, Aldo Juan (2007). Olimpiadas Internacionales. Lima, Perú
40. Gomá Nasarre, Antoni & López, Marieia. (2010). Scratch, un entorno agradable para la programación. Tercer Seminario para estimular el talento precoz en matemáticas. Valencia, España.
41. Guétmanova, A. (1989). Lógica. Editorial Progreso, Moscú. URSS.

42. Gunaydin, Murat H. The Delphi Metod, Jordania. Versión en soporte digital http://www.iyte.edu.tr/~muratgunaydin/delphi.htm
43. Heller, K. A (1993). Structural tendencies and issues of research on giftedness and talent. Universidad de Munich, Alemania.
44. Heller, Kurt (2000). The internacional handbook of giftedness and talent. Universidad de Munich, Alemania.
45. Hernández, Eugenio (2008). Talento precoz en Matemáticas: modelos de detección. I Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas. V Reunión Nacional de Estalmat (14, 15 y 16 de marzo de 2008). Tenerife, España.
46. Huertas, R, Christiam (2008). Determinación de Máximos y Mínimos Aplicando Desigualdades. Lima, Perú.
47. Krutetskii, Vadim Andreevich. (1976). The psychology of mathematical habilities in school children. URSS.
48. Krutetskii, Vadim Andreevich. (1976). Estudio sobre las diferencias en el desarrollo de habilidades de acuerdo a la edad de los niños. URSS.
49. Laurente Artola, Hugo V. (2008) Artículo sobre Desigualdad de las Medias. Instituto de Ciencias y Humanidades, Lima, Perú.
50. Litvinenko, V. y Mordkóvich, A. (1989). Prácticas para resolver Problemas Matemáticos. Editorial Mir, Moscú. Rusia.
51. Lorenzo García, Raquel y Martínez Llantada, Marta. (2003) Creatividad y talento. Habana, Cuba.
52. Lorenzo García, Raquel (2009). Talento: Atracción mutua entre sujetos talentosos y organizaciones de prestigio. Habana, Cuba.
53. Lorenzo García, Raquel (2005). El Maestro y la familia como promotores del talento, Habana. Cuba
54. Lorenzo García, Raquel (2005). Reflexiones sobre el talento femenino en la Dirección y la Ciencia, Habana, Cuba.
55. Lorenzo García, Raquel (2006). ¿A qué se le denomina talento? Revista Intangible Capital No. 11 Vol 2 pp 72-163, Habana, Cuba.

56. Martínez Llantada, Marta y Lorenzo García, Raquel (2002). Polémicas en torno al desarrollo del talento. Revista Cubana de Psicología (v.19 n.1), Habana, Cuba.
57. Mayor Lorán, Joel (2009). Donde nacen los científicos. Versión digital www.granma.cubaweb.cu/2009/04/13/nacional/artic01.html, (Año 13 / Número 103). Habana, Cuba.
58. Mazón Ávila, Antonio & Fabelo Rodríguez, Beatriz (2000). Una propuesta para la asimilación de conceptos matemáticos a través del Aprendizaje Significativo. Universidad de Pinar del Río, Cuba.
59. Mildford, Thomas J. (2005) Olympiad Inequalities, Estados Unidos.
60. Miller, Richard C. (1990). Discovering Mathematical Talent, Estados Unidos.
61. Mitrinovic, D., Pecaric, J. E., Finc A. M. (2009). Classical and New Inequalities in Análisis. Kluwer Academic Publisher.
62. Monks, F.J (1992). Desarrollo de los adolescentes superdotados. Ediciones Salamanca. España.
63. Montaño Valle, Antonio (2002). La inteligencia emocional. Origen y concepto. Universidad de Huelva, España.
64. Morris, Robert.(1991). Estudios en educación matemática. Educación matemática extraescolar. Vol 6. París, Francia.
65. Nieto, José Heber. (2009). Desigualdades, Venezuela. Versión digital http://www.acm.org.ve/desigual.pdf
66. Noda Rodríguez, María del Mar (2007). Sobredotación, test de inteligencia e igualdad de oportunidades educativas. España. Versión digital http://www.rieoei.org/deloslectores/384Noda.pdf.
67. Ouardina, Abderrahim. Máximos y Mínimos sin Derivación. Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, España.
68. Ontoria, A. & Novak (1993) Los mapas conceptuales: una técnica para aprender. Madrid, España.
69. Ontoria Peña, Antonio (1999). Potenciar la capacidad de aprender y pensar. Ediciones Nárcea, Madrid. España.
70. Pasarín Vázquez, María Jesús y Feijoo Díaz, Mercedes (2005). Desarrollo del Talento

Matemático. Un programa de Intervención, La Coruña. España.

71. Pérez Alcazar, Jesús Hernando (2008). Promoción del talento en matemática para niños, adolescentes y jóvenes. Universidad Sergio Arboleda. Colombia. Versión digital: http://www.usergioarboleda.edu.co/semicirculo/queesuntalentosemicirculo.htm
72. Pérez Flores, Rafael. (2006). Mapas conceptuales y aprendizaje de Matemáticas. Universidad Autónoma Metropolitana de México. México.
73. Prieto, María Dolores (2002). Perfiles de los alumnos con talentos específicos. Versión digital en: www.educarm.es/templates/portal/images/ficheros/revistaEducarm/6/e2k05_11.pdf, España.
74. Prieto, M. D. y Ferrándiz, C. (2001), Inteligencias Múltiples, Málaga, España.
75. Renzulli, Joseph. (1992). A general theory for the development of creative productivy in young people. Estados Unidos.
76. Renzulli, Joseph y Reis, S (1992). Desarrollo y educación de los niños superdotados. Ediciones Salamanca, España.
77. Renzulli, J.S (1994). El concepto de los tres anillos de la superdotación: un modelo de desarrollo para una productividad creativa. Ediciones Salamanca.
78. Rosario. Héctor (2005) Mathematical Minds in Action: Identifying and Nurtaring Talent. Department of Mathematical Sciencies. University of Puerto Rico, Puerto Rico.
79. Rogado Hernández, María Isabel (2006). La Educación del Alumnado con altas capacidades. España.
80. Ruth Coleman, Mary (2008). Doce características del talento; un perfil imparcial (Adaptación del Departamento de Educación de Colorado), Estados Unidos
81. Sáez, Eduardo & Szánto, Iván (2004). Inducción Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.
82. Sánchez Fernández, Carlos (2001). Apuntes sobre la proyección socio-cultural del profesor de Matemáticas. Revista Ciencias Matemáticas No. 2/2001. Universidad de la Habana. Cuba
83. Sánchez Fernández, Carlos & Valdés Castro, Concepción (2003). Bosquejo histórico de la Actividad Matemática en Cuba. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y

Computación

84. Sánchez López, Cristina (2006). Configuración cognitiva de los alumnos de Altas Habilidades, Universidad de Murcia, España.
85. Sanz Cabrera, Teresa (2004). El enfoque histórico-cultural: su contribución a una concepción pedagógica contemporánea. Cuba.
86. Schilke Korzan, Mary Rita. El Niño Superdotado. Córdova, España.
87. Schilke Korzan, Mary Rita (2009). Superdotados, Talentosos y Altas Capacidades. Córdova, España.
88. Silva Ortiz, María Teresa (1992). El niño sobredorado. México
89. Soriano de Alencar, Eunice (2003). La Escuela y el Desarrollo del Talento Creativo. Revista INNOVANDO No.8 Año 2 del Equipo de Innovaciones Educativas.
90. Soriano de Alencar, Eunice M.L y Sarra, Marthai (2008). La Educación para la creatividad. Versión digital http://marthaisarra.obolog.com/educacion-creatividad-78855,
91. Torres Millayes, Elizabeth (2007). El niño superdotado y talentoso. Estados Unidos.
92. Urbina, Leonardo (2006). Notas en Desigualdades. Estados Unidos.
93. Valenzuela, Teresa (2006). El Talento y su desarrollo desde la escuela. Versión digital en: http://www.cmbfradio.cu/cmbf/educacion/educacion_00000086.html Ciudad de la Habana, Cuba
94. Verhaaren, Patrice R. (2007). Educación de niños y jóvenes superdotados. Centro de Educación Grupo Educare, Ministerio de Educación y Ciencia. Buenos Aires, Argentina.
95. Vigostky, L.S. (1987): Imaginación y creación en la edad infantil, Ed. Pueblo y Educación. La Habana.
96. Zaldívar Carrillo, Miguel Erasmo y Mayo Parra, Israel. (2002). Apuntes necesarios acerca de la relación entre ejercicios, problemas y tareas. CEDU, Ciudad de la Habana, Cuba.

ANEXO 1

ENCUESTA

Estimado compañero (a):

Esta encuesta se desarrolla con el objetivo de conocer algunas características de los estudiantes seleccionados como talentos en Matemática. La encuesta es anónima, se le solicita que sea lo más sincero (a) posible y colabore con la información que se solicita, marcando con una cruz la respuesta correcta.

1. En el estudio de las matemáticas manifiestas una preferencia por la resolución de problemas más que por la realización de ejercicios.

Si _____ No _____

2. En el proceso de investigación o solución de un ejercicio o problema matemático prefiere usted:

_____ que con anterioridad le digan la respuesta.

_____ encontrar la respuesta por sí solo.

3. Reciben de sus padres:

_____ apoyo moral

_____ apoyo moral y material (libros y material para sus experimentos)

_____ trabajo en común con sus hijos y conversaciones con ellos sobre matemáticas y ciencias.

_____ ningún tipo de apoyo.

4. ¿Acostumbras a usar libros de consulta u otros documentos para profundizar sobre los aspectos matemáticos tratados?

Si______ No ______

5. ¿Te motiva trabajar en una computadora? Si _____ No _____

6. ¿Tienes posibilidades de revisar información en formato digital? Si _____ No _____. De responder afirmativamente marque donde puede ser: En la casa _____, En el Joven Club de Computación _____, En la Escuela _____,En otro lugar _____

Muchas gracias

ANEXO 2

TEST DE CONOCIMIENTOS

Estimado compañero (a):

Este test se desarrolla con el objetivo de conocer los conocimientos que usted posee y que facilitan la formación y desarrollo de habilidades en el tema desigualdades matemáticas en el proceso de aprendizaje.

1.- Las desigualdades juegan un rol fundamental en matemática, permiten establecer que unas expresiones sean mayores o menores que otras. Los matemáticos suelen usar las desigualdades para aproximarse a cantidades cuyas fórmulas exactas no pueden ser fácilmente computadas. Algunas se usan tan a menudo que se les ha puesto nombre **¿Conoce alguna de estas desigualdades? Menciónelas.**

2.- En las competencias internacionales de problemas aparecen con mucha frecuencia las desigualdades entre ellas las que tienen que ver con las desigualdades de las medias. **¿Conoce estas desigualdades y la relación que existe entre ellas?**

3.- Es costumbre comenzar el estudio de problemas de optimización junto con el estudio de las derivadas. Sin embargo es posible tratar problemas interesantes de máximos y mínimos con métodos más elementales. **¿Conoce usted una de las técnicas para determinar máximos y mínimos mediante el uso de las desigualdades?** Si su respuesta es afirmativa argumente.

4.- **¿Conoce usted lo que se denomina "desigualdad fundamental"?** En caso de que su respuesta sea afirmativa complete las siguientes desigualdades que son consecuencias de esta desigualdad.

a) $a^2 + b^2 \geq$ donde $a, b \in R$

b) $(a + b)^2 \geq$

c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq$ donde $a, b, c \in R$

d) $a^3 + b^3 + c^3 \geq$ donde $a, b, c \in R^+$

Muchas Gracias.

ANEXO 3

CARTAS DOCENTES

CARTA 1

Estimado estudiante:

Además de sus numerosos usos prácticos, el trabajo con las desigualdades entre las medias y otras desigualdades básicas contribuyen notablemente al desarrollo del pensamiento matemático y la creatividad, de ahí su importancia para concursar en Matemática e ingresar en la Educación Superior en Carreras de Ciencias relacionadas con esta rama del saber.

Este contenido será presentado en cuatro cartas, que deben ser suficientes para el aprendizaje de este tema:

Carta 1: Introducción de las desigualdades, haciendo hincapié en las técnicas para la demostración.

Carta 2: Desigualdades específicas como las desigualdades entre las medias, Cauchy Schwarz, Chebyshev, Desigualdad de Reordenamiento entre otras con ejemplos representativos de cómo abordar estas demostraciones.

Carta 3: Aplicaciones de las desigualdades a otros tipos de ejercicios.

Carta 4: Ejercicios variados de olimpiadas, más integradores y que necesitan ya un determinado nivel de destreza y creatividad para la solución de los mismos.

En todos los casos, se presentan algunos elementos teóricos indispensables, acompañados de un grupo de ejemplos resueltos y algunos propuestos.

Se sugiere que trates de resolver cada problema independientemente y solo mires las respuestas cuando no se te ocurra la idea de solución.

En todos los casos trata de encontrar regularidades que te puedan ser útiles en situaciones semejantes.

CONTINUACIÓN ANEXO 3

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS	INTRODUCCIÓN
DEFINICIÓN	REGLAS PARA LAS DESIGUALDADES
TÉCNICAS PARA LA DEMOSTRACIÓN	

Introducción:

Las desigualdades juegan un rol fundamental en Matemática, permiten establecer que unas expresiones sean mayores o menores que otras. Los matemáticos suelen usar las desigualdades para aproximarse a cantidades cuyas fórmulas exactas no pueden ser fácilmente computadas. Algunas se usan tan a menudo que se les ha puesto nombre como la Desigualdad de Azuma, Desigualdad de Bernoulli, Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Desigualdad de Chebyshev, Desigualdad de Jensen, Desigualdad de Márkov, Desigualdad de Wikitopus y otras desigualdades como las desigualdades entre las medias y la desigualdad triangular.

Es costumbre comenzar el estudio de problemas de optimización junto con el estudio de las derivadas. Sin embargo es posible tratar problemas interesantes de máximos y mínimos con métodos más elementales.

Una de las técnicas para determinar máximos y mínimos es el uso de las desigualdades entre las medias. Dos de las más elementales son la media aritmética y la media geométrica.

En las competencias internacionales de problemas aparecen con mucha frecuencia las desigualdades entre ellas las que tienen que ver con las desigualdades de las medias.

Según Carl B. Boyer, las tres medias: aritmética, geométrica y subcontraria (mas tarde llamada armónica), ya eran conocidos por los babilonios. Pitágoras de Samos, matemático griego que vivió alrededor del año 550 A.N.E., sabía de las tres medias en Mesopotamia. Los pitagóricos poseían una manera alternativa de definir las tres medias utilizando la noción de proporción. Papus de Alejandría, geómetra griego que vivió alrededor del año 300 A. N. E., describió en su libro III de la Colección una interesante construcción de las medias: aritmética, geométrica y armónica, representando las 3 medias en un único semicírculo.

CONTINUACIÓN ANEXO 3

Desigualdades

Definición: La proposición de que una expresión algebraica es mayor que o menor que otra se llama desigualdad.

En Matemática existen dos tipos de desigualdades:

1.- La desigualdad condicional o inecuación

2.- La desigualdad absoluta.

Definición 1: Una desigualdad se llama desigualdad condicional o inecuación si no es verdadera para todos los valores permisibles de las variables que en ella aparece.

Definición 2: Una desigualdad se llama desigualdad absoluta si es verdadera para todos los valores permisibles de las variables que en ella aparecen.

Ejemplos:

Desigualdad Condicional o Inecuación

$3X - 9 > 0$

Desigualdades Absolutas

$-3 < 2$

$a^2 + b^2 + 1 > 0$

Reglas para las desigualdades

Resolver una desigualdad cómo $3(x + 2) < 6$, significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Esto implica la aplicación de ciertas reglas que ahora establecemos.

1. Si un mismo número es sumado o restado en ambos lados de la desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica: si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

   Por ejemplo: $7 < 10$, y $7 + 3 < 10 + 3$
2. Si ambos lados de una desigualdad son multiplicados o divididos por el mismo número positivo, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica: si $a < b$ y $c > 0$, de modo que $ac < bc$ y $a/c < b/c$.

   Por ejemplo: $3 < 7$ y $2 > 0$, de modo que $3(2) < 7(2)$ y $3/2 < 7/2$

CONTINUACIÓN ANEXO 3

3. Si ambos lados de la desigualdad son multiplicados o divididos por el mismo número negativo, entonces la desigualdad tendrá el sentido contrario de la original. En forma simbólica
   si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$ y $a/-c > b/-c$
   Por ejemplo: $4 < 7$, pero $4(-2) > 7(-2)$ y $4/-7 > 7/-2$
4. Cualquier lado de la desigualdad puede ser reemplazado por una expresión equivalente. En forma simbólica: si $a < b$ y $a = c$, entonces $c < b$
   Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.
5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido contrario de la original. Por ejemplo, $2 < 4$, pero $½ > ¼$, el recíproco de un número a con a o está definido como 1/a.
6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevados cada uno a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. Por tanto $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$

Técnicas para la demostración

Demostrar una desigualdad matemática significa probar que una expresión algebraica es menor o mayor que otra para cualquier valor de las variables que aparecen en la expresión o de acuerdo con determinadas condiciones que se establezcan para los valores que toman las variables.

Existen varios métodos o técnicas para la demostración de desigualdades entre las que se encuentran:

1.- Demostración de desigualdades con ayuda de la definición.

Por definición se supone que $a>b$ si $a-b$ es un número positivo. A su vez se supone que $a<b$ si $a-b$ es un número negativo. Para demostrar una desigualdad empleando la definición habría que hallar la diferencia y demostrar cual es el signo de la desigualdad.

CONTINUACIÖN ANEXO 3

Ejemplo: Demostrar que si ab>0, para cualquier valor de las variables a y b se cumple que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Demostración: Comienza con la diferencia: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$. En el miembro izquierdo de la desigualdad se halla mínimo común múltiplo, quedando $\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$

Ahora se procede a demostrar cual es el signo de la desigualdad.

Como se conoce que para todo número real se tiene que su cuadrado es positivo, el numerador de esa expresión será no negativo y a su vez el denominador será positivo ya que ab>0., por lo tanto:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$ cumpliéndose la igualdad cuando a = b.

2.- Demostración de desigualdades considerando que se cumple la desigualdad y tratamos de realizar transformaciones hasta obtener una desigualdad conocida.

En la demostración de desigualdades suelen utilizarse desigualdades conocidas, tales como la desigualdad fundamental ($a^2 \geq 0$,) que trae como consecuencias otras desigualdades como:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ donde a, b Є R

b) $(a + b)^2 \geq 4ab$

c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ donde a, b, c Є R

d) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ donde a, b, c Є R^+

y otras tantas que podemos utilizar como referencia para transformar la desigualdad en una desigualdad conocida.

Ejemplo:

Demostrar que si a es un número real se cumple que: $4a - a^4 \leq 3$

Se trata de realizar transformaciones hasta obtener una desigualdad conocida.

CONTINUACION ANEXO 3

Para ello se pasa todo hacia el miembro izquierdo para tratar de factorizarlo como un cuadrado, o como una suma de cuadrados para aplicar la desigualdad fundamental ($a^2 \geq 0$), ordenándolo en forma descendente

$$-a^4 + 4a - 3 \leq 0$$

$a^4 - 4a + 3 \geq 0$, pero $a^4 - 4a + 3 = (a^2 - 1)^2 + 2(a-1)^2 \geq 0$

Cumpliéndose que es mayor o igual que cero al aplicar la desigualdad fundamental.

Ejemplo:

Demostrar que si $a \geq 0$, $b \geq 0$, entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(Desigualdad de Cauchy)

Demostración:

Se plantea la diferencia: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ y calculamos su signo

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ la cual es una expresión que con todos los valores no negativos de a y b no es negativa. Ella se anula si y sólo si a = b; así pues la diferencia planteada no es negativa y esto significa que la desigualdad indicada es verdadera.

En general si $a_i \geq 0$ para todo i = 1,2,…, n se cumple que:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

El empleo de esta desigualdad conocida por la relación entre la media aritmética y la media geométrica tiene gran utilidad en la demostración de otras desigualdades.

3.- Método de demostración de desigualdades a la inversa.

Para la utilización de este método de demostración de desigualdades consideramos que no se cumple la desigualdad para ciertos valores de la variable y si la suposición no es cierta, la desigualdad es válida.

CONTINUACION ANEXO 3

Ejemplo: Demuestre que si a≥0, b≥0, c≥0, d≥0, entonces $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$

Demostración: Se supone que la desigualdad no es cierta para ciertos valores de a, b, c, d. O sea para estos valores se cumple la desigualdad $\sqrt{(a+b)(c+d)} \leq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$

Los dos miembros de esta desigualdad son no negativos, por lo tanto al elevarlos al cuadrado nos quedaría: $(a+b)(c+d) < ac + 2\sqrt{abcd} + bd$

$ac + ad + bc + bd < ac + 2\sqrt{abcd} + bd$, por lo tanto $ad + bc < 2\sqrt{abcd}$ y

$\frac{ad+bc}{2} < \sqrt{abcd}$ y esta desigualdad contradice la desigualdad entre las medias, por lo que nuestra suposición no es cierta y por tanto la desigualdad $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ es válida.

4.- Método sintético de demostración de desigualdades.

Este método consiste en la transformación de una o varias desigualdades conocidas hasta obtener la desigualdad que queremos demostrar

Ejemplo: Demuestre que si a>o, b>0, c>0, entonces

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Demostración: Se toma como referencia las siguientes desigualdades:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2; \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2; \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2;$$

Si se suma estas tres desigualdades se obtiene:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 6$$

Realizando agrupaciones en el miembro izquierdo se tiene que:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$$

CONTINUACION ANEXO 3

Y efectuando una serie de transformaciones sencillas

$$\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)\geq 9$$

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9$$

Y sacando factor común $a+b+c$, se obtiene:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

5.- Método de inducción matemática para la demostración de desigualdades.

Un método para demostrar resultados generales que dependen en algún sentido de los números naturales es conocido con el nombre de Inducción Matemática.

Esta dependencia de los números naturales significa: se sabe que una determinada afirmación es verdadera para algunos casos particulares y surge la pregunta. ¿Sigue siendo verdadera dicha afirmación para los infinitos números naturales restantes?

Ejemplo: Demostrar que si n ε N, n ≥ 3,

$2^n > 2n + 1$

Demostración:

Para n = 3 se cumple la desigualdad ya que $2^3 > 2.3 + 1$

Para n = k (k > 3) $2^k > 2k + 1$. Suponiendo que se cumple que $2^k > 2k + 1$ y se demostrará que la desigualdad se cumple para n = k+1.

Para n = k+1 $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$

Se demuestra que $2^{k+1} > 2k + 3$, Como $2^k > 2k + 1$, se cumple que: $2.2^k > 2(2k+1) = 4k+2 = (2k+3)+(2k-1)$

$2.2^k > (2k+3)+(2k-1)$, pero $(2k-1) > 0$ para cualquier valor natural de k, por tanto se cumple que $2^{k+1} > 2k + 3$.

Llegando a la conclusión mediante el principio de inducción matemática que se cumple la desigualdad de que si n ε N, n ≥ 3, $2^n > 2n + 1$

CONTINUACION ANEXO 3

CARTA 2

Estimado estudiante:

Se espera que hayas tenido éxito en tu desempeño con las actividades de la primera carta. En esta carta se te mostrará un grupo de desigualdades que por su generalidad te pueden ayudar a enfrentar problemas aparentemente muy difíciles, basta que seas capaz de recordarlas y reconocer cómo relacionar su estructura con el ejercicio en cuestión. Los estudiantes que desarrollan la habilidad en la aplicación de estas desigualdades, generalmente logran soluciones originales a gran variedad de problemas.

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS	Desigualdad fundamental
Desigualdad entre las medias	Desigualdad de Cauchy-Schwarz
Desigualdad de Chebyshev	Desigualdad de Reordenamiento
Sugerencias para acometer los problemas de desigualdades	Ejercicios

Desarrollo:

Comienza presentando la conocida desigualdad fundamental.

Desigualdad fundamental

La desigualdad fundamental satisfecha por cualquier número real, y de la cual se derivan todas las demás es: $x^2 \geq 0$, con igualdad sólo si $x = 0$. De forma más general $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 +\ldots + x_n^2 + \geq 0$, con igualdad sólo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Esta desigualdad fundamental trae como consecuencias las siguientes desigualdades:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ donde $a, b \in R$

b) $(a + b)^2 \geq 4ab$

c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ donde $a, b, c \in R$

d) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ donde $a, b, c \in R^+$

CONTINUACION ANEXO 3

Desigualdad entre las medias

El número $C_{\propto} = \left[\frac{x_1^{\propto} + x_2^{\propto} + x_3^{\propto} + \ldots x_n^{\propto}}{n}\right]^{\frac{1}{\propto}}$ se denomina media potencial de grado α de los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

Si α = 1 media aritmética $M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n}$

Si α = 2 media cuadrática $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}$

conocida también como la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados.

Si α = -1 media armónica $H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$

Y la media geométrica $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$

Utilicemos un ejemplo sencillo para establecer las desigualdades entre la media aritmética y la media geométrica.

Sean x_1 y x_2 números reales no negativos:

$\left[\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right]^2 \geq 0$ $\quad x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$

$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq x_1 x_2$, por lo tanto la media aritmética es mayor o igual que la media geométrica.

Generalizando $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tiene como consecuencia las siguientes afirmaciones:

- Si la suma de n números positivos es constante, entonces el producto será máximo cuando todos los números son iguales.
- Si el producto de n números positivos es constante, entonces la suma será mínima cuando todos los números son iguales.

De esta desigualdad se derivan también las siguientes consecuencias que pueden generalizarse y que son de gran utilidad en la resolución de problemas con desigualdades.

CONTINUACION ANEXO 3

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$, y en general $x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$ para todo $x > 0$ y $a > 0$

a) $x + \frac{5}{x} \geq 2\sqrt{5}$

b) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ para todo $xy > 0$

c) $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$, para todo $x \in R$

d) $x + \frac{5}{x + 1} \geq 2\sqrt{5} - 1$

También pueden demostrarse las desigualdades entre otras medias importantes como la armónica y la media cuadrática.

La media potencial de grado negativo es menor o igual que la media geométrica y la media potencial de grado positivo es mayor o igual. Por lo tanto:

R≥M≥G≥H

La media cuadrática es mayor o igual que la media aritmética, mayor o igual que la media geométrica y mayor o igual que la media armónica.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Partiendo de la identidad de Lagrange para tres variables.

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - ay)^2 + (cx - az)^2$$

Es evidente que $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ y la igualdad solo se cumple si $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

CONTINUACION ANEXO 3

Generalizando: dados los conjuntos de números reales

$\{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n\}$, entonces

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} b_i\right]^2$$

y la igualdad solo se cumple si $\frac{a_i}{b_i} = r$ para todo i.

Aplicaciones de las desigualdades utilizando Cauchy-Schwarz.

Esta desigualdad fue publicada por Bunyakovskii (1804-1889) en una monografía sobre integrales en 1859, veinticinco años antes que Schwarz (1843-1921), sin embargo es más conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz donde se cumple para cualquier número real.

Las desigualdades tienen múltiples aplicaciones y entre sus usos prácticos se encuentra el detector de filtro acoplado.

A continuación se relacionan algunos ejercicios donde se aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

a) Sean a, b, c, d, e números reales tales que:

$a + b + c + d + e = 8$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$. Hallar el máximo valor de e.

Solución:

Si se analiza detenidamente se observa la posibilidad de aplicar la desigualdad de Cauchy Schwarz.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + c + d)^2$$
$$4(16 - e^2) \geq (8 - e)^2$$

CONTINUACION ANEXO 3

Resolviendo la inecuación $0 \leq e \leq \frac{16}{5}$.

El valor máximo es $\frac{16}{5}$, que ocurre si $a = b = c = d = \frac{6}{5}$

b) Demostrar que un triángulo de lados a_1, b_1, c_1 es semejante a un triángulo de lados a_2, b_2, c_2 si y solo si $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2 + c_2)}$ **)**

<u>**Demostración**</u>:

Aplicando la desigualdad de Cauchy - Schwarz con las raíces cuadradas de los lados, se obtiene que $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2 + c_2)}$

Cumpliéndose si existe proporcionalidad es decir: si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, condición que es necesaria para que dos triángulos sean semejantes.

Desigualdad de Chebyshev

A Chebyshev se le reconoce como el creador de la escuela matemática de San Petersburgo cuyo eco e influencia ha llegado hasta nuestro tiempo en muchas ramas de la matemática. Esta escuela se distinguía por la tendencia a relacionar los problemas teóricos de la Matemática con los problemas de la técnica y de la naturaleza. Según el propio Chebyshev “la unión de la teoría y la práctica proporciona los resultados más provechosos. Con ello, no sólo gana la práctica, sino que también salen beneficiadas las ciencias. También escribió: “La mayor parte de los problemas prácticos se reducen a problemas de máximo y mínimo que son nuevos para la ciencia y sólo su resolución puede satisfacer a la práctica, que siempre busca lo mejor y más ventajoso”.

CONTINUACION ANEXO 3

Chebyshev se dedicó desde su juventud a la teoría de probabilidades siendo el objeto de su primera tesis. Escribió en total cuatro trabajos sobre teoría de probabilidades, en los años 1845, 1846, 1867 y 1887. Su contribución más conocida a la teoría de la probabilidad es la llamada desigualdad de Chebyshev:

Consideremos los 2n reales tales que:

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, entonces se cumple que:

$$\left[\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\right]\left[\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}{n}\right] \leq \left[\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n}{n}\right]$$

Si las dos sucesiones se ordenan inversamente cambia el signo de la desigualdad.

Aplicaciones de las desigualdades utilizando Chebyschev.

(Olimpiada Matemática Canadiense, 1995)

a) Sean a, b, c reales positivos. Pruebe que:

$$a^a b^b c^c \geq [abc]^{\frac{a+b+c}{3}}$$

<u>Solución:</u>

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $0 \leq a \leq b \leq c$, luego $\log a \leq \log b \leq \log c$ y aplicando la Desigualdad de Chebyschev se tiene que:

$$\left[\frac{a+b+c}{3}\right]\left[\frac{\log a+\log b+\log c}{3}\right] \leq \left[\frac{a\log a+b\log b+c\log c}{3}\right]$$

Multiplicando por 3 y aplicando propiedades de los logaritmos

$$\left[\frac{a+b+c}{3}\right]\log abc \leq \log a^a + \log b^b + \log c^c$$

CONTINUACION ANEXO 3

Y aplicando nuevamente propiedades de los logaritmos

$$\log [abc]^{\frac{a+b+c}{3}} \leq \log a^a b^b c^c$$

$$a^a b^b c^c \geq [abc]^{\frac{a+b+c}{3}}$$

Desigualdad de Reordenamiento

Dadas dos sucesiones de n reales, siendo cada una $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots b_n$.

Si llamamos $a_1', a_2', a_3' \ldots, a_n'$ a una permutación cualquiera de $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, entonces se tiene que:

$a_1b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n \geq a_1' b_1 + a_2' b_2 +, a_3' b_3 + \ldots, a_n' b_n$.

$a_1b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n \geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + a_{n-3} b_3 + \ldots + a_1b_n$.

Aplicaciones de la desigualdad de reordenamiento

Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ enteros positivos distintos. Demuestre que:

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{b^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Sugerencias para acometer los problemas de desigualdades.

No existe una técnica general que asegure el éxito en los problemas por lo cual se sugiere la ejercitación de las diferentes desigualdades clásicas con ejemplos en los que se ponga de manifiesto los diferentes “trucos”. Es muy importante determinar el ámbito de validez de cada una de ellas.

Se sugieren algunas recomendaciones para demostrar desigualdades que a continuación se relacionan:

a) Intente transformar la desigualdad para llevarla a la forma $\sum p_i$, con $p_i \geq 0$, por ejemplo $p_i = x_i^2$

CONTINUACION ANEXO 3

b) Recuerde la expresión de las distintas medias y sus relaciones. Analice si mediante transformaciones puede aplicarlas.

c) Analice si puede aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

d) ¿Puede aplicar la desigualdad de reordenación?

e) ¿Es simétrica? En tal caso supóngase $a \leq b \leq \ldots$

f) Puede resultar útil expresar la desigualdad mediante las funciones simétricas elementales..

g) Si se tratara de una desigualdad sobre los lados de un triángulo intente usar la desigualdad triangular. Puede poner $a = x_1 + x_2$, $b = x_2 + x_3$, $c = x_3 + x_1$, donde los números x_1, x_2, x_3 son números reales positivos.

h) Trate de llevar la desigualdad a la forma $f(a,b,\ldots) \geq 0$. Si f es una función cuadrática en una de las variables, puede ser útil considerar su discriminante.

i) Intente realizar estimaciones formando sumas o productos telescópicos:

$a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 + \ldots + a_n - a_{n+1} = a_n - a_1$

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_1}$$

j) Si una suma de cantidades positivas es constante, su producto es máximo cuando todas son iguales.

k) Si un producto de cantidades positivas es constante, su suma es mínima cuando todos son iguales.

Ejercicios resueltos

1. (I OIM, 1985) Hallar las raíces r_1, r_2, r_3, r_4 de la ecuación $4x^4 - ax^3 + bx^2 - c + 5 = 0$ sabiendo que son reales, positivas y que

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$$

Solución. En primer lugar, $r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{5}{4}$.

CONTINUACION ANEXO 3

Entonces aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a los números $\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{4}, \frac{r_3}{5}, \frac{r_4}{8}$ se obtiene que:

$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{r_1}{2} \cdot \frac{r_2}{4} \cdot \frac{r_3}{5} \cdot \frac{r_4}{8}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{1}{4}$$

Esto dice que la media aritmética y la media geométrica coinciden y por tanto los números son iguales: $\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4}$, siendo $r_1 = \frac{1}{2}$ $r_2 = 1$

$r_3 = \frac{5}{4}$ $r_4 = 2$

2. Si a, b, c son números positivos tales que: 1 = ab + bc + ca + 2abc. Demostrar que 2(a + b + c) + 1 $\geq$ 32abc. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

<u>Solución:</u> En lo que hay que demostrar se observa desigualdades entre la media aritmética y la media geométrica. Y de la igualdad obtengo: 1 – 2abc = ab + bc + ca

Como a, b, c son números positivos, ab, bc y ca serán también positivos. Se calcula la media geométrica de los números positivos ab, bc y ca, se obtiene:

$\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = G^2$ y donde se ha llamado G a la media geométrica entre los números positivos a, b y c.

Aplicando la desigualdad entre las medias se obtiene:

$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq G^2$ y de donde $1 - 2G^3 \geq 3G^2$

$2G^3 + 3G^2 - 1 \leq 0$ $(G+1)^2(G - \frac{1}{2}) \leq 0$ $G \leq \frac{1}{2}$

Se conoce que:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Y de las desigualdades básicas $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ y sustituyendo

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

CONTINUACION ANEXO 3

$(a+b+c)^2 \geq 3(1-2G^3)$

$(a+b+c)^2 \geq \frac{9}{4}$

$a+b+c \geq \frac{3}{2}$

$2(a+b+c) \geq 3$ y se tiene que probar que $2(a+b+c)+1 \geq 32\,abc$

$2(a+b+c)+1 \geq 4$ y como $G \leq \frac{1}{2}$

$2(a+b+c)+1 \geq 32abc$

La igualdad se verifica cuando $a=b=c=G=\frac{1}{2}$

3.- Demostrar que si $a+b+c \geq 3$, entonces $a^2+b^2+c^2 \geq 3$

Solución. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$9 \leq (a+b+c)^2 \leq (1+1+1)(a^2+b^2+c^2)$,

de donde $a^2+b^2+c^2 \geq 3$

4.- (Desigualdad de las Medias. Hugo Laurente Artola)

Pruebe que $\frac{a^3}{3}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^6}{6} \geq abc$

Solución: Se trabaja con el miembro izquierdo se busca un común denominador, quedándonos $\frac{2a^3+3b^2+c^6}{6}$ Se aplica la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica a los números $a^3, a^3, b^2, b^2, b^2, c^6$ y se obtiene::

$$\frac{a^3+a^3+b^2+b^2+b^2+c^6}{6} \geq \sqrt[6]{a^3a^3b^2b^2b^2c^6}$$

$$\frac{2a^3+3b^2+c^6}{6} \geq \sqrt[6]{a^6b^6c^6}$$

$$\frac{a^3}{3}+\frac{b^2}{2}+c^6 \geq abc$$

CONTINUACION ANEXO 3

CARTA 3

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS	Aplicaciones de las desigualdades a otros tipos de ejercicios

Estimado estudiante.

Si has llegado hasta aquí, es porque has adquirido experiencia en el trabajo con las desigualdades. Esta carta está dirigida a mostrarte algunas de las principales aplicaciones de las desigualdades.

Es costumbre comenzar el estudio de problemas de optimización junto con el estudio de las derivadas. Sin embargo, es posible tratar problemas interesantes de máximos y mínimos con métodos más elementales.

Una de las técnicas para determinar máximos y mínimos es el uso de las desigualdades entre las medias. Dos de los más elementales son la media aritmética y la media geométrica.

<u>**Problema 1**</u>:

Juan quiere cercar un terreno de forma rectangular, y para eso dispone de una cerca de 40 m. ¿Cuál es el mayor valor del área que Juan quiere cercar?

<u>**Solución:**</u>

Sean a y b los lados del rectángulo. Como el perímetro de la cerca es 40, se debe tener $2a + 2b = 40$, por lo tanto $a + b = 20$.

Se aplica la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica y se obtiene la siguiente desigualdad:

$10 = \frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$ de donde $ab \leq 100$.

Luego el área máxima a ser cercada es de 100 metros cuadrados y ocurre cuando $a = b = 10$m.

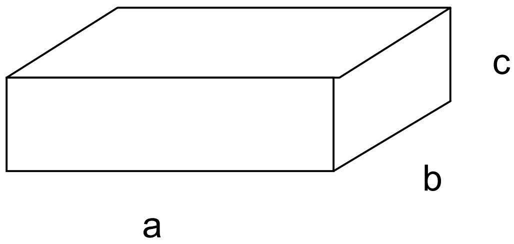
CONTINUACION ANEXO 3

Problema 2:

Prueba que entre todas las cajas rectangulares (paralepípedos) que tienen un área superficial fija, el cubo es el que tiene mayor volumen.

Solución:

Considere la siguiente caja rectangular



Luego V = abc y el área de la superficie A = 2ab+2bc+2ca.

Se utiliza la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para los números positivos ab, bc y ca y se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq [(ab)(bc)(ca)]^{\frac{1}{3}} = (abc)^{\frac{2}{3}} = V^{\frac{2}{3}}$$

Y la igualdad se alcanza cuando ab = bc = ca, es decir cuando a = b = c.

Y como $ab+bc+ca = \frac{A}{2}$, se tendrá que $\frac{A}{6} \geq V^{\frac{2}{3}}$, equivalente a:

$V \leq \left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$ Se concluye que el máximo volumen de la caja rectangular con área superficial A será $V = \left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$, y este valor se alcanza cuando $a = b = c = \left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto el volumen es máximo cuando la caja sea un cubo.

CONTINUACION ANEXO 3

Problema 3:

Halle el mínimo valor de f si $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ **, x > 0**

Solución:

Si se aplica la propiedad entre la media aritmética y la media geométrica a los números $x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x}$

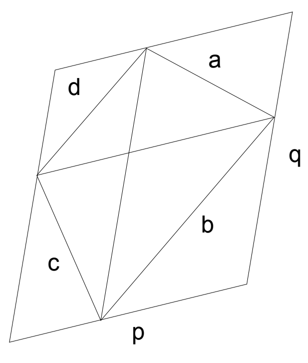
$$x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}$$

$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$ Por tanto el mínimo de f es 3 y ocurre cuando x = 1

Problema 4: (Olimpiada española 1997)

Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2\left(2+\sqrt{2}\right)$**.**

Primera solución:



Sea el cuadrilátero de lados a, b, c, d y diagonales p y q.

Trazando la paralelas por cada vértice a la diagonal que no pasa por él se forma un paralelogramo de área 2 y lado p y q.

Por el teorema isoperimétrico, de todos los paralelogramos de área 2, el cuadrado tiene perímetro mínimo que vale $4\sqrt{2}$, luego

$$2\left(p+q\right) \geq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow p+q \geq 2\sqrt{2} \quad (1)$$

En cuanto al los lados por el mismo teorema para un cuadrado de área 1 el perímetro es 4 luego:

a + b + c + d $\geq$ 4   (2)

Sumando(1) y (2) se obtiene el resultado.

CONTINUACION ANEXO 3

<u>Segunda solución</u>: (Sin usar la propiedad isoperimétrica).

Consiste en establecer directamente las desigualdades (1) y (2).

Si α es el ángulo que forman las diagonales, se tiene:

$$1 = \frac{pq}{2}\operatorname{sen}\alpha \le \frac{pq}{2} \Leftrightarrow pq \ge 2$$

Pero $(p + q)^2 = (p - q)^2 + 4pq \ge 4pq \ge 8$. de donde $p + q \ge \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (1).

Para los lados, si se descompone el cuadrilátero en dos triángulos mediante la diagonal q, se tiene:

$$1 \le \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$$

Descomponiendo ahora en dos triángulos mediante la diagonal p resulta:

$$1 \le \frac{bc}{2} + \frac{da}{2}$$

y de ambas desigualdades se obtiene: $ab + bc + cd + da \ge 4$.

Pero:$(a + b + c + d)^2 = ((a + c) - (b + d))^2 + 4 (a + c)(b + d) \ge 4 (a + c)(b + d) \ge 16$, de donde

$a + b + c + d \ge 4$ (2)

Basta sumar (1) y (2) para obtener lo pedido.

<u>Problema 5</u>: (Olimpiada española 1998)

El baricentro del triángulo ΔABC es G. Denotamos por g_a, g_b, g_c las distancias desde G a los lados a, b y c respectivamente.

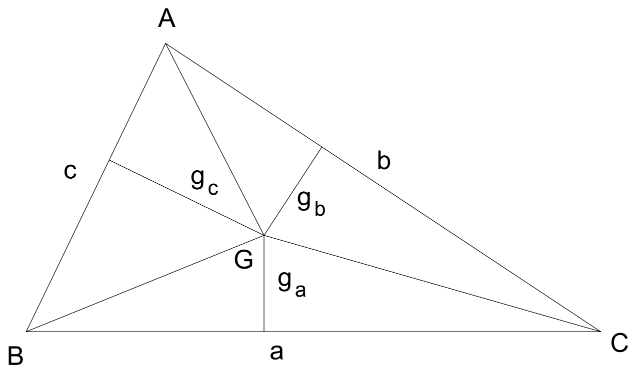
Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que:

i) $g_a \ge \frac{2r}{3}$, $g_b \ge \frac{2r}{3}$, $g_c \ge \frac{2r}{3}$

i) $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \ge 3$

CONTINUACION ANEXO 3

<u>Solución 1</u>



i) Es sabido que uniendo G con cada vértice, se forman tres triángulos BGC de base a y altura g_a, AGC de base b y altura g_b y AGB de base c y altura g_c de la misma área.

Por tanto, llamando S al área de ABC:

$$a \cdot g_a = b \cdot g_b = c \cdot g_c = \frac{2S}{3} \quad (1)$$

Por otra parte se sabe que $r \cdot (a + b + c) = 2S$ (basta unir el incentro con los tres vértices y quedan tres triángulos de bases a, b, c y altura común r).

Sustituyendo 2S en (1), y despejando queda:

$$g_a = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{a}; \quad g_b = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{b}; \quad g_c = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{c} \quad (2)$$

y por la desigualdad triangular ($b + c \geq a$) , resulta : $\frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a} \geq 2$, de donde $g_a \geq \frac{2r}{3}$

y de modo análogo para g_b y g_c .

b) De (2) , haciendo los inversos y sumando resulta:

$$\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c} = \frac{3a}{r(a+b+c)} + \frac{3b}{r(a+b+c)} + \frac{3c}{r(a+b+c)} = \frac{3}{r}$$

finalmente, aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica:

$$\frac{g_a + g_b + g_c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c}} = \frac{3}{\frac{3}{r}} = r \Leftrightarrow \frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$$

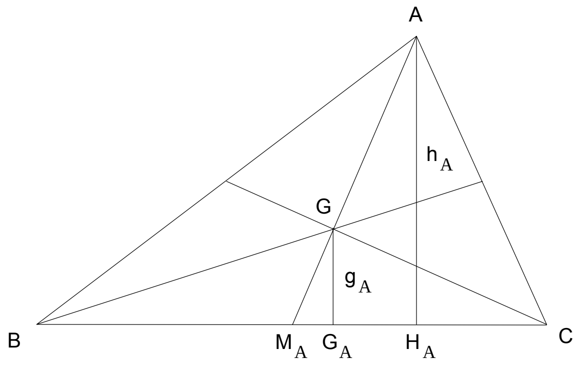
Nota.- Sumando las tres desigualdades de a) sólo obtenemos $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 2$

CONTINUACION ANEXO 3

Solución 2: (de Ramón José que mereció mención especial)

i) Considere los puntos M_A, H_A, G_A como indica la figura.

Se denomina h_A a la altura correspondiente a A, p el semiperímetro y S el área de ABC.



Los triángulos AM_AH_A y GM_AG_A son semejantes siendo la razón de semejanza 3 (propiedad del baricentro sobre cada mediana).

Entonces

$h_A = 3\, g_A$ (1)

Por la desigualdad triangular:

$$b + c \geq a \Leftrightarrow 2p \geq 2a \Leftrightarrow p \geq a \Leftrightarrow \frac{a}{p} \leq 1$$

multiplicando por h_A y teniendo en cuenta (1) queda:

$$g_A \geq \frac{ah_A}{3p} \Leftrightarrow g_A \geq \frac{2S}{3p}$$

finalmente, como $S = pr$ resulta $g_A \geq \frac{2}{3} r$.

Análogamente se obtendría las correspondientes desigualdades para g_B y g_C .

i) Usando la desigualdad $x + \frac{1}{x} \geq 2$ que se deduce de la obvia $(x-1)^2 \geq 0$. (Considere siempre *x* positivo).

Se tiene entonces:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 6$$

Sumando 3, ordenando y operando resulta:

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \geq 9 \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

sacando factor común, dividiendo por 3 y poniendo $2p = a + b + c$, queda:

CONTINUACION ANEXO 3

$$\frac{2p}{3a}+\frac{2p}{3b}+\frac{2p}{3c}\geq 3 \quad (2)$$

Por otra parte, como $3g_a = h_A; \quad 3g_b = h_B; \quad 3g_c = h_C$, resulta $2S = 3g_a a = 3g_b b = 3g_c c$

Despejando *3a, 3b y 3c* y sustituyendo en (2), queda:

$$(g_a + g_b + g_c)\frac{p}{S}\geq 3$$

Finalmente usando de nuevo *S* = *pr*, resulta $\dfrac{g_a + g_b + g_c}{r}\geq 3$

<u>Problema 6</u>: (Olimpiada española, 2001)

Están dados 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.

Demuestre que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

<u>Solución:</u>

Suponiendo que $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$. Si ningún triángulo es acutángulo, se tendría que:

$a_1^2 + a_2^2 \leq a_3^2 \quad (1)$

$a_2^2 + a_3^2 \leq a_4^2 \quad (2)$

$a_3^2 + a_4^2 \leq a_5^2 \quad (3)$

Pero (desigualdad triangular):

$a_5<a_1 + a_2$, luego $a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \quad (4)$

Sumando las desigualdades (1),(2),(3) y (4) se tiene:

$$a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 < a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

es decir,

$$a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$$

Como $a_2 \leq a_3$, resulta $2a_2^2 \leq a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$, y por tanto $a_2 < a_1$, en contradicción con la ordenación inicial.

CONTINUACION ANEXO 3

Problema 7:

Sean r, s, u, v números reales cualesquiera. Probar que:

$$\textbf{mín}\left\{ r-s^2, s-u^2, u-v^2, v-r^2 \right\} \leq \frac{1}{4}.$$

Solución:

Suponiendo que los cuatro números $r-s^2, s-u^2, u-v^2$ y $v-r^2$ son mayores estrictamente que $\frac{1}{4}$. Entonces $r-s^2+s-u^2+u-v^2+v-r^2 > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, pero esta expresión es equivalente a $0 > \left(\frac{1}{2}-r\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-s\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-u\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-v\right)^2$ que es una contradicción.

Problema 8:

Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en E. Denotamos por S_1, S_2 y S a las áreas de los triángulos ABE, CDE y del cuadrilátero $ABCD$ respectivamente.

Prueba que $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución:

Denotando, como en el enunciado, la áreas de los triángulos BCE y DAE por S_3 y S_4 respectivamente, tiene que probar que $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2} \leq \sqrt{S_1+S_2+S_3+S_4}$.

Elevando al cuadrado la anterior desigualdad, se obtiene la desigualdad equivalente $2\sqrt{S_1 S_2} \leq S_3 + S_4$ (1).

Sean ahora K y L los pies de las perpendiculares en la diagonal AC trazadas desde D y B respectivamente. Estos puntos K y L pueden estar dentro o fuera del segmento AC. Llamamos $b = BL, d = DK, m = AE, n = CE$. Entonces

CONTINUACION ANEXO 3

$S_1 = \frac{1}{2}mb,\ S_2 = \frac{1}{2}nd,\ S_3 = \frac{1}{2}nb,\ S_1 = \frac{1}{2}md.$

Sustituyendo esta expresión en la desigualdad (1) se llega a $\sqrt{mb \cdot nd} \le \frac{1}{2}(nb + md),$ que es precisamente la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica de los dos productos nb y md.

Esta última desigualdad se alcanza si y sólo si $nb = md \Leftrightarrow \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$ (2).

Las rectas BL y DK son paralelas. Así $\frac{b}{d} = \frac{BL}{DK} = \frac{BE}{DE},$ por la semejanza entre los triángulos BLE y DKE. La relación (2) se convierte en $\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$ (3). Y recíprocamente por la semejanza de triángulos (3) se verifica si y sólo si AB y CD son paralelos, es decir el cuadrilátero dado es un trapecio con los lados paralelos AB y CD. Esta es la condición para que se alcance (1).

<u>Problema 9</u>:

Sea P(x) = x^3 – ax^2 + bx – 1 un polinomio que tiene tres raíces reales (no necesariamente diferentes) y sea S = a + b. Halla el valor mínimo de S.

<u>Solución:</u>

Sean r, s y t las raíces del polinomio P(x); entonces P(x) = (x – r)(x – s)(x – t), y rst = 1.

Utilizando la desigualdad de Cauchy se tiene que 1 + $\alpha \geq 2\sqrt{\alpha}$ para cualquier α positivo.

Entonces en particular (1 + r)(1 + s)(1 + t) ≥ $2\sqrt{r}\,2\sqrt{s}\,2\sqrt{t} = 8\sqrt{rst}$ = 8, de esta forma P(-1) = (-1 - r)(-1 – s)(-1 – t) = -(1 + r)(1 + s)(1 + t) $\leq$ -8. Por otra parte

P(-1) = $(-1)^3$ - $a(-1)^2$ + b(–1) – 1 = -(a + b) – 2, de aquí que – (a + b) – 2 $\leq$ -8 por lo que a + b $\geq$ 6 que se cumple si P(x) = x^3 - $3ax^2$ + 3x –1, entonces la suma de a + b = 6.

CONTINUACION ANEXO 3

Problema 10:

Sean x, y, z números reales positivos.

(I).Si x + y + z $\geq$ 3, ¿es necesariamente verdadero que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq$ 3?

(II).Si x + y + z $\leq$ 3, ¿es necesariamente verdadero que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq$ 3?

Solución:

(I).Sea x = 3, y = z = 1/n con n natural y n $\geq$ 2, x + y + z = 3 + 2/n > 3, luego $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ + 2n > 3 ó si x = 1, y = 2 – t, z = t con 0 < t < 2, entonces x + y + z = 3 pero $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ va tomando valores muy grandes ó si x =1, y = 2, z = ½, entonces x + y + z = 3½ > 3 y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ = 3½ > 3

$\therefore$no es necesariamente verdadera.

(II).3 $\geq$ x + y + z, entonces $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq$(x + y + z)$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq$

3 + $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$ luego $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq$ 9 y $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq$ 3 y la igualdad se alcanza para x = y = z = 1.

Problema 11.

Determina para que número natural K la expresión $\frac{K^2}{1{,}001^K}$ alcanza su valor máximo

Solución:

Se busca cuál es el menor natural K para el que se cumple que

$\frac{(K+1)^2}{(1{,}001)^{K+1}}-\frac{K^2}{(1{,}001)^K}$ < 0 es decir $\frac{(K+1)^2}{(1{,}001)^{K+1}}-\frac{1{,}001K^2}{(1{,}001)^{K+1}}$ < 0

CONTINUACION ANEXO 3

$(K + 1)^2 – 1{,}001K^2 < 0$ ya que $(1{,}001)^{K+1} > 0$ entonces $K^2 + 2K + 1 - 1{,}001K^2 < 0$
$–0{,}01K^2 + 2K + 1 < 0$ y $K^2 - 2000K – 1000 > 0$ y $K(K – 2000) > 1000$ con K natural.
Es fácil observar que para K < 2000 es falso pero para K > 2000 es verdadero, como se busca el menor entonces para K = 2001 se cumple que 2001·1 > 1000.

<u>Problema 12</u>

Ejemplo de mayor complejidad para hallar máximos sin derivación

Sea n un entero mayor o igual que 2; sin utilizar la derivación, halla el máximo de

$$\sum_{1\le i\le j\le n} sen^2(x_i - x_j)$$

cuando los números $x_1, x_2,..., x_n$ varían en $\Re$

<u>Solución</u>:

Se tiene:

$$\sum_{1\le i\le j\le n} sen^2(x_i - x_j) = \sum_{1\le i\le j\le n}(1 - \cos^2(x_i - x_j))$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{1\le i\le j\le n}\cos^2(x_i - x_j) \qquad (1)$$

Y, por otra parte,

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\cos^2(x_i - x_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le i\le j\le n}(1 + \cos 2(x_i - x_j))\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2\sum_{1\le i\le j\le n}\cos 2(x_i - x_j)\right) \qquad (2)$$

Puesto que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} sen 2x_i\right)^2 = n + 2\sum_{1\le i\le j\le n}\cos 2(x_i - x_j) \ge 0$$

CONTINUACION ANEXO 3

Entonces $\sum_{1 \le i \le j \le n} \cos 2(x_i - x_j) \ge -\frac{n}{2}$ (3)

Como consecuencia de (2), (3) se transforma en

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} \cos^2 (x_i - x_j) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2} \right) = \frac{n(n-2)}{4} \quad (4)$$

Y de (1) y (4) se deduce

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} sen^2 (x_i - x_j) \le \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-2)}{4}$$

Así se tiene que

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} sen^2 (x_i - x_j) \le \frac{n^2}{4} \quad (5)$$

Se prueba que $\frac{n^2}{4}$ es el máximo buscado

Observe que hay igualdad en (5) si y solamente si (3) es una igualdad, lo que equivale a

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = \sum_{i=1}^{n} sen\, 2x_i = 0$$

Si n es par (=2k), basta tomar

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = \frac{\pi}{4}$$

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_{2k} = \frac{-\pi}{4}$$

Si $n = 2k+1$, se escoge los números reales $x_1, x_{2,\dots}, x_n$ tales que

$$x_{2i+1} = -x_{2i+2} \quad , \quad 0 \le i \le k-1$$

CONTINUACION ANEXO 3

$$x_{2k+1} = 0$$

Con lo que se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} sen2x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = 2\sum_{i=0}^{k-1} \cos 2x_{2i+1} + 1 = 2k \cos 2x_1 + 1$$

Entonces, para que sea $\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = 0$

Es suficiente tomar $x_1 = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-1}{2k}\right)$

Luego, en efecto, $\frac{n^2}{4}$ es el máximo buscado.

CARTA 4

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS	EJERCICIOS VARIADOS DE OLIMPIADAS

Estimado estudiante:

Con esta carta llega al final las actividades que se han previsto para tu aprendizaje en este tema. Se espera que los ejercicios propuestos a continuación te sean ya familiares y que tengas éxito en su solución.

Se trata de ejercicios variados que han aparecido en Olimpiadas alrededor del mundo, por ello no te debes decepcionar si no logras resolver algunos. Recuerda que se trata de ejercicios de un alto nivel de complejidad por lo que es preciso un análisis para que sirva de referencia cuando enfrentes una situación parecida. Se espera que te hayan sido de utilidad estas cartas, pero recuerda que los conocimientos deben ser reactivados sistemáticamente, de ahí sea preciso que retomes ejercicios de este tema cada cierto tiempo para evitar el olvido y no pierdas las habilidades desarrolladas.

CONTINUACION ANEXO 3

<u>Problema 1</u> (OMCC 2003)

Sean a, b enteros, con a > 1 y b > 2. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuando se tiene la igualdad.

<u>Solución:</u>

Se procederá utilizando el método de inducción para b = 3.

Se tiene que $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ y para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ resulta suficiente demostrar que $(a^2 - a + 1) \geq 3$, lo cual es cierto pues

$a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$

O sea que para b = 3 se cumple que $a^b + 1 \geq b(a+1)$

Se demostrará ahora para $b+1$

$a^{b+1} + 1 \geq (b+1)(a+1)$

Trabajando con miembro izquierdo

$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a+1) + 2 \geq ab(a+1) - (a+1) + 2$, donde esta última desigualdad se obtiene por la hipótesis de inducción.

La última expresión puede escribirse como:

$ab(a+1) - (a+1) + 2 > (ab-1)(a+1)$

Finalmente, $ab - 1 \geq 2b - 1 = (b+1) + (b-2) > b+1$, lo cual es cierto. Por consiguiente, la desigualdad se vuelve estricta después de b = 3.

Retomando el caso b = 3, se observa que a (a-1) = 2, únicamente cuando a = 2. Por tanto se ha demostrado por inducción que siempre se tiene la desigualdad y que la igualdad se da en el caso únicamente en que a = 2, b = 3.

CONTINUACION ANEXO 3

Problema 2 [Olimpiada de Asia Pacífico (APMO) 1996]

Sean a, b y c los lados de un triángulo. Pruebe que:

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Y determine cuando se da la igualdad.

Solución:

Sean:

$p=\left(\frac{a+b+c}{2}\right), x=p-a, y=p-b, z=p-c$, (note que x, y, z > 0

Por la desigualdad triangular). Entonces $a=y+z, b=z+x, c=x+y$, convirtiéndose la desigualdad en:

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\le\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}$$

Pero:

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}=\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z+2x}}{2}$$

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\le\frac{\sqrt{2x+2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y+2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z+2x}}{2}(porAC\ )$$

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\le\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$$

Problema 3: [IMO 2005]

Sean x, y, z números positivos tales que xyz ≥ 1. Pruebe que:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{y^5+z^2+x^2}\ge 0$$

CONTINUACION ANEXO 3

Demostración:

La siguiente solución, fue dada por un estudiante de Moldavia, mereciendo un premio especial por su sencillez y belleza.

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2(y^2 + z^2)(x^3 - 1)^2}{x^3(x^5 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0$$

Por lo tanto,

$$\sum_{cíclica} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \sum_{cíclica} \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \sum_{cíclica} (x^2 - \frac{1}{x})$$

$$\sum_{cíclica} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \sum_{cíclica} (x^2 - yz) \geq 0$$

Nota: la palabra cíclica en las sumatorias significa que las variables x, y, z deben permutarse cíclicamente. Por ejemplo:

$\sum_{cíclica} (x^2 - yz) + (y^2 - zx) + (z^2 - xy) \geq 0$, ya que

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Problema 4: Olimpiada de la República Checa 1994)

Demostrar que de cualquier cuaterna de números distintos, del intervalo (0,1), es posible elegir dos, a,b tales que:

$$\sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}$$

CONTINUACION ANEXO 3

Solución:

Todo número del intervalo (0,1) es de la forma cosα, con $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Por lo tanto, si se divide el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ en 3 partes iguales, de cualquier cuaterna de tales números existirán dos a, b tales que:

$a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, con $0 < |\alpha - \beta| < \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

La desigualdad $\cos(\alpha - \beta) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ puede escribirse como:

$$ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y elevando al cuadrado

$$a^2b^2 + 2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} + (1-a^2)(1-b^2) > \frac{3}{4}$$

$$2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > a^2 + b^2 - 2a^2b^2 - 1 + \frac{3}{4}$$

$$2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > a^2 + b^2 - 2a^2b^2 - \frac{1}{4}$$

Y dividiendo entre $2ab > 0$

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}$$

Problema 5: (Propuesto por Hojoo Lee, Korea. Aparecido en revista Cruz-Problema 2581). Suponiendo que a, b y c son enteros reales positivos. Probar que:

$$\frac{ab + c^2}{a+b} + \frac{bc + a^2}{b+c} + \frac{ca + b^2}{c+a} \geq a + b + c.$$

Solución:

Sea

$$D = (a+b)(b+c)(c+a)$$

CONTINUACION ANEXO 3

Donde claramente se puede ver que D > 0. Se demostrará que la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de la inecuación no es negativo.

$$\frac{ab + c^2}{a + b} - c + \frac{bc + a^2}{b + c} - a + \frac{ca + b^2}{c + a} - b \geq 0.$$

$$\frac{c^2 + ab - ac - bc}{a+b} + \frac{a^2 + bc - ab - ac}{b+c} + \frac{b^2 + ac - ab - bc}{c+a}$$

$$\frac{(c - a)(c - b)}{a + b} + \frac{(a - b)(a - c)}{b + c} + \frac{(b - a)(b - c)}{c + a}$$

$$\frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{D}$$

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}{D} \geq 0$$

La igualdad solo se cumple si a=b=c

Problema 6: (XLIV Olimpiada Matemática Española, 2008).

Prueba que para cualesquiera números reales a, b tales que $0 < a, b < 1$, se

Cumple la desigualdad siguiente:

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1 - a)(1 - b)^2 + (1 - a)^2(1 - b)} < \sqrt{2}$$

Solución:
Se verifica que $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$ para todo x $\in (0,1)$. Teniendo en cuenta que $0<\frac{a + b}{2}<1$, utilizando la desigualdad anterior y aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se tiene:

$$\sqrt{ab\left(\frac{a + b}{2}\right)} < \sqrt[3]{ab\left(\frac{a + b}{2}\right)} < \frac{a + b + \left(\frac{a + b}{2}\right)}{3} = \frac{a + b}{2}$$

CONTINUACION ANEXO 3

Y $\sqrt{(1-a)(1-b)\left(1-\frac{a+b}{2}\right)} < \sqrt[3]{(1-a)(1-b)\left(1-\frac{a+b}{2}\right)}$

$$\leq \frac{1-a+1-b-\frac{a+b}{2}}{3} = 1-\frac{a+b}{2}$$

Sumando las anteriores expresiones resulta

$$\sqrt{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \sqrt{(1-a)(1-b)\left(1-\frac{a+b}{2}\right)} < 1$$

O equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{ab^2+a^2b}+\sqrt{(1-a)(1-b)^2+(1-a)^2(1-b)}\right) < 1$$

De donde se obtiene inmediatamente la desigualdad del enunciado.

Problema 7: (XLV Olimpiada Matemática Española, 2009).

Sean a, b, c números reales positivos tales que abc = 1. Prueba la desigualdad siguiente:

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

Solución:

Como abc = 1, entonces $\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 = \left(\frac{ca}{abc+c}\right)^2 = \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2$ Análogamente se obtienen $\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 = \left(\frac{ab}{1+a}\right)^2$ y $\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 = \left(\frac{bc}{1+b}\right)^2$. Por tanto la desigualdad requerida se convierte en:

$$\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{1+b}\right)^2 + \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$ equivalente a

CONTINUACION ANEXO 3

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^{2}+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^{2}+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^{2}\right]} \geq \frac{1}{2}$$

Usando ahora la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, se obtiene:

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^{2}+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^{2}+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^{2}\right]} \geq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)+\left(\frac{bc}{1+b}\right)+\left(\frac{ca}{1+c}\right)\right]$$

Resulta suficiente demostrar que $\frac{ab}{1+a}+\frac{bc}{1+b}+\frac{ca}{1+c} \geq \frac{3}{2}$ o equivalentemente

$\frac{abc}{c(1+a)}+\frac{abc}{a(1+b)}+\frac{abc}{b(1+c)} \geq \frac{3}{2}$, que a su vez equivale a que

$$\frac{1}{c(1+a)}+\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)} \geq \frac{3}{2}$$

Sustituyendo $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ en la última desigualdad resulta

$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{y}\right)^{-1} \geq \frac{3}{2}$ y sustituyendo ahora

$\alpha = \frac{1}{x}$, $\beta = \frac{1}{y}$, $\chi = \frac{1}{z}$, se llega a la desigualdad de Nesbit

$$\frac{\alpha}{\beta+\chi}+\frac{\beta}{\chi+\alpha}+\frac{\chi}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$$

La igualdad se alcanza solamente si $a = b = c = 1$

CONTINUACION ANEXO 3

EJERCICIOS PROPUESTOS

Problema 1: (Olimpiada Internacional de 1983, Francia).

Sean a, b, c los lados de un triángulo. Pruebe que:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

Problema 2: (Moscú, 1963)

Suponiendo que a, b, c son números positivos. Pruebe que:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Problema 3: (IMO 2001)

Pruebe, para a, b, c números reales positivos, la desigualdad

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

Problema 4: (Primera Olimpiada Iberoamericana para estudiantes universitarios

Demostrar las siguientes desigualdades

$$\frac{1}{1999}<\ln\frac{1999}{1998}<\frac{1}{1998}$$

Problema 5: (IMO 1998)

Sean $r_1, r_2, ..., r_n$ reales mayores o iguales a 1. Demuestre que:

$$\frac{1}{r_1+1}+...+\frac{1}{r_n+1}\geq\frac{n}{\sqrt[n]{r_1...r_n}+1}$$

Problema 6: APMO 1991

Sean $a_1, a_2, ...\ a_n, b_1, b_2, ...\ b_n$ reales positivos tales que $a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n$ Demuestre que:

CONTINUACION ANEXO 3

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + \ldots + a_n)$$

<u>Problema 7</u>: IMO 2004

Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

Para cualesquiera números reales a, b, c tales que $ab + bc + ca = 0$

ANEXO 4

ENCUESTA

Estimado colega:

Con el fin de validar la investigación: “Alternativa metodológica para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en los estudiantes talentos en Matemática”, en las condiciones actuales de la enseñanza en la provincia Sancti Spiritus**,** es necesario el aval de especialistas en el tema.

Teniendo en cuenta su experiencia y profesionalidad en el ejercicio de la docencia e investigación, se precisan sus puntos de vista respecto a la propuesta, los que de seguro enriquecerán el trabajo.

Si decide colaborar, lea detenidamente las instrucciones que le brindamos y responda la presente encuesta con la mayor sinceridad posible. Se agradece de antemano su valiosa ayuda.

Instrucciones.

Llene los siguientes datos personales para caracterizarlo como experto.

Años de experiencia en la docencia.	
Años de experiencia como profesor universitario.	
Categoría científica.	
Categoría Docente.	
Conocimientos sobre diseño curricular. (Mucho, bastante, poco, ninguno)	

Conocimientos de la ciencia objeto de estudio.(Mucho, bastante, poco, ninguno)	

CONTINUACIÓN ANEXO 4

2. Marque con una "x" en la tabla siguiente, el valor que se corresponda con el grado de conocimiento que usted posee sobre la identificación y desarrollo del talento matemático y su aplicación al trabajo con estudiantes talentos en Matemática. (Considere la escala de manera ascendente).

0 Poco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 mucho

3. Realice una autovaloración del grado de influencia que cada una de las fuentes que se presenta a continuación ha tenido en su conocimiento.

FUENTES DEL CONOCIMIENTO	ALTA	MEDIA	BAJA
Análisis teóricos realizados por usted.			
Experiencia de trabajo.			
Trabajo de autores nacionales consultados.			
Trabajo de autores extranjeros consultados.			
Su propio conocimiento sobre el estado actual del problema en el extranjero.			
Su intuición.			

ANEXO 5

Tabla 1: Valores predeterminados para calcular el coeficiente Ka.

FUENTES DEL CONOCIMIENTO	ALTA	MEDIA	BAJA
Análisis teóricos realizados por usted	0,3	0,2	0,1
Experiencia de trabajo	0,5	0,4	0,2
Trabajo de autores nacionales consultados	0,05	0,04	0,02
Trabajo de autores extranjeros consultados	0,05	0,04	0,02
Su propio conocimiento sobre el estado actual del problema en el extranjero	0,05	0,04	0,02
Su intuición	0,05	0,04	0,02

Tabla2: Coeficientes de competencia de los expertos seleccionados.

Experto.	Análisis teórico.	Experiencia	Autores nacionales.	Autores extranjeros	Problemas en el extranjero.	Intuición.	Ka	Kc	K
1	0.3	0.4	0.05	0.05	0.04	0.02	0.86	1	0.93
2	0.3	0.5	0.05	0.04	0.05	0.04	0,98	0.8	0.89
3	0.2	0.5	0.04	0.02	0.02	0.05	0,83	0.9	0.87
4	0.3	0.5	0.05	0.05	0.04	0.04	0,98	0.6	0.79
5	0.2	0.5	0.04	0.04	0.02	0.05	0.85	0.6	0.73
6	0.2	0.5	0.04	0.04	0.02	0.02	0.82	0.7	0.76
7	0.3	0.5	0.05	0.05	0.05	0.04	0,99	0.9	0.95
8	0.3	0.5	0.05	0.04	0.04	0.04	0,97	0.8	0.89

ANEXO 6

Estimado colega:

Para poder llevar a la práctica la validación de la investigación: “Alternativa metodológica para la formación y desarrollo de la habilidad demostrar desigualdades en estudiantes talentos en Matemática”, en la provincia Sancti Spiritus” (una copia de cuyo informe se adjunta), se agradecería que llene la siguiente tabla, marcando con una “x” la categoría que considere adecuada a los aspectos.

Las categorías que se proponen son las siguientes:

M. A: Muy Adecuado. **B. A:** Bastante Adecuado. **A:** Adecuado.

P. A: Poco Adecuado. **I:** Inadecuado

Nro	Indicador	M. A	B. A	A	P. A	I
1	La variedad y manejo de la Bibliografía.					
2	Los fundamentos teóricos que respaldan la propuesta.					
3	La asequibilidad de los enfoques en la presentación de los ejercicios y la teoría.					
4	La graduación de las tareas dentro de las cartas y concatenación entre ellas.					
5	Las indicaciones para la puesta en práctica de la propuesta.					
6	La contribución de la propuesta a la estimulación de la independencia cognoscitiva y la creatividad de los estudiantes.					
7	Las posibilidades prácticas de aplicación de la propuesta.					

ANEXO 7

Tabla 3: Resultados de los indicadores sometidos a consideración según las categorías utilizadas.

	Indicadores						
	1	2	3	4	5	6	7
E1	MA	A	BA	BA	A	BA	A
E2	BA	MA	BA	MA	A	MA	MA
E3	MA	MA	MA	BA	BA	MA	BA
E4	BA	BA	MA	MA	BA	MA	A
E5	MA	BA	BA	BA	A	BA	A
E6	MA	A	MA	MA	MA	MA	BA
E7	MA	MA	BA	MA	MA	MA	BA
E8	BA	A	MA	MA	BA	MA	A

ANEXO 8

Tabla 4: Frecuencias absolutas de las evaluaciones por indicador.

Indicadores	MA	BA	A	PA	I	Total
1	5	3	0	0	0	8
2	3	2	3	0	0	8
3	4	4	0	0	0	8
4	5	3	0	0	0	8
5	2	3	3	0	0	8
6	6	2	0	0	0	8
7	1	3	4	0	0	8

Tabla 5: Frecuencias acumuladas de las evaluaciones por indicadores.

Indicadores	MA	BA	A	PA	I
1	5	8	8	8	8
2	3	5	8	8	8
3	4	8	8	8	8
4	5	8	8	8	8
5	2	5	8	8	8
6	6	8	8	8	8
7	1	4	8	8	8

Tabla 6: Frecuencias acumuladas relativas de las evaluaciones por indicadores.

Indicadores	MA	BA	A	PA	I
1	0,63	1,00	1,00	1,00	1,00
2	0,38	0,63	1,00	1,00	1,00
3	0,50	1,00	1,00	1,00	1,00
4	0,63	1,00	1,00	1,00	1,00
5	0,25	0,63	1,00	1,00	1,00
6	0,75	1,00	1,00	1,00	1,00
7	0,13	0,50	1,00	1,00	1,00

ANEXO 9

Tabla 7: Resultados de la evaluación de los indicadores.

Indicador	MA	BA	A	PA	Suma	Promedio	Valor Indicador	
1	0,32	3,49	3,49	3,49	10,79	2,70	-0,46	Muy adecuado
2	-0,32	0,32	3,49	3,49	6,98	1,75	0,49	Bastante adecuado
3	0,00	3,49	3,49	3,49	10,47	2,62	-0,38	Muy adecuado
4	0,32	3,49	3,49	3,49	10,79	2,70	-0,46	Muy adecuado
5	-0,67	0,32	3,49	3,49	6,62	1,66	0,58	Bastante adecuado
6	0,67	3,49	3,49	3,49	11,14	2,79	-0,55	Muy adecuado
7	-1,15	0,00	3,49	3,49	5,83	1,46	0,78	Bastante adecuado
Suma	-0,12	2,09	3,49	3,49	62,63			
Promedio	**-0,12**	**2,09**	**3,49**	**3,49**				
	Puntos de corte							

Tabla 7: Matriz de relación indicadores – categoría.

Indicadores	Categoría				
	MA	**BA**	**A**	**PA**	**I**
1	X				
2		X			
3	X				
4	X				
5		X			
6	X				
7		X			